Základy matematiky a statistiky pro humanitní obory I

Pavel Rychlý Vojtěch Kovář

Fakulta informatiky, Masarykova univerzita
Botanická 68a, 602 00 Brno, Czech Republic
{pary, xkovar3}@fi.muni.cz

část 5

Obsah přednášky

Uspořádaná dvojice

- (a, b)
  - má první a druhý prvek
  - $\rightarrow$ na rozdíl od množiny záleží na pořadí prvků
- Definice pomocí množin
  - $(a, b) \equiv \{\{a\}, \{a, b\}\}$
  - takto jednoznačně rozlišíme, který z prvků je první
  - jsou možné i jiné definice? Jaké?
- Uspořádané n-tice (kde n je přirozené)
  - trojice $(a, b, c) \equiv (a, (b, c))$
  - obecně $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n) \equiv (a_1, (a_2, (a_3, (..., a_n)...)))$
  - (funguje jen pro konečné n)

Kartézský součin

- Kartézský součin dvou množin A, B
  - $A \times B \equiv \{(a, b) \mid a \in A \ \wedge \ b \in B\}$
  - $\rightarrow$ množina uspořádaných dvojic prvků z A a B
- Kartézský součin více množin
  - analogicky – obsahuje uspořádané n-tice
  - $A \times B \times C \equiv \{(a, b, c) \mid a \in A \ \wedge \ b \in B \ \wedge \ c \in C\}$
  - podobně pro větší n

Relace

- Motivace
  - způsob, jak v matematice svázat dvě hodnoty (případně více)
  - vyjadřujeme, že objekty (množiny) v relaci mají něco společného
- Binární relace
  - množina uspořádaných dvojic
  - $\rightarrow$ podmnožina kartézského součinu
- n-ární relace
  - množina uspořádaných n-tic

Relace

- Často říkáme „relace na množině A"
  - tzn. podmnožina součinu A x A
  - resp. A x A x ... x A
- Přehledný zápis binárních relací
  - tabulkou
  - grafem

Relace – příklady

- Relace identity na množině A
  - $Id(A)$ – binární relace
  - $Id(A) = \{(a, a) \in AxA \mid a \in A\}$
- Relace větší nebo rovno na přirozených číslech
  - $\geq (N)$ – binární relace
  - $\geq (N) = \{(a, b) \in NxN \mid b \subseteq a\}$
  - (podle množinové konstrukce přirozených čísel – viz minulá přednáška)
- Relace plus na přirozených číslech
  - $+(N)$ – ternární relace
  - $+(N) = \{(a, b, c) \in NxNxN \mid a + b = c\}$
  - $a + b = c$ je jen jiný zápis pro $(a, b, c) \in +(N)$
  - $\rightarrow$ všechny operace na číslech jsou relace

Vlastnosti binárních relací

- Už jste se s nimi setkali jinde
- Reflexivita
  - R(A) je reflexivní, právě tehdy, když
  - $\forall a \in A(\ (a, a) \in R\ )$
- Symetrie
  - R(A) je symetrická, právě tehdy, když
  - $\forall a, b \in A(\ (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R\ )$
- Antisymetrie
  - R(A) je antisymetrická, právě tehdy, když
  - $\forall a, b \in A(\ (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b\ )$

Vlastnosti binárních relací (2)

- Tranzitivita
  - R(A) je tranzitivní, právě tehdy, když
  - $\forall a, b, c \in A(\ (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R\ )$
- Ekvivalence
  - R(A) je ekvivalence, právě tehdy, když je současně reflexivní, symetrická i tranzitivní
- Uspořádání
  - R(A) je uspořádání, právě tehdy, když je současně reflexivní, antisymetrická i tranzitivní

Vlastnosti binárních relací – příklady

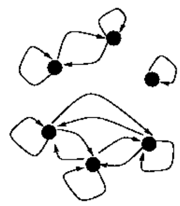
- Identita na libovolné množině
  - splňuje všechny výše uvedené vlastnosti
  - $\rightarrow$ ekvivalence i uspořádání
- Relace $\leq$ na přirozených číslech
  - není symetrická
  - $\rightarrow$ uspořádání
- Relace $<$ na přirozených číslech
  - není symetrická ani reflexivní
  - $\rightarrow$ ani ekvivalence, ani uspořádání
- Relace na prázdné množině $R(\emptyset)$
  - je $\emptyset$ (podmnožina $\emptyset \times \emptyset$)
  - $\rightarrow$ ekvivalence i uspořádání
  - (pro všechny prvky prázdné množiny platí kde co)

Další příklady relací

- Diskutujte jejich vlastnosti
  - pro malé množiny je zkuste zakreslit
- Relace „sedí vedle" na přítomných studentech
- Relace „sedí ve stejné řadě jako" na přítomných studentech
- Relace „je dělitelem" na přirozených číslech
- Relace „krát" (*) na přirozených číslech
- Relace „má stejný zbytek po vydělení 2" na přirozených číslech

Ekvivalence a rozklad

- Ekvivalence na množině A
  - reflexivní, symetrická, tranzitivní
  - díky těmto vlastnostem vytvoří „ostrůvky"
  - $\rightarrow$ podmnožiny, v nichž každý prvek je v relaci s každým
  - $\rightarrow$ žádný prvek není v relaci s žádným prvkem z jiné podmnožiny
- Rozklad podle ekvivalence
  - množina těchto „ostrůvků"



Ekvivalence a rozklad

- Třída ekvivalence
  - „jeden ostrůvek"
  - $A_x = \{a \in A \mid (a, x) \in R\}$
- Rozklad množiny A podle ekvivalence R
  - $A/R = \{A_x \mid x \in A\}$

Definice celých čísel

- Uvažujme množinu dvojic přirozených čísel ...
  - $D = \{(a, b) \in \mathbb{N}x\mathbb{N}\}$
- ... spolu s ekvivalencí R
  - $((a, b), (c, d)) \in R \quad \equiv \quad a + d = b + c$
- Uvažujme rozklad podle této ekvivalence
  - třídy rozkladu jsou $D_{a,b} = \{(x, y) \mid ((x, y), (a, b)) \in R\}$
  - rozklad D/R odpovídá množině $\{D_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{N}\}$
- Tento rozklad je konstrukcí celých čísel $\mathbb{Z}$
  - každá třída $D_{a,b}$ odpovídá číslu $a - b$

Náměty k přemýšlení

- Jak bude vypadat definice operací $+$ a $*$ na celých číslech?
  - nápověda: s využitím příslušných operací nad přirozenými čísly
- Jak bude vypadat definice operace odečítání na celých číslech?
  - nápověda: s využitím operace $+$
- Jak by vypadala definice racionálních čísel
  - nápověda: použijeme podobnou konstrukci jako v případě celých čísel
  - místo sčítání bude násobení
  - příslušná třída rozkladu bude odpovídat podílu
  - opět zkuste přemýšlet o definicích operací $+$, $*$, $-$, $/$