KMITY

HRW 16.10

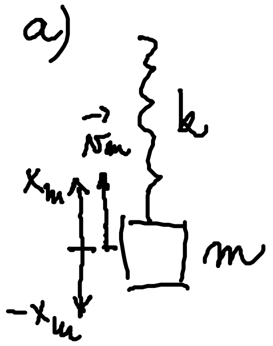
Závaží o hmotnosti 50 g zavěsíme na konec svislé pružiny a rozkmitáme. Největší rychlost závaží činí 15,0 cm·s^{-1}, perioda kmitání je 0,5 s. Určete (a) tuhost pružiny, (b) amplitudu kmitání a (c) frekvenci kmitů.

[(a) 7,9 N/m; (b) 11,9 mm; (c) 2 Hz]

$m = 0{,}05\,\mathrm{kg} \quad v_m = 0{,}15\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \quad T = 0{,}5\,\mathrm{s}$

$k = ? \quad x_m = ? \quad f = ?$

a)



$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \omega \cdot T = 2\pi$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Big|^2$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{k}{m} \Rightarrow k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = \frac{4\cdot\pi^2\cdot 0{,}05}{0{,}5^2}\,\mathrm{N/m} =$$

$$= 7{,}9\,\mathrm{N/m}$$

b) $x = x_m \cdot \sin(\omega t)$

$$v = \frac{dx}{dt} = \underbrace{\omega x_m}_{v_m} \cdot \cos(\omega t)$$

$$v_m = \omega \cdot x_m \Rightarrow x_m = \frac{v_m}{\omega} = \frac{v_m}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{v_m \cdot T}{2\pi} = \frac{0{,}15\cdot 0{,}5}{2\pi} =$$

$$= 0{,}0119\,\mathrm{m}$$

c) $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}5}\,\mathrm{Hz} = 2\,\mathrm{Hz}$

HRW 16.41

Kmitající soustava pružina+těleso má mechanickou energii 1,0 J. Kmitání probíhá s amplitudou 10 cm a maximální rychlost tělesa je 1,2 m·s^{-1}. Určete (a) tuhost pružiny, (b) hmotnost tělesa a (c) frekvenci kmitů.

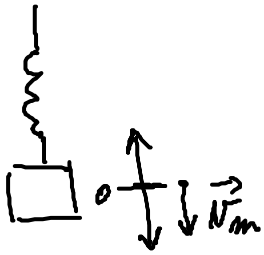
[(a) 200 N/m; (b) 1,39 kg; (c) 1,91 Hz]

$E_c = 1\,J \qquad x_m = 0{,}1\,m \qquad v_m = 1{,}2\,m/s$

a) $k = ?$

$$E_c = \frac{1}{2} k x_m^2 \Rightarrow k = \frac{2E_c}{x_m^2} = \frac{2 \cdot 1}{0{,}1^2} = 200\,N/m$$

b) $m = ?$



$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

$$E_{k0} = E_c = \frac{1}{2} m v_m^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} k x_m^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 x_m^2$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow k = \omega^2 \cdot m$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v_m^2$$

$$m = \frac{2E_c}{v_m^2} = \frac{2 \cdot 1}{1{,}2^2}\,kg = 1{,}39\,kg$$

c) $f = ?$

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{2\pi} = \frac{\sqrt{\frac{\frac{2E_c}{x_m^2}}{\frac{2E_c}{v_m^2}}}}{2\pi} =$$

$$f = \frac{\sqrt{\frac{200}{1{,}39}}}{2\pi}\,Hz = 1{,}91\,Hz$$

ELEKTROMAGNETICKÉ KMITY

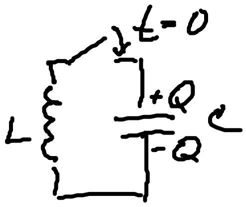
Příklad 1:

Máme obvod tvořený ideálním kondenzátorem s kapacitou 1μF a ideální cívkou s indukčností 5 mH. Kondenzátor je nabitý nábojem Q = 1 mC. V čase t = 0 s neprotéká obvodem proud. Určete (a) napětí na kondenzátoru v čase t = 0 s; (b) úhlovou frekvenci kmitů obvodu; (c) periodu vyvolaných kmitů obvodu; (d) jakou hodnotu by musela mít indukčnost cívky, aby byla frekvence kmitů obvodu rovna 1000 Hz.

[(a) 1000 V; (b) 14142 s^{-1}; (c) 444 μs; (d) 25 mH]

$C = 1\mu F = 1\cdot 10^{-6} F \qquad Q_{max} = 1mC = 10^{-3} C$

$L = 5mH$



a) $u_0(t=0)$

$$Q = C u \Rightarrow u_0 = \frac{Q_{max}}{C} = \frac{1\cdot 10^{-3}}{1\cdot 10^{-6}} = \underline{10^{3}\,V}$$

b)
$$\omega = \sqrt{\frac{1}{L\cdot C}} = \sqrt{\frac{1}{5\cdot 10^{-3}\cdot 10^{-6}}} = \sqrt{\frac{1}{5\cdot 10^{-9}}} = \sqrt{\frac{10^{+9}}{5}} = \sqrt{\frac{10}{5}}\cdot\sqrt{10^{8}} =$$
$$= \sqrt{2}\cdot 10^{4}\,s^{-1} = \underline{1{,}4\cdot 10^{4}\,s^{-1}}$$

c)
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{1{,}4\cdot 10^{4}}\,s = 0{,}0004\,s$$

d) $L' \qquad f' = 1000\,Hz$

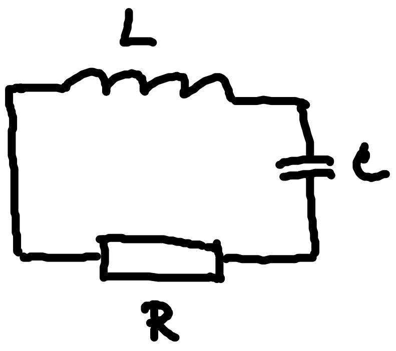
$$\omega' = 2\pi f' \qquad 2\pi f' = \sqrt{\frac{1}{C\cdot L'}}\ \Big|^{2}$$
$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{C\cdot L'}}$$
$$4\pi^2 f'^2 = \frac{1}{C\cdot L'} \Rightarrow L' = \frac{1}{C\,4\pi^2 f'^2} =$$

$$L' = \frac{1}{10^{-6}\cdot 4\pi^2\cdot 1000^2} = \frac{1}{\cancel{10^{-6}}\cdot 4\pi^2\cdot \cancel{10^{6}}} = \frac{1}{4\pi^2} = 25\cdot 10^{-3} H$$
$$= \underline{0{,}025\,H}$$

Příklad 2:

Elektrický obvod je tvoře nabitým kondenzátorem s kapacitou 10 μF a cívky s indukčností 1 mH. Určete, jaká může být maximální hodnota sériového odporu těchto součástek, aby obvod konal kmity.

[20 Ω]



$$\omega_{tl} = \sqrt{\underbrace{\omega^2 - \delta^2}_{>0}} \qquad \omega^2 = \frac{1}{LC} \qquad \delta = \frac{R}{2L}$$

$$\omega^2 - \delta^2 > 0$$

$$\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} > 0$$

$$\frac{1}{\cancel{L}C} > \frac{R^2}{4L^{\cancel{2}}}$$

$$\frac{4L}{C} > R^2 \Rightarrow R < \sqrt{\frac{4L}{C}}$$

$$R < \sqrt{\frac{4 \cdot 1 \cdot \cancel{10^{-3}}}{1 \cdot 10^{-\cancel{5}\,2}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot}{10^{-2}}} = \sqrt{4 \cdot 10^2} = 2 \cdot 10^1 = \underline{20\ \Omega}$$

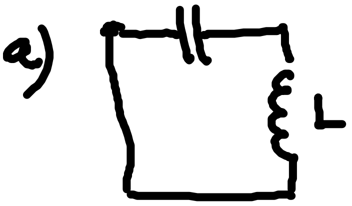
Příklad 3:

Určete, (a) s jakou frekvencí bude kmitat elektrický obvod složený z nabitého ideálního kondenzátoru s kapacitou 10 μF a ideální cívky s indukčností 1 mH? (b) Jak se změní frekvence kmitů, když bude obvod tvořen reálnými součástkami se sériovým odporem 2 Ω?

$C = 10^{-5}\,F;\ L = 10^{-3}\,H$

[(a)1592 Hz; (b) pokles o 8 Hz]

a)



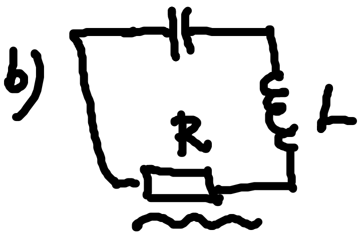
$$\omega = \sqrt{\frac{1}{L\cdot C}}$$

$$\omega = 2\pi f \rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{1}{L\cdot C}} =$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{1}{\underbrace{10^{-5}\cdot 10^{-3}}_{10^{-8}}}} = \frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{10^{8}} = \frac{10^4}{2\pi} =$$

$$= \underline{1592\,Hz}$$

b)



f'

$$\underline{\Delta f = f' - f}$$

$$f' = f_{tl} \qquad \omega_{tl} = \sqrt{\omega^2 - \delta^2} = \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{R}{4L}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{L\cdot C} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

$$f' = \frac{\omega_{tl}}{2\pi} = \frac{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{1}{10^{-3}\,10^{-5}} - \frac{\cancel{2^2}}{\cancel{4}\cdot(10^{-3})^2}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{10^8 - 10^6}\ Hz =$$

$$= 1583\,Hz$$

$$f' - f \qquad\qquad -8 \div$$

$$\Delta f = 1583 - 1592 = -9\,Hz \qquad \boxed{8 \div 9\,Hz}$$