

Základy matematiky a statistiky pro humanitní obory I

Pavel Rychlý Vojtěch Kovář

Fakulta informatiky, Masarykova univerzita
Botanická 68a, 602 00 Brno, Czech Republic

{pary, xkovar3}@fi.muni.cz

část 6

Obsah přednášky

- 1 Funkce
- 2 Velikost množin
- 3 Posloupnosti

Funkce

■ Funkce

- speciální typ relace
- tj. všechny funkce jsou současně i relace (naopak ne)

■ Alternativní pohled na relaci

- prvních $n-1$ hodnot uspořádané n -tice jsou argumenty relace (vstup)
- poslední hodnota je hodnota funkce (výstup)
- zápis – např.: $(a, b, c) \in + \equiv +(a, b) = c$

■ Funkce

- taková relace, kde výstup je jednoznačný

Definice funkce

■ Funkce

- taková relace, kde výstup je jednoznačný
- binární relace f na množině A je funkce, pokud platí:
 - $\forall a, b, c \in A ((a, b) \in f \wedge (a, c) \in f \Rightarrow b = c)$
 - \rightarrow **unární funkce je binární relace**
- ternární relace f na množině A je funkce, pokud:
 - $\forall a, b, c, d \in A ((a, b, c) \in f \wedge (a, b, d) \in f \Rightarrow c = d)$
 - \rightarrow **binární funkce je ternární relace**
- podobně funkce více proměnných

Funkce – varianty zápisu

- Často říkáme „funkce z A do B ”
 - případně „zobrazení z A do B ”
 - zapisujeme $f : A \rightarrow B$
 - tj. podmnožina kartézského součinu $A \times B$
 - $A =$ **definiční obor** (vstup), značíme D_f nebo $dom(f)$
 - $B =$ **obor hodnot** (výstup), značíme R_f nebo $f(A)$
- Funkční hodnota
 - zapisujeme $f(a) = b$
 - totéž jako: $(a, b) \in f$
 - také „ b je obraz prvku a ”
 - také „ a je vzor prvku b ”

Vlastnosti funkcí

■ Injektivita

- $f : A \rightarrow B$ je injektivní (též prostá), právě tehdy, když
- $\forall a, b \in A (f(a) = f(b) \Rightarrow a = b)$
- \rightarrow „žádné dva prvky nemají stejný obraz“

■ Surjektivita

- $f : A \rightarrow B$ je surjektivní (též „na“), právě tehdy, když
- $\forall b \in B (\exists a \in A (b = f(a))$
- \rightarrow „každý prvek oboru hodnot má nějaký vzor“
- \rightarrow „celý obor hodnot je pokrytý“

Vlastnosti funkcí (2)

■ Úplnost

- $f : A \rightarrow B$ je úplná, právě tehdy, když
- $\forall a \in A (\exists b \in B (b = f(a))$
- \rightarrow „každý prvek definičního oboru má nějaký obraz“
- \rightarrow „celý definiční obor je pokrytý“
- pojmem „funkce“ se často myslí úplná funkce

■ Bijekce

- $f : A \rightarrow B$ je bijekce, právě tehdy, když je injektivní, surjektivní a úplná
- \rightarrow množiny A a B jsou „stejně velké“

Inverzní funkce

■ Inverzní funkce

- pokud $f : A \rightarrow B$ je injektivní, definujeme inverzní funkci
- $f^{-1} : B \rightarrow A$
- $f^{-1}(b) = a \equiv f(a) = b$

Definice velikosti množiny

- Velikost množiny A : $|A|$
 - je definována jako přirozené číslo n právě tehdy, pokud existuje bijekce $f : n \rightarrow A$
 - viz konstrukce přirozených čísel pomocí množin
- Nekonečné množiny
 - A je **spočetná** právě tehdy, pokud existuje bijekce $f : \mathbb{N} \rightarrow A$
 - \rightarrow spočetné množiny mají stejný počet prvků jako přirozená čísla
 - \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} jsou spočetné množiny
 - \mathbb{R} (reálná čísla) není spočetná množina
 - A má **mohutnost kontinua** právě tehdy, pokud existuje bijekce $f : \mathbb{R} \rightarrow A$

Posloupnosti

- Záleží na pořadí prvků
- Konečné posloupnosti
 - = uspořádané n -tice
- Nekonečné posloupnosti
 - = funkce na přirozených číslech
 - $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ je jen jiný zápis $f(0), f(1), \dots, f(n), \dots$
- Induktivní definice nekonečné posloupnosti
 - vypíšeme první člen (prvních několik členů)
 - určíme předpis, podle něhož dostaneme a_n s pomocí a_{n-1} (případně a_{n-2} apod.)

Posloupnosti – příklad

■ Fibonacciho posloupnost

- 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...
- $a_0 = 0$
- $a_1 = 1$
- $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$