

Vlny - 3

Superpozice a interference vln.

Stojaté vlny. Zásněje – rázy.

Fourierova řada, Fourierova transformace.

Dopplerův jev.

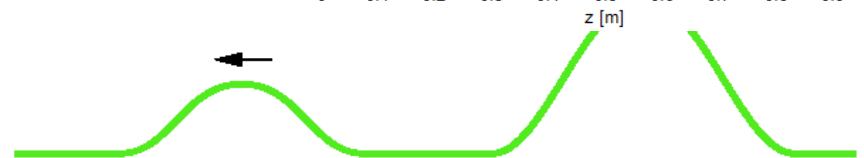
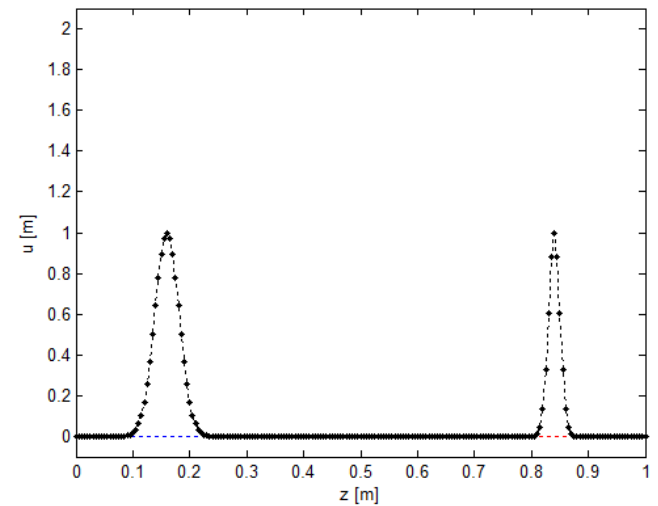
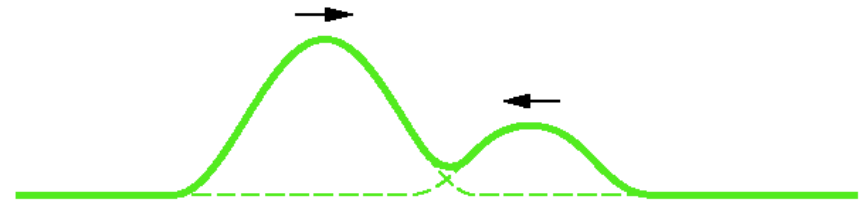
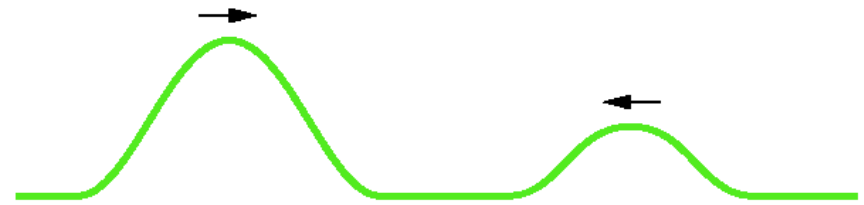
Princip superpozice

Prostředím postupují současně dvě (nebo více) různé vlny.

$$y'(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t).$$

U překrývajících se vln se výchylky algebraicky sčítají a vytvářejí jednu výslednou vlnu.

Překrývající se vlny se při svém postupu navzájem neovlivňují.



Interference vln

Dvě harmonické vlny o stejné amplitudě, stejné frekvenci a stejné vlnové délce vzájemně fázově posunuté o φ **postupující ve stejném směru**:

$$y_1(x, t) = y_m \sin(\omega t - kx)$$

$$y_2(x, t) = y_m \sin(\omega t - kx + \varphi)$$

Výsledná vlna se vypočítá jako součet výchylek vstupních vln:

$$y = y_1 + y_2 = y_m \sin(\omega t - kx) + y_m \sin(\omega t - kx + \varphi) = \left(2y_m \cos \frac{1}{2} \varphi \right) \sin \left(\omega t - kx + \frac{1}{2} \varphi \right)$$

(užije se vzorec pro součet dvou funkcí sinus)

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Vzniká sinusová vlna stejné frekvence (stejně ω) a vlnové délky (stejně k) postupující ve směru původních vln

Amplituda výsledné vlny:

$$y'_m = 2y_m \cos \frac{1}{2} \varphi$$

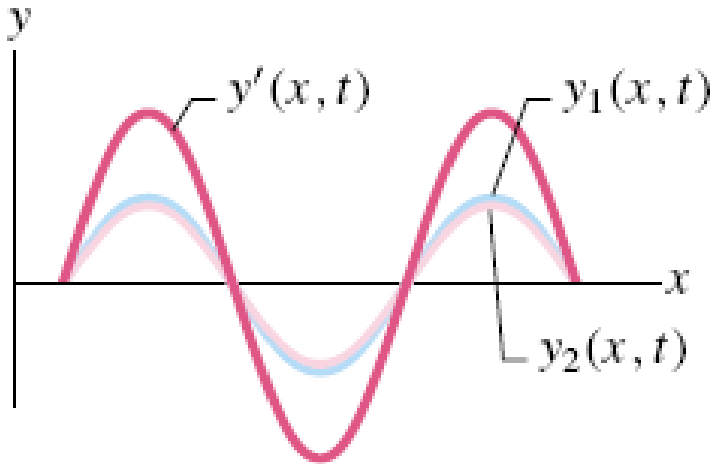
Závisí na vzájemném **fázovém posuvu** původních vln

Interference vln

Pro $\varphi = 2\pi m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (vlny ve fázi) je $y_m' = 2y_m \cos 0 = 2y_m$

(maximální zesílení)

Konstruktivní interference

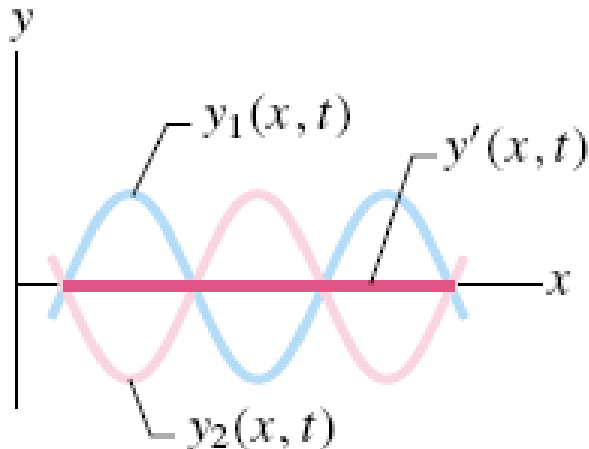


Pro $\varphi = \pi(2m + 1), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (vlny v opačné fázi) je

$$y_m' = 2y_m \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

(maximální zeslabení)

Destruktivní interference



HRW 17.38

38Ú. Na struně se šíří souhlasným směrem dvě stejné sinusové vlny a interferují. Výsledná vlna má rovnici

$$y'(x, t) = \\ = (3,0 \text{ mm}) \sin(20 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1} x - 4,0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} t + 0,820 \text{ rad}).$$

(a) Jaká je společná vlnová délka λ obou výchozích vln? (b) Jaký je mezi nimi fázový rozdíl? (c) Jaká je jejich společná amplituda y_m ?

Návod: Odvodit obecnou rovnici pro interferenci dvou vln, které jsou navzájem posunuty o φ .

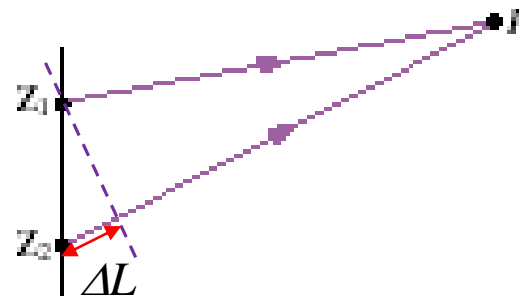
Výsledek porovnat se zadanou rovnicí.

- a) $\lambda = 0,314 \text{ m}$
- b) $\varphi = 1,64 \text{ rad}$
- c) $y_m = 2,2 \text{ mm}$

Interference vln

Fázový rozdíl může vzniknout i tak, že se **dvě vlny šíří po různě dlouhých drahách**.

Příklad – dva bodové zdroje Z_1, Z_2 zvukového vlnění o vlnové délce λ a frekvenci ω , které jsou ve fázi.



V bodě P dochází k interferenci vlnění

Platí

$$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\Delta L}{\lambda}$$

ΔL je **dráhový rozdíl vln**, φ je jejich fázový rozdíl v bodě P

Konstruktivní interference

$$\varphi = 2\pi m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

\Rightarrow

$$\Delta L = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Destruktivní interference

$$\varphi = \pi(2m+1), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

\Rightarrow

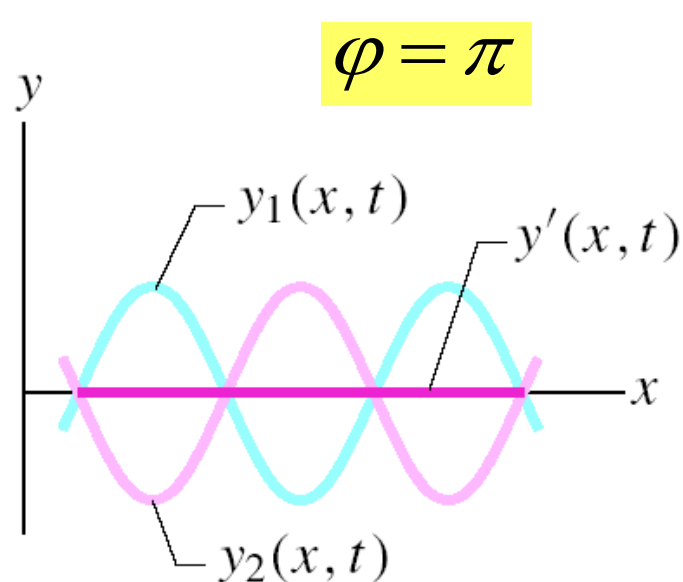
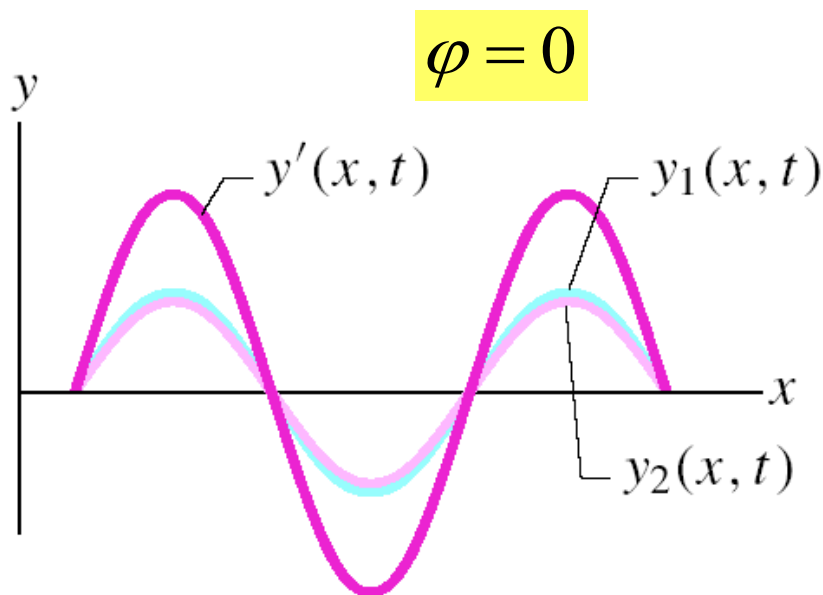
$$\Delta L = (2m+1)\frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Interference vln

Tabulka 17.1 Fázové rozdíly a jim odpovídající druh interference^a

FÁZOVÝ ROZDÍL VE STUPNÍCH	FÁZOVÝ ROZDÍL V RADIÁNECH	DRÁHOVÝ ROZDÍL VE VLN. DÉLKÁCH	AMPLITUDA VÝSLEDNÉ VLNY	DRUH INTERFERENCE
0	0	0	$2y_m$	úplně konstruktivní
120	$2\pi/3$	0,33	y_m	částečná
180	π	0,50	0	úplně destruktivní
240	$4\pi/3$	0,67	y_m	částečná
360	2π	1,00	$2y_m$	úplně konstruktivní
865	15,1	2,40	$0,60y_m$	částečná

$$y'(x, t) = [2y_m \cos(\varphi/2)] \sin(kx - \omega t + \varphi/2)$$





2 identické harmonické vlny postupují souhlasným směrem

KONTROLA 4: Vyjděte ze znění př. 17.5 a uvažte následující čtyři dráhové rozdíly mezi oběma výchozími vlnami: $0,20\lambda$, $0,45\lambda$, $0,60\lambda$ a $0,80\lambda$. Uspořádejte je sestupně podle velikosti amplitudy výsledné vlny.

Návod: Platí $\Delta L = \lambda \Rightarrow \varphi = 2\pi$

1) $\Delta L = 0,2\lambda \Rightarrow \varphi = 0,2 \cdot 2\pi = 0,4\pi$

2) $\varphi = 0,45 \cdot 2\pi = 0,9\pi$

3) $\varphi = 0,6 \cdot 2\pi = 1,2\pi$

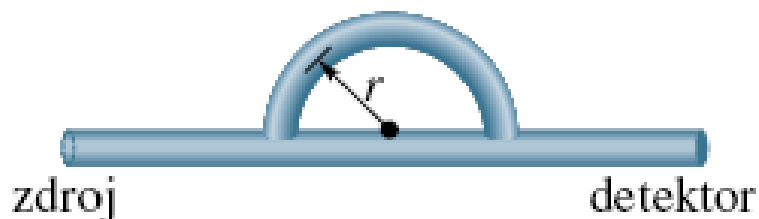
4) $\varphi = 0,8 \cdot 2\pi = 1,6\pi$

Amplituda výsledné vlny : $y_m' = y_m \cos \frac{\varphi}{2}$

$$\cos \frac{0,4\pi}{2} = \cos \frac{1,6\pi}{2} > \cos \frac{1,2\pi}{2} > \cos \frac{0,9\pi}{2}$$

HRW 18.24

24Ú. Zvuková vlna o vlnové délce 40,0 cm vstupuje do trubice nakreslené na obr. 18.33 koncem, na němž je připojen zdroj. Jaký musí být nejmenší poloměr r , aby detektor na druhém konci zachytil nejslabší signál?



Návod: Na kruhové části trubice dojde k dráhovému rozdílu $\Delta L = \lambda/2$ vůči signálu postupujícímu rovnou částí trubice \rightarrow destruktivní interference \rightarrow detektor zachytí nejslabší signál

$$r = 17,5 \text{ cm}$$

Interference vln

POZNÁMKA !!

Aby **interference** vlnění byla **pozorovatelná**, je nutné, aby **rozdíl fází** interferujících vlnění byl v každém bodě interferenčního pole **konstantní**, na čase nezávislý. **Vlnění**, která tuto podmínku splňují, nazýváme **koherentní**.

Poznámka 2:

Dojde-li k **interferenci** aniž dojde k **odchylce od přímočarého šíření** vlnění (v homogenním a izotropním prostředí), pak takový jev nazýváme **jevem ryze interferenčním** (světlo – interference na tenké vrstvě)

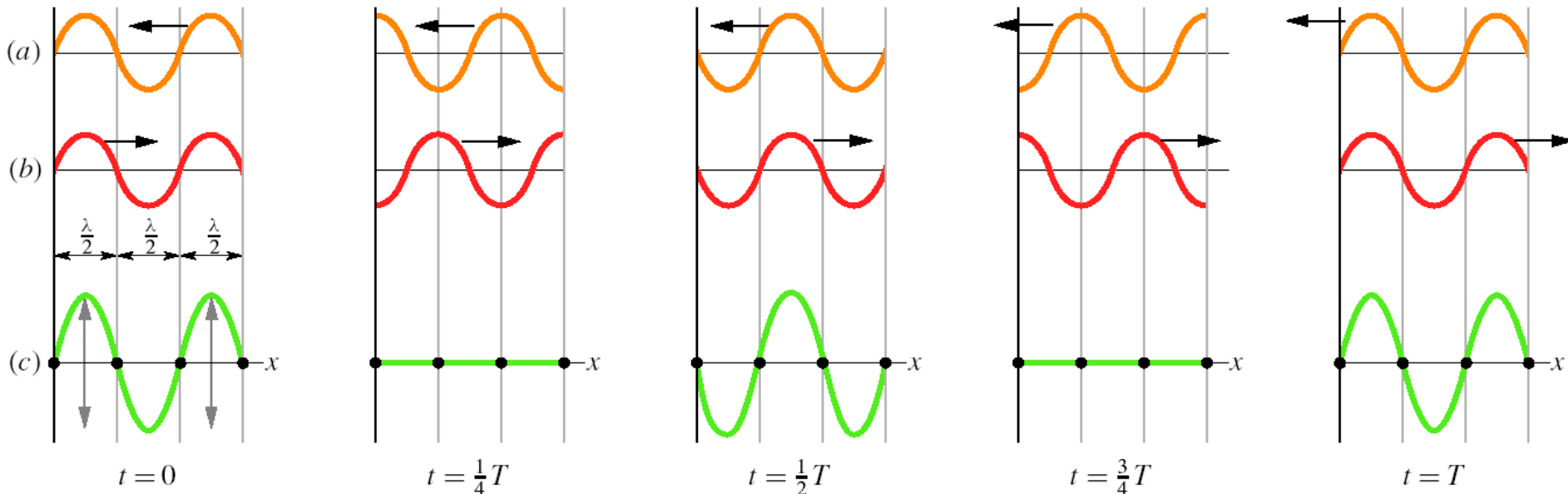
Dojde –li (v prostředí homogenním a izotropním) k **interferenci v prostoru přímočarému šíření vlnění nepřístupném** (v tzv. geometrickém stínu), nazýváme takový jev **jevem ohybovým (difrakčním)** (světlo – průchod štěrbinou).

Stojaté vlny

Jestliže dvě sinusové vlny o stejné amplitudě a se stejnou vlnovou délkou postupují v napnuté struně *opačným* směrem, vzniká jejich interferencí stojatá vlna.

$$y'(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = \\ = y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx + \omega t)$$

$$y'(x, t) = (2y_m \sin kx) \cos \omega t$$



Stojaté vlny

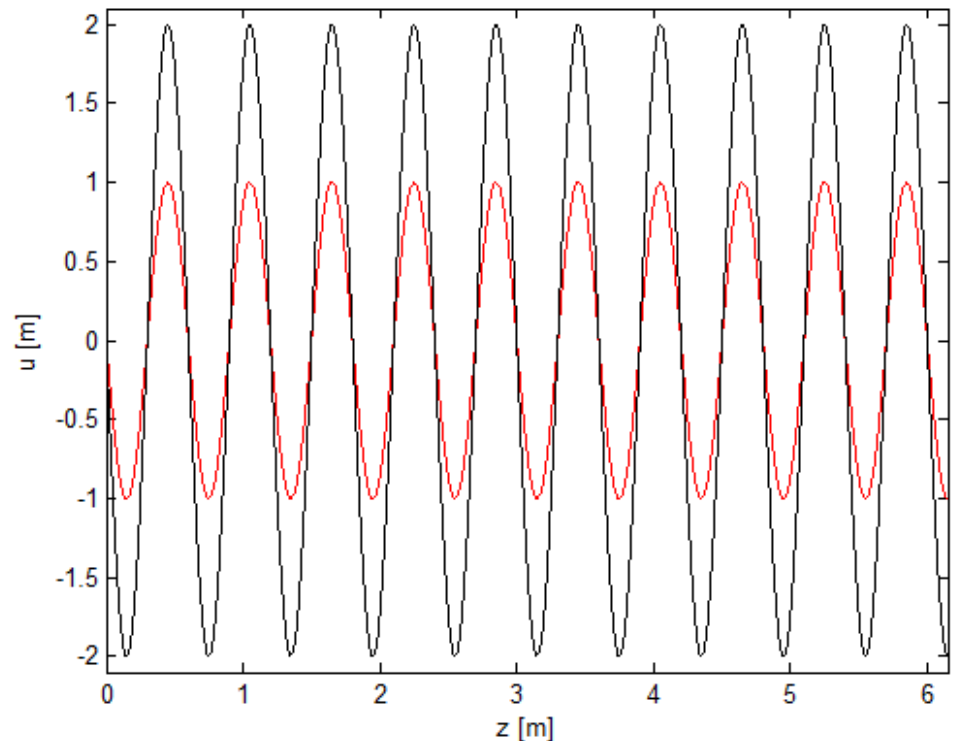
Jestliže dvě sinusové vlny o stejné amplitudě a se stejnou vlnovou délkou postupují v napnuté struně *opačným* směrem, vzniká jejich interferencí stojatá vlna.

$$y'(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = \\ = y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx + \omega t)$$

$$y'(x, t) = (2y_m \sin kx) \cos \omega t$$

Amplituda výchylky
bodu se souřadnicí x

Všechny body prostředí kmitají
se stejnou úhlovou frekvencí ω



Stojaté vlny

Odvození:

Užijeme

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\begin{aligned} y'(x, t) &= y_1(x, t) + y_2(x, t) = \\ &= \underbrace{y_m \sin(kx - \omega t)}_{\longrightarrow} + \underbrace{y_m \sin(kx + \omega t)}_{\longleftarrow} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &2 \sin \frac{kx - \omega t + kx + \omega t}{2} \cos \frac{kx - \omega t - kx - \omega t}{2} = \\ &= 2 \sin kx \cos(-\omega t) = 2 \sin kx \cos \omega t \end{aligned}$$

Stojaté vlny

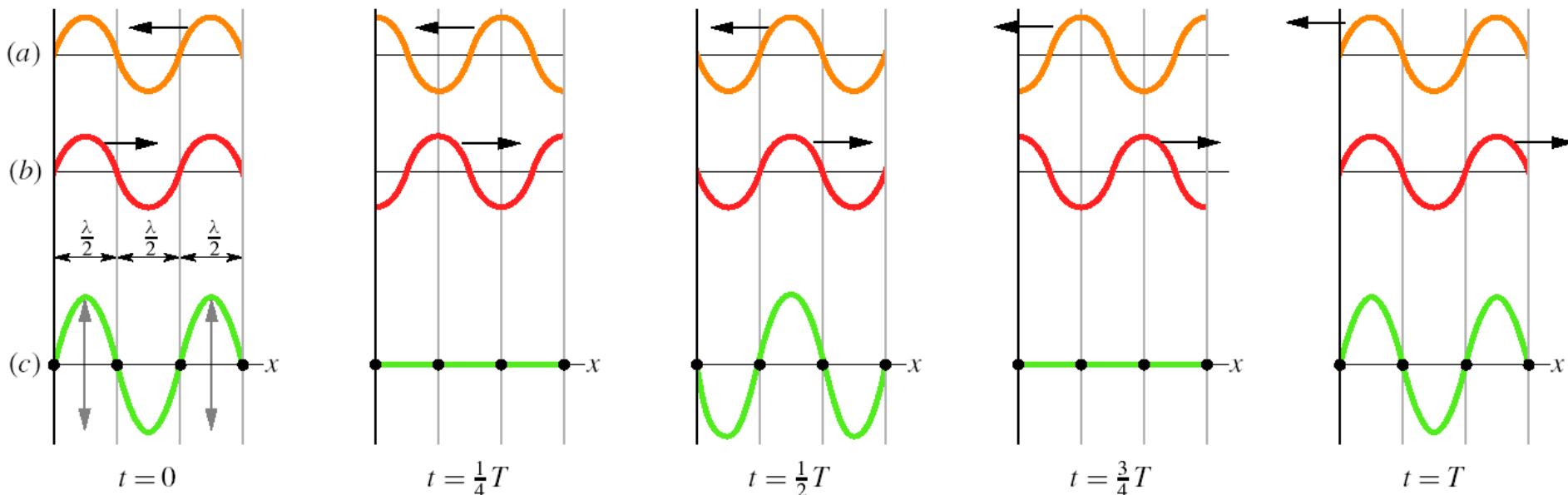
Všechny **částice** prostředí **kmitají se stejnou fází** ωt

ale **s různou amplitudou výchylky**, která závisí na x -ové souřadnici kmitající částice

$$A(x) = 2y_m \sin kx$$

$\sin(kx) = 0 \rightarrow$ uzly

$\sin(kx) = 1 \rightarrow$ kmitny



Stojaté vlny

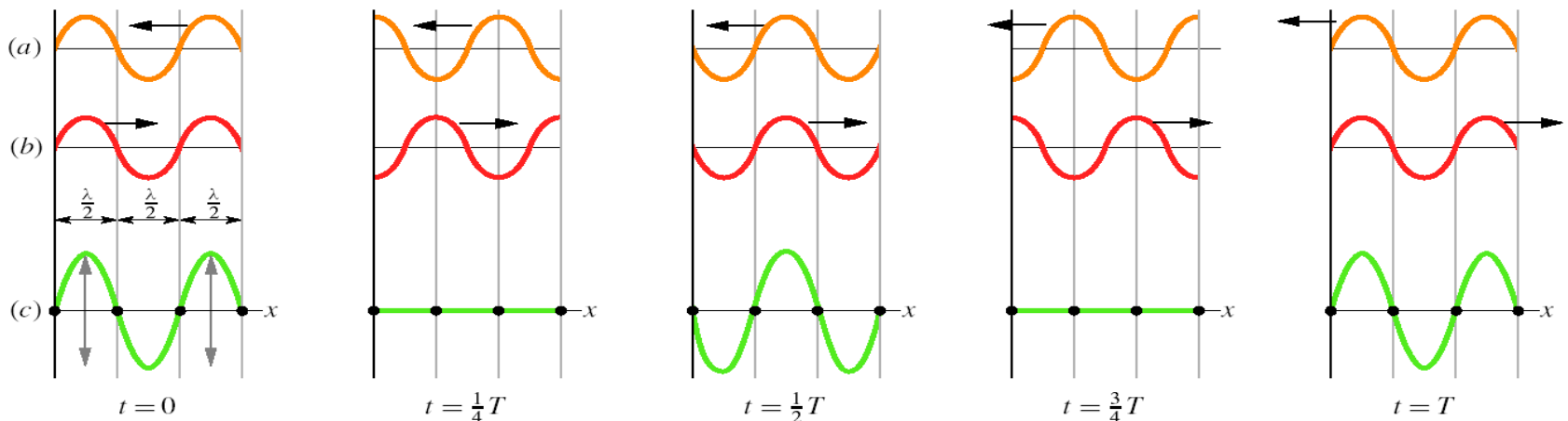
Místa se stále nulovou výchylkou – **uzly**. Jejich souřadnice x_n určíme následovně:

$$kx = n\pi \Rightarrow x = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\pi}{\frac{2\pi}{\lambda}} \rightarrow x_n = n \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, 3) \quad \text{uzly}$$

$$kx = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \Rightarrow x = \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{k} = \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{\frac{2\pi}{\lambda}} =$$

$$= \frac{2\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{2\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{(2n+1)\pi}{\frac{4\pi}{\lambda}} \rightarrow x_n = (2n+1)\frac{\lambda}{4} \quad \text{kmitny}$$

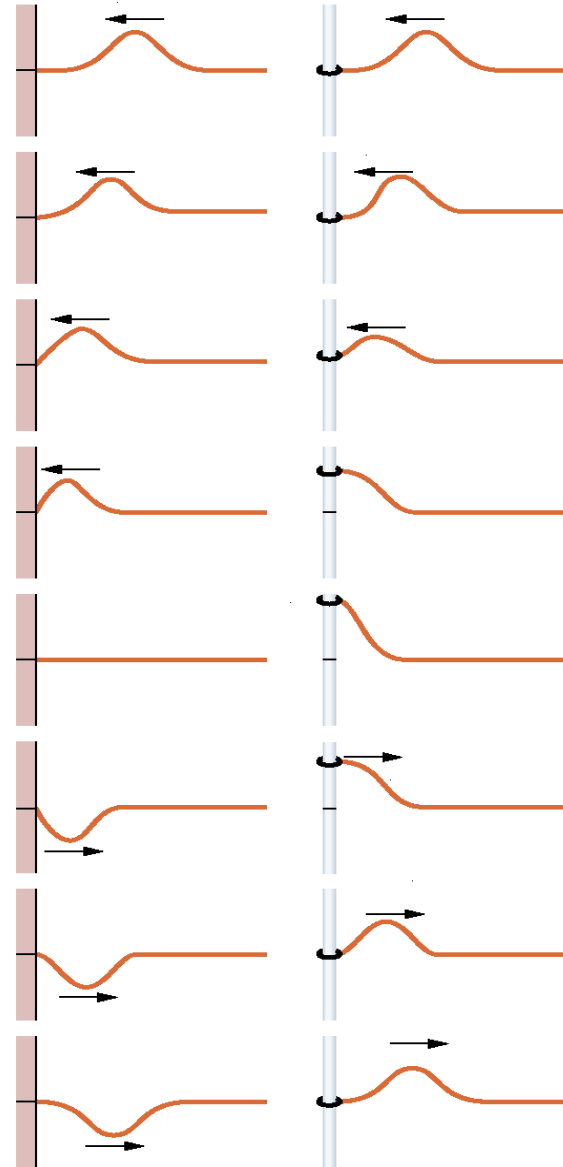
Místa, která kmitají s maximální amplitudou $2y_m$ - **kmitny**



Stojaté vlny

Vznik stojaté vlny odrazem

- pevný konec - **uzel** -
odražená vlna má opačnou fázi
- volný konec - **kmitna** -
odražená vlna má stejnou fázi





KONTROLA 5: Uvažme interferenci dvou vln stejné amplitudy a vlnové délky. Výsledná vlna má rovnici (1) $y'(x, t) = 4 \sin(5x - 4t)$, (2) $y'(x, t) = 4 \sin(5x) \cos(4t)$ a (3) $y'(x, t) = 4 \sin(5x + 4t)$. Která z těchto rovnic popisuje výslednou vlnu v situaci, kdy se výchozí vlny šíří (a) obě ve směru osy x , (b) obě proti směru osy x a (c) v opačných směrech?

HRW 17.58

58Ú. Kmitání struny je popsáno rovnicí

$$y' = (0,50 \text{ cm}) \sin \left[\left(\frac{\pi}{3} \text{ cm}^{-1} \right) x \right] \cos \left[(40\pi \text{ s}^{-1}) t \right].$$

(a) Uvedené kmitání vzniklo superpozicí dvou stejných vln (až na směr šíření). Jaká byla jejich amplituda a rychlost? (b) Jaká je vzdálenost mezi sousedními uzly stojaté vlny? (c) Jak velkou příčnou rychlost má částice struny o souřadnici $x = 1,5 \text{ cm}$ v čase $t = \frac{9}{8} \text{ s}$?

a) $y_m = 0,25 \text{ cm}$; $v = 1,2 \text{ m/s}$; b) $\Delta x = 3 \text{ cm}$; c) $v_p = 0 \text{ m/s}$

Návod: a) odvodit obecnou rovnici pro stojatou vlnu pro $y' = y_1 + y_2$, kde $y_1 = y_m \sin(kx - \omega t)$ a $y_2 = y_m \sin(kx + \omega t)$. Z toho $2 y_m = 0,5 \text{ cm}$.

Fázová rychlost vlny je $v = \omega/k$.

b) Pro uzly platí: $\sin(kx) = 0 \rightarrow kx = m\pi$, řešíme pro $m = 0$ a $m = 1 \rightarrow \Delta x$

c) Příčná rychlost je změna výchylky y' v čase $\frac{\partial y'}{\partial t}$. Vyjádříme obecnou rovnici a dosadíme hodnoty x a t ze zadání.

Skládání kmitů - rázy

Prostředím postupují současně dvě zvukové vlny, které mají různou frekvenci f_1 a f_2 . V místě pozorovatele (detektoru) se skládají výchylky/kmity – důsledek dvou postupných vln, které dospěly do bodu se souřadnicí x .

Hledáme výslednou výchylku:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

$$y_1(t) = y_m \sin(\omega_1 t)$$

$$y_2(t) = y_m \sin(\omega_2 t)$$

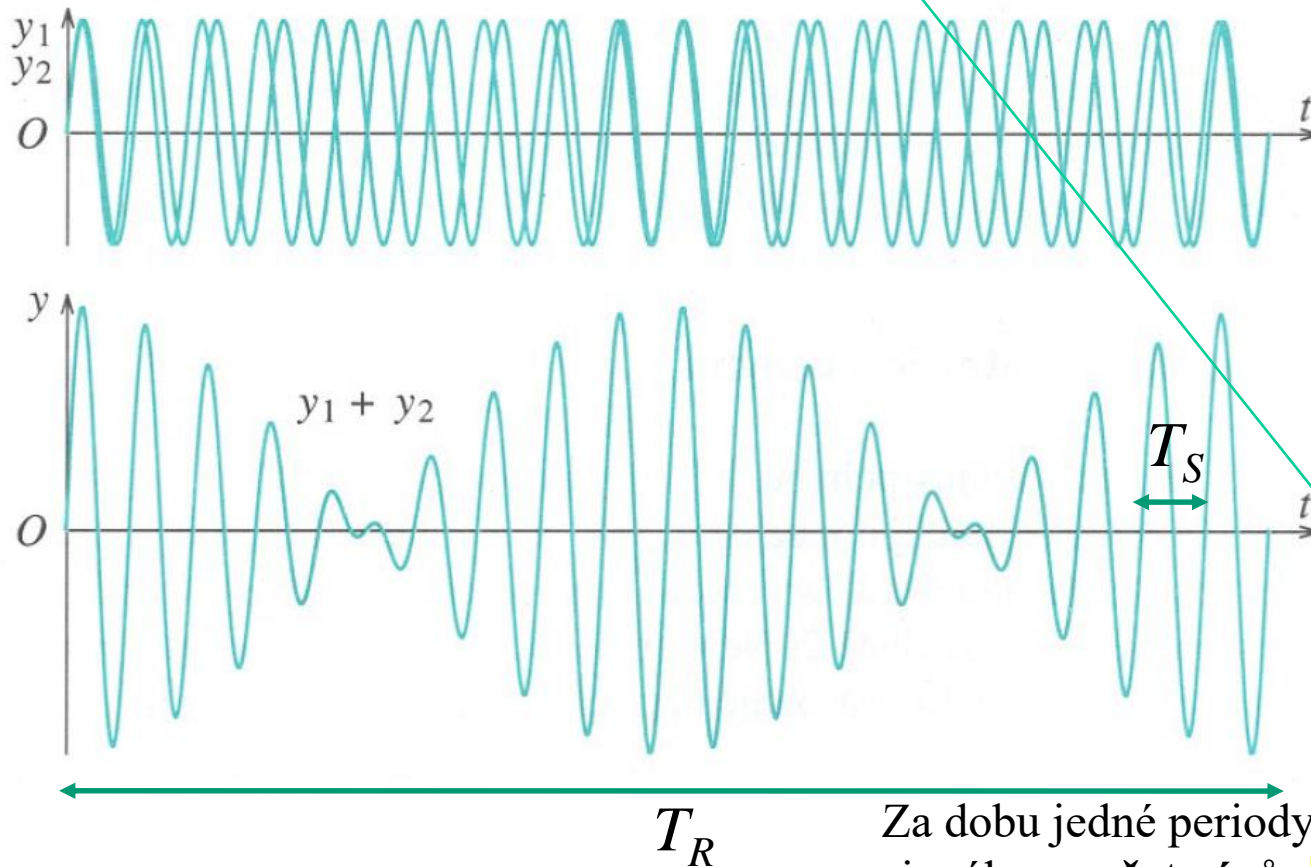
V případě, že frekvence f_1 a f_2 jsou různé, ale blízké, tj. $f_1 \neq f_2$ ale $f_1 \rightarrow f_2$ (mají „skoro“ stejnou hodnotu, neliší se o víc než 20 Hz) může dojít ke vzniku **rázů** – slyšíme **zesilování a zeslabování výsledného signálu**.

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = y_m (\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t))$$

$$y(t) = 2y_m \cos\left(\underbrace{\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t}_{\omega_R}\right) \sin\left(\underbrace{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t}_{\omega_S}\right)$$

Skládání kmitů - rázy

$$y(t) = 2y_m \cos\left(\underbrace{\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t}_{\omega_R}\right) \sin\left(\underbrace{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t}_{\omega_S}\right)$$



$$\omega_1 = 2\pi f_1$$

$$\omega_2 = 2\pi f_2$$

Frekvence výsledného signálu f_S :

$$\omega_S = (\omega_1 + \omega_2)/2$$

$$f_S = (f_1 + f_2)/2 = 1/T_S$$

Amplituda výsledného signálu kolísá s frekvencí f_R :

$$\omega_R = (\omega_1 - \omega_2)/2$$

$$f_R = (f_1 - f_2)/2 = 1/T_R$$

Za dobu jedné periody T_R slyšíme 2x nejsilnější signál → počet rázů:

$$N = 2f_R = (f_1 - f_2)$$

Princip superpozice

Fourierova transformace



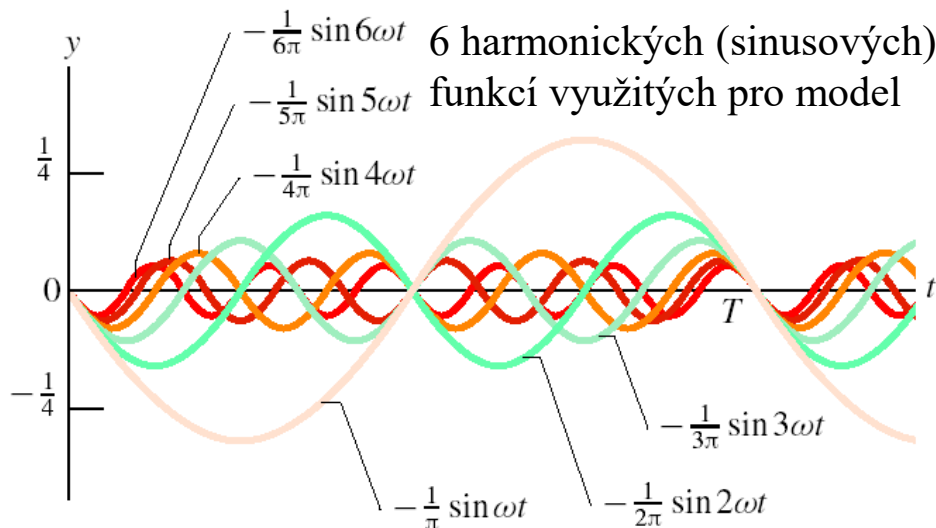
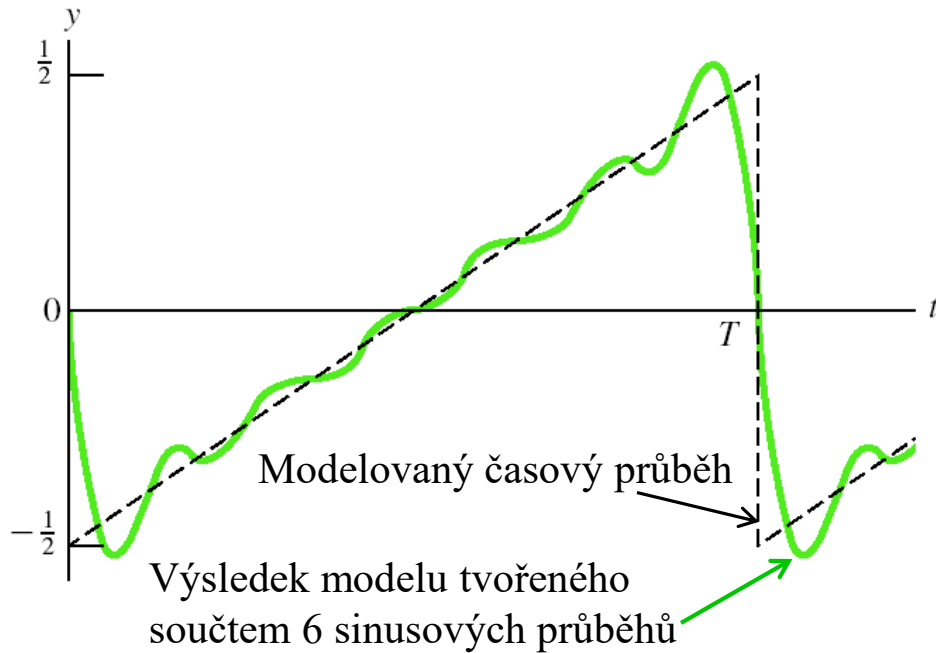
Joseph Fourier (1768-1830)

Francouzský matematik, který přišel na to, že jakýkoli impuls může být složen ze sinusových a kosinusových impulsů. Položil tak základy teorie trigonometrických řad. Nezanedbatelný byl také jeho přínos k teorii funkcí reálné proměnné. Studoval podrobně problémy matematické fyziky. V roce 1822 vytvořil matematickou teorii, která řešila diferenciální rovnice. *Théorie Analytique de la Chaleur* (Analytic Theory of Heat).

Fourier věřil, že mu při nějaké nemoci pomůže bylinkový zábal a takto zabalen spadl dolů ze schodů a zabil se...

Princip superpozice

Fourierova analýza



Vlnu libovolného tvaru lze vyjádřit ve tvaru součtu velkého počtu sinusových vln.

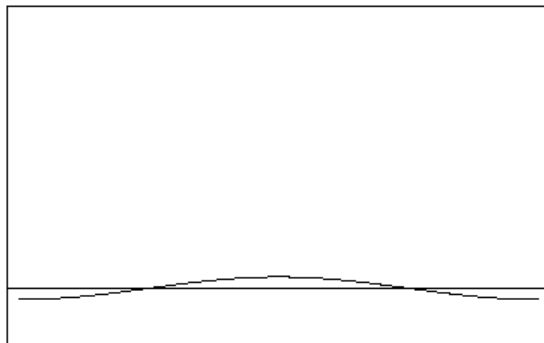
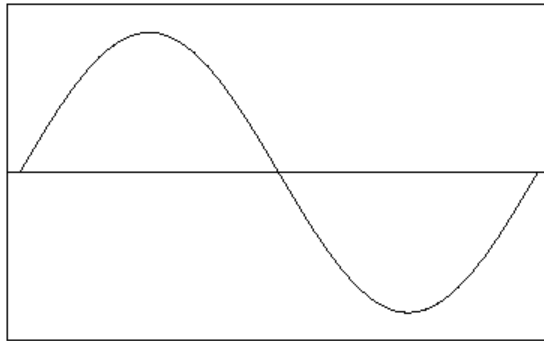
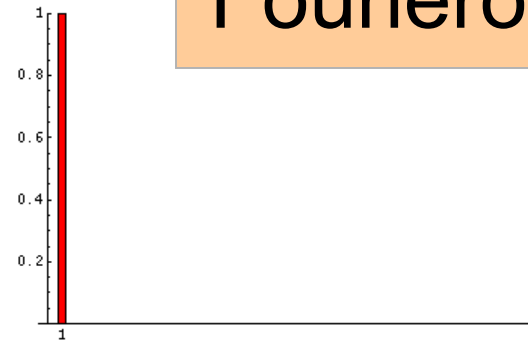
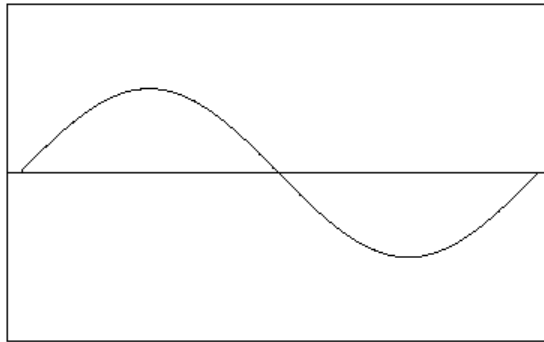
$$\omega = 2\pi/T$$

$$y = -\frac{1}{\pi} \sum_n \frac{1}{n} \sin(n\omega t)$$

Potřebujeme najít vhodnou kombinaci jejich amplitud a frekvencí. Potom dovedeme namodelovat libovolný časový průběh. Čím větší bude počet harmonických funkcí v modelu, tím přesnější výsledek dostaneme.

Princip superpozice

Fourierova analýza



Princip superpozice

Fourierova řada a transformace

řada: na konečném intervalu (sumace)

transformace: v neomezeném prostředí (integrace)

Fourierova řada je složení konečného pulsu ze sinů a kosinů

$$f(t) = \sum_n c_n e^{i\omega_n t}$$

$$f(x) = \sum_n c_n e^{ik_n x}$$

Mocninné řady funkcí e , \sin , $\cos \Rightarrow$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Fourierova transformace je složení obecné vlny z rovinných vln

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(k) e^{ikx} dk$$

$$\psi(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(k) e^{i(kx - \omega t)} dk d\omega$$

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} d^3 k d\omega$$

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(\mathbf{k}) e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k})t]} d^3 k$$

Dopplerův jev

- **Dopplerův jev**
- **využití v praxi**
- **rázová vlna**



Christian Andreas Doppler (1803-1853)

Rakouský matematik a fyzik, část svého krátkého života strávil jako profesor ČVUT v Praze, později přednášel na Vídeňské polytechnice. Ve známost vešel především **objevem změny frekvence vlnění při vzájemném pohybu zdroje a pozorovatele** (Dopplerův princip). Publikoval také práce o elektřině a magnetismu, zabýval se časovou proměnností magnetické deklinace, napsal několik článků z optiky a astronomie.

Dopplerův jev

zdroj i pozorovatel v klidu



$$f = f_0 = \frac{1}{T} = \frac{v}{\lambda}$$

f – detekovaná frekvence

f_0 – frekvence zdroje

v – rychlost zvuku

Dopplerův jev

pozorovatel se hýbe



f – detekovaná frekvence
 f_0 – frekvence zdroje
 v – rychlost zvuku
 v_D – rychlost detektoru

$$f = \frac{v \pm v_D}{\lambda}$$

\Rightarrow

$$f = f_0 \frac{v \pm v_D}{v}$$

Dopplerův jev

zdroj se hýbe



f – detekovaná frekvence

f_0 – frekvence zdroje

v – rychlost zvuku

v_z – rychlost zdroje

$$f = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{(v \mp v_z)T} \Rightarrow f = f_0 \frac{v}{v \mp v_z}$$

Dopplerův jev

zdroj i pozorovatel se hýbe



f – detekovaná frekvence

f_0 – frekvence zdroje

v – rychlost zvuku

v_D – rychlost detektoru

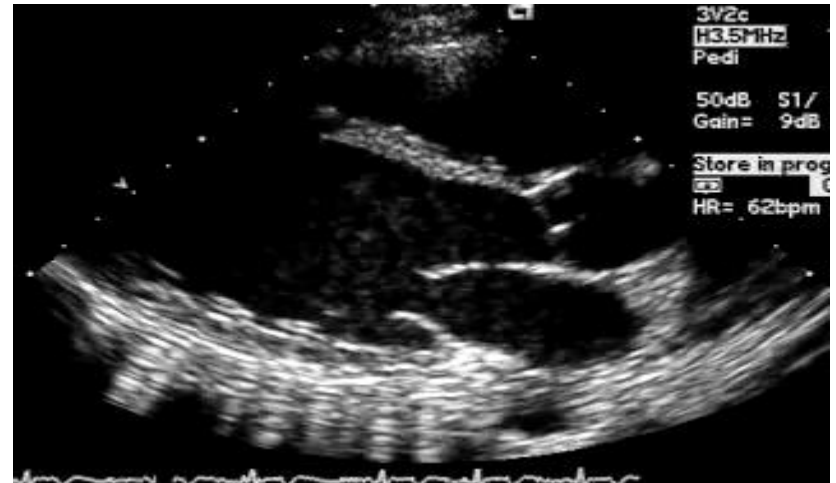
v_z – rychlost zdroje

$$f = \frac{v \pm v_D}{(v \mp v_z)T} \Rightarrow f = f_0 \frac{v \pm v_D}{v \mp v_z}$$

Dopplerův jev

využití v praxi

- měření rychlosti radarem
- echokardiografie
- určování vzdáleností v astronomii

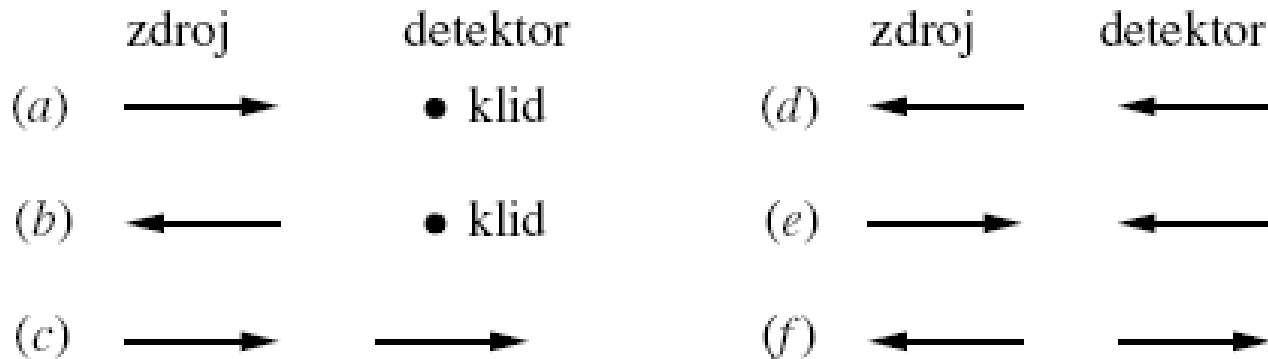


University of Yale





KONTROLA 6: Obrázek znázorňuje pohyb detektoru a zdroje zvuku pro šest situací v klidném vzduchu.



Pro každou situaci rozhodněte, jestli bude změřena frekvence vyšší, nebo nižší než vyslaná frekvence, nebo zda to nemůžeme určit bez dalších informací.

HRW II – 18.79 Ú

Siréna vydávající zvuk frekvence 1 000 Hz se pohybuje směrem od nás ke stěně skalního útesu rychlostí 10 m.s⁻¹. Rychlost zvuku ve vzduchu je 330 m.s⁻¹.

- Jaká je frekvence zvuku, který slyšíme přímo od sirény?
- Jaká je frekvence zvuku odraženého od útesu?
- Jaká je frekvence záznějů (rázů)? Může lidské ucho tyto zázněje rozeznat (jejich frekvence musí být nižší než 20 Hz)?

Návod k řešení:

- a) Zdroj se pohybuje směrem od nás, my jsme v klidu, výsledná frekvence f_1 :

$$f_1 = f_0 \frac{v}{v + v_z} = 1000 \frac{330}{340} \text{ Hz} = 971 \text{ Hz}$$

- b) Siréna = zdroj se pohybuje směrem k útesu → na útes dopadají vlny s frekvencí f_2 (přibližující se zdroj). Útes se nehýbe → odráží vlny s frekvencí f_2 beze změny.

$$f_2 = f_0 \frac{v}{v - v_z} = 1000 \frac{330}{320} \text{ Hz} = 1031 \text{ Hz}$$

- c) Zázněje vznikají, pokud k nám dospějí dvě vlny s různou, ale blízkou frekvencí. Projevují se periodickým zesilováním/zeslabováním signálu. Počet záznějů (odvozeno v rámci PC) vypočítáme jako rozdíl frekvencí obou dopadajících vln. Lidské ucho registruje max. 20 zesílení/zeslabení za 1 sekundu. Vyšší počet změn už není schopno vyhodnotit. V našem případě:

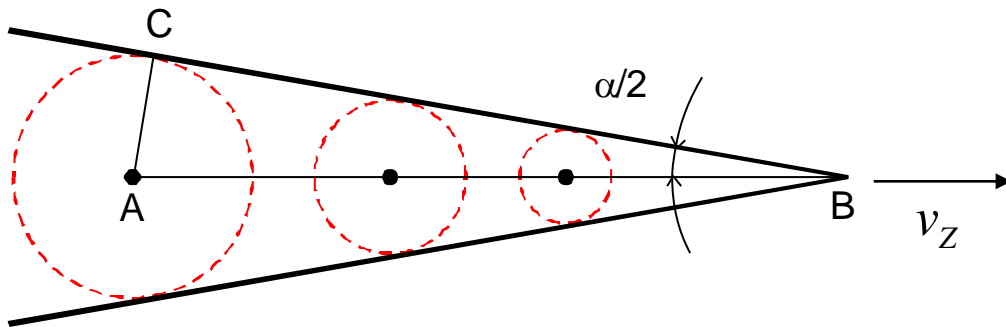
$$N = |f_2 - f_1| = 60 \text{ Hz} \rightarrow \text{nelze rozeznat}$$

Dopplerův jev

Rázová vlna

v .. rychlost zvuku
 v_Z .. rychlost zdroje

Machův kužel



$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{AC}{AB} = \frac{vt}{v_Z t} = \frac{v}{v_Z}$$

(Machův úhel)

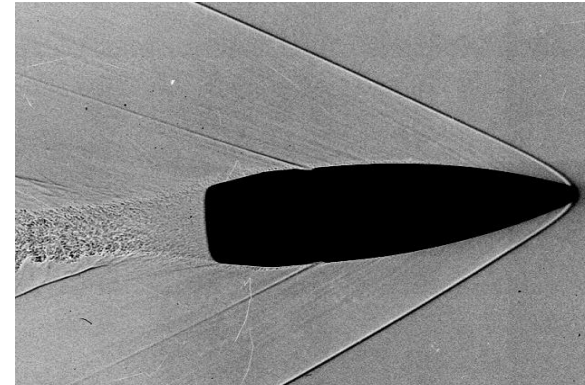
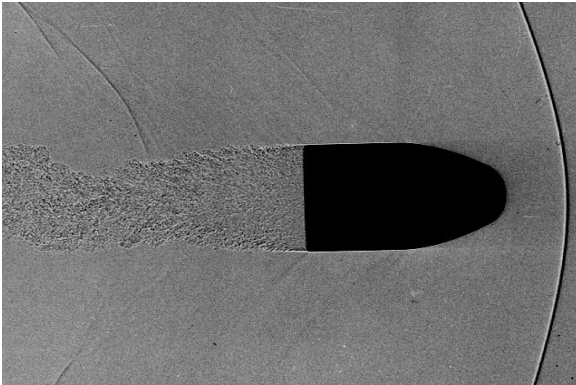
$$v_z = v$$

$$v_z > v$$

Dopplerův jev

Rázová vlna

Podzvuková a nadzvuková rychlost střely.



$$\frac{v_z}{v} = \text{Machovo číslo}$$



Stíhačka F/A-18C Hornet při překročení zvukové bariery

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:FA-8_Hornet_breaking_sound_barrier_%287_July_1999%29.jpg