

Základy matematiky a statistiky pro humanitní obory I

Pavel Rychlý Vojtěch Kovář

Fakulta informatiky, Masarykova univerzita
Botanická 68a, 602 00 Brno, Czech Republic

{pary, xkovar3}@fi.muni.cz

část 5

Obsah přednášky

- 1 Uspořádané dvojice, n-tice
- 2 Relace
- 3 Rozklad podle ekvivalence
- 4 Celá čísla

Uspořádaná dvojice

- (a, b)
 - má první a druhý prvek
 - \rightarrow na rozdíl od množiny **záleží na pořadí prvků**
- Definice pomocí množin
 - $(a, b) \equiv \{\{a\}, \{a, b\}\}$
 - takto jednoznačně rozlišíme, který z prvků je první
 - jsou možné i jiné definice? Jaké?
- Uspořádané n-tice (kde n je přirozené)
 - trojice $(a, b, c) \equiv (a, (b, c))$
 - obecně $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \equiv (a_1, (a_2, (a_3, (\dots, a_n) \dots)))$
 - (funguje jen pro konečné n)

Kartézský součin

■ Kartézský součin dvou množin A , B

- $A \times B \equiv \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$
- \rightarrow množina uspořádaných dvojic prvků z A a B

■ Kartézský součin více množin

- analogicky – obsahuje uspořádané n -tice
- $A \times B \times C \equiv \{(a, b, c) \mid a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C\}$
- podobně pro větší n

Relace

■ Motivace

- způsob, jak v matematice svázat dvě hodnoty (případně více)
- vyjadřujeme, že objekty (množiny) v relaci mají něco společného

■ Binární relace

- množina uspořádaných dvojic
- \rightarrow podmnožina kartézského součinu

■ n-ární relace

- množina uspořádaných n-tic

Relace

- Často říkáme „relace na množině A ”
 - tzn. podmnožina součinu $A \times A$
 - resp. $A \times A \times \dots \times A$
- Přehledný zápis binárních relací
 - tabulkou
 - grafem

Relace – příklady

■ Relace identity na množině A

- $Id(A)$ – binární relace

- $Id(A) = \{(a, a) \in A \times A \mid a \in A\}$

■ Relace větší nebo rovno na přirozených číslech

- $\geq (N)$ – binární relace

- $\geq (N) = \{(a, b) \in N \times N \mid b \subseteq a\}$

- (podle množinové konstrukce přirozených čísel – viz minulá přednáška)

■ Relace plus na přirozených číslech

- $+(N)$ – ternární relace

- $+(N) = \{(a, b, c) \in N \times N \times N \mid a + b = c\}$

- $a + b = c$ je jen jiný zápis pro $(a, b, c) \in +(N)$

- \rightarrow všechny operace na číslech jsou relace

Vlastnosti binárních relací

- Už jste se s nimi setkali jinde

- Reflexivita

- $R(A)$ je reflexivní, právě tehdy, když
- $\forall a \in A((a, a) \in R)$

- Symetrie

- $R(A)$ je symetrická, právě tehdy, když
- $\forall a, b \in A((a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R)$

- Antisymetrie

- $R(A)$ je antisymetrická, právě tehdy, když
- $\forall a, b \in A((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b)$

Vlastnosti binárních relací (2)

■ Transitivita

- $R(A)$ je tranzitivní, právě tehdy, když
- $\forall a, b, c \in A ((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R)$

■ Ekvivalence

- $R(A)$ je ekvivalence, právě tehdy, když je současně reflexivní, symetrická i tranzitivní

■ Uspořádání

- $R(A)$ je uspořádání, právě tehdy, když je současně reflexivní, antisymetrická i tranzitivní

Vlastnosti binárních relací – příklady

- Identita na libovolné množině
 - splňuje všechny výše uvedené vlastnosti
 - → **ekvivalence i uspořádání**
- Relace \leq na přirozených číslech
 - není symetrická
 - → **uspořádání**
- Relace $<$ na přirozených číslech
 - není symetrická ani reflexivní
 - → **ani ekvivalence, ani uspořádání**
- Relace na prázdné množině $R(\emptyset)$
 - je \emptyset (podmnožina $\emptyset \times \emptyset$)
 - → **ekvivalence i uspořádání**
 - (pro všechny prvky prázdné množiny platí kde co)

Další příklady relací

- Diskutujte jejich vlastnosti
 - pro malé množiny je zkuste zakreslit
- Relace „sedí vedle“ na přítomných studentech
- Relace „sedí ve stejné řadě jako“ na přítomných studentech
- Relace „je dělitelem“ na přirozených číslech
- Relace „krát“ ($*$) na přirozených číslech
- Relace „má stejný zbytek po vydělení 2“ na přirozených číslech

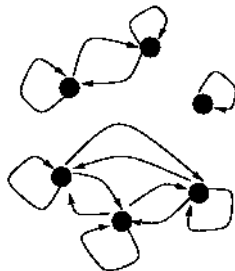
Ekvivalence a rozklad

■ Ekvivalence na množině A

- reflexivní, symetrická, tranzitivní
- díky těmto vlastnostem vytvoří „ostrůvky“
- \rightarrow podmnožiny, v nichž každý prvek je v relaci s každým
- \rightarrow žádný prvek není v relaci s žádným prvkem z jiné podmnožiny

■ Rozklad podle ekvivalence

- množina těchto „ostrůvků“



Ekvivalence a rozklad

- Třída ekvivalence
 - „jeden ostrůvek”
 - $A_x = \{a \in A \mid (a, x) \in R\}$
- Rozklad množiny A podle ekvivalence R
 - $A/R = \{A_x \mid x \in A\}$

Definice celých čísel

- Uvažujme množinu dvojic přirozených čísel ...
 - $D = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$
- ... spolu s ekvivalencí R
 - $((a, b), (c, d)) \in R \quad \equiv \quad a + d = b + c$
- Uvažujme rozklad podle této ekvivalence
 - třídy rozkladu jsou
$$D_{a,b} = \{(x, y) \mid ((x, y), (a, b)) \in R\}$$
 - rozklad D/R odpovídá množině $\{D_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{N}\}$
- Tento rozklad je konstrukcí celých čísel \mathbb{Z}
 - každá třída $D_{a,b}$ odpovídá číslu $a - b$

Náměty k přemýšlení

- Jak bude vypadat definice operací $+$ a $*$ na celých číslech?
 - nápověda: s využitím příslušných operací nad přirozenými čísly
- Jak bude vypadat definice operace odečítání na celých číslech?
 - nápověda: s využitím operace $+$
- Jak by vypadala definice racionálních čísel
 - nápověda: použijeme podobnou konstrukci jako v případě celých čísel
 - místo sčítání bude násobení
 - příslušná třída rozkladu bude odpovídat podílu
 - opět zkuste přemýšlet o definicích operací $+$, $*$, $-$, $/$