Vlny - 4

Rychlost šíření vlny na struně a v plynu.
Vlastní kmity na struně a v trubici. Zvukové vlny.
Princip strunných a dechových nástrojů.

Rychlost šíření vln na struně a v plynu

Rychlost šíření mechanické vlny je závislá na **elastických** (pružnost) a **setrvačných** vlastnostech prostředí

Struna:

Napětí struny – charakterizuje pružnost systému

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \quad \text{(rychlost vlny na struně)},$$

$[\tau] = \mathrm{N}$

$[\mu] = \mathrm{kg\ m^{-1}}$

Lineární hustota $\mu = m/L$ – charakterizuje setrvačnost systému

Plyn - vzduch (případně pevná látka):

$$v = \sqrt{\frac{K}{\varrho}} \quad \text{(rychlost zvuku)}$$

$$K = -\frac{\Delta p}{\Delta V / V} \quad \text{(definice } K\text{)}$$

$[K] = \mathrm{Pa}$

modul objemové pružnosti

ρ ..objemová hustota; $[\rho] = \mathrm{kg\ m^{-3}}$

Vlastní kmity

Stojaté vlny v ohraničeném prostředí (upevněná struna, vzduchový sloupec v píšťale, membrána bubnu,…) se vytvoří pouze pro určité frekvence - **rezonance**

Vlastní kmity struny délky L – vznikne stojatá vlna popsaná rovnicí

$$y'(x,t) = (2y_m \sin kx)\cos \omega t$$

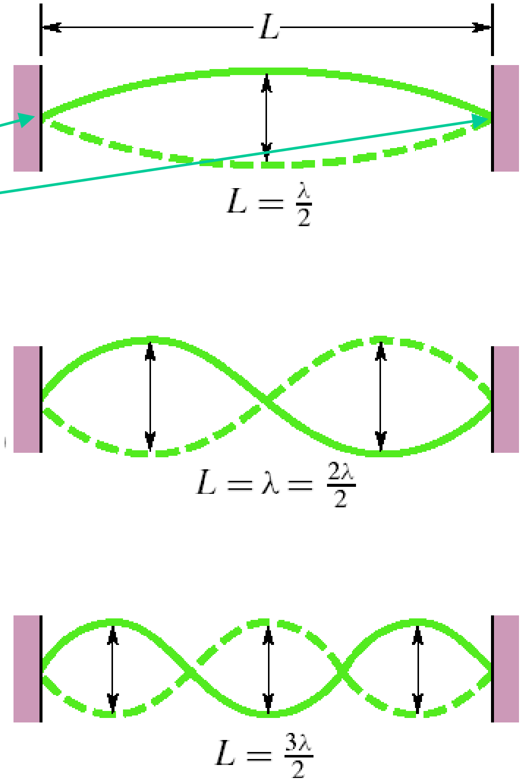
Amplituda kmitů závisí na souřadnici:

$$\boxed{A(x) = 2y_m \sin kx}$$

Stále nulová výchylka → uzly → sin (kx) = 0

$$kx = n\pi \Rightarrow x_n = n\frac{\lambda}{2}$$

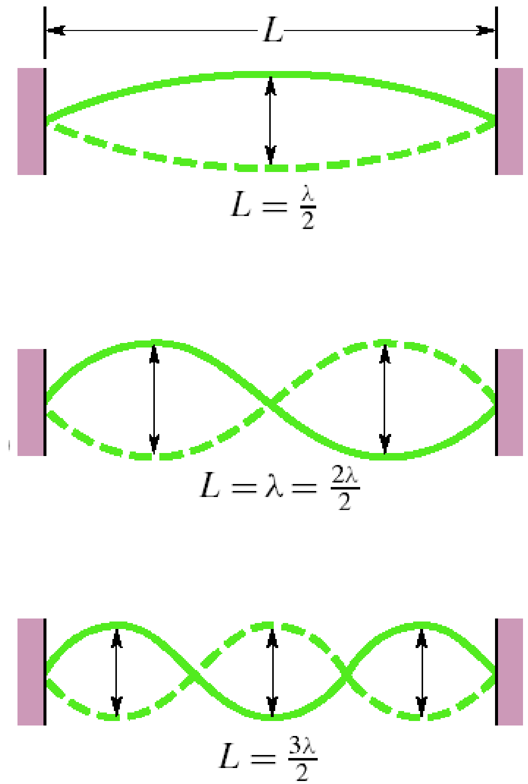
(n = 1, 2, 3..) vzdálenost uzlů



Vlastní kmity

Stojaté vlny v ohraničeném prostředí (upevněná struna, vzduchový sloupec v píšťale, membrána bubnu,…) se vytvoří pouze pro určité frekvence - **rezonance**

U struny délky L se vytvoří stojatá vlna s největší vlnovou délkou $\lambda = 2L \rightarrow$ **vlastní vlnové délky**:



$$L = n\frac{\lambda_n}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda_n = \frac{2L}{n}}$$

Vlastní (harmonické) frekvence:

$$\boxed{f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{2L}, n = 1, 2, 3, ..}$$

$n = 1$ .. první (základní) harmonická frekvence

$n = 2, 3$ … vyšší harmonické frekvence příslušné dané struně

HRW 17.45

45C. Ve struně vyvoláme jisté napětí τ_a a vybudíme v ní třetí harmonický kmit. Jemu odpovídá vlastní frekvence f_3 a vlnová délka λ_3. Poté zvýšíme napětí ve struně na hodnotu $\tau_b = 4\tau_a$ a opět v ní vyvoláme třetí harmonický kmit. (a) Vyjádřete novou hodnotu třetí vlastní frekvence pomocí původní hodnoty f_3. (b) Vyjádřete novou vlnovou délku odpovídající stojaté vlny pomocí původní vlnové délky λ_3.

a) $f_3' = 2 f_3$;

b) b) $\lambda_3' = \lambda_3$

Návod: délka struny se nemění → nemění se ani vlnová délka pro třetí vlastní frekvenci.

$L = n\dfrac{\lambda_n}{2}$, kde $n = 3$. Potom vlnová délka pro f_3 je $\lambda_3 = \dfrac{2}{3}L$ a $v = \sqrt{\dfrac{\tau_a}{\mu}}$;

potom $f_3 = \dfrac{v}{\lambda_3}$; $\tau_b = 4\tau_a \Rightarrow$ $v' = \sqrt{\dfrac{\tau_b}{\mu}} = 2\sqrt{\dfrac{\tau_a}{\mu}} \Rightarrow f_3' = \dfrac{v'}{\lambda_3'}$, kde $\lambda_3' = \lambda_3$

Vlastní kmity

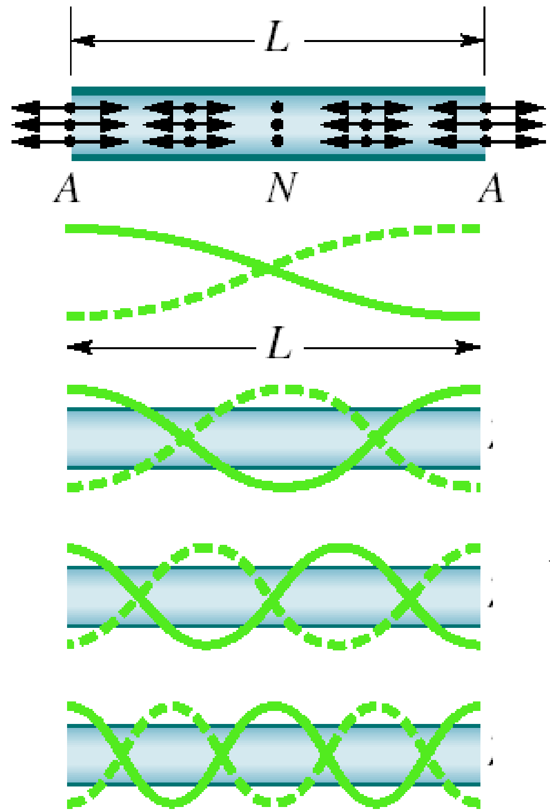
píšťal

Dva konce volné:
všechny harmonické frekvence

$$L = n\frac{\lambda_n}{2} \to \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$$n = 1; 2; 3; ..$$

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{2L}$$



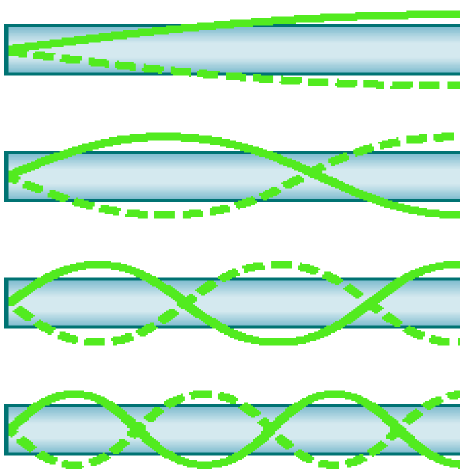
Násobky **poloviny** vlnové délky

Jeden konec volný:
pouze **liché harmonické frekvence**

$$L = n\frac{\lambda_n}{4} \to \lambda_n = \frac{4L}{n}$$

$$n = 1; 3; 5; ..$$

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{4L}$$



Liché násobky **čtvrtiny** vlnové délky

Př. HRW 18.50

Varhanní píšťala A je na obou koncích otevřena a má základní frekvenci 300 Hz. Píšťala B je otevřena na jednom konci a její třetí harmonická frekvence je stejná jako druhá harmonická píšťaly A. Jaká je délka (a) píšťaly A a (b) píšťaly B?

A:

$$L = n\frac{\lambda_n}{2} \rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$$n = 1;\ 2;\ 3;\ ..$$

$$\boxed{f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{2L}}$$

B:

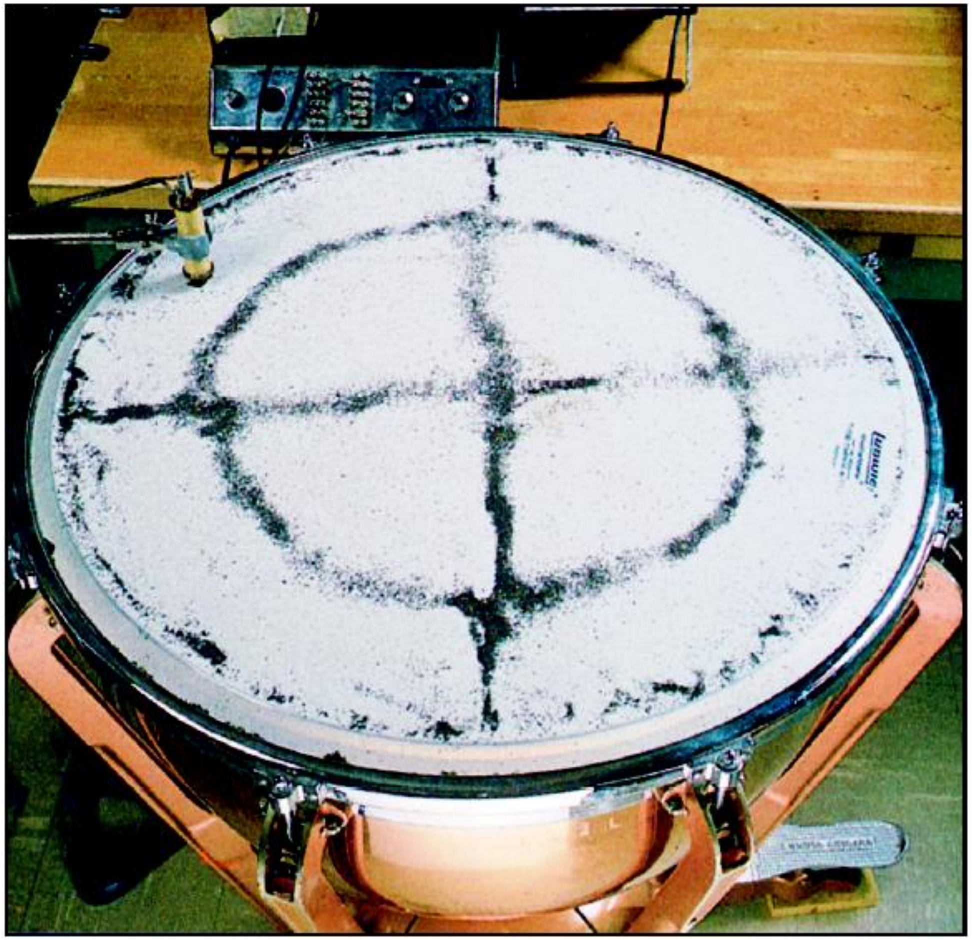
$$L = n\frac{\lambda_n}{4} \rightarrow \lambda_n = \frac{4L}{n}$$

$$n = 1;\ 3;\ 5;\ ..$$

$$\boxed{f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{4L}}$$

Vlastní kmity

Rezonance (vlastní kmity) na membráně (dvojrozměrné těleso)



Vznikají tzv. Chladniho obrazce

Zvukové vlnění

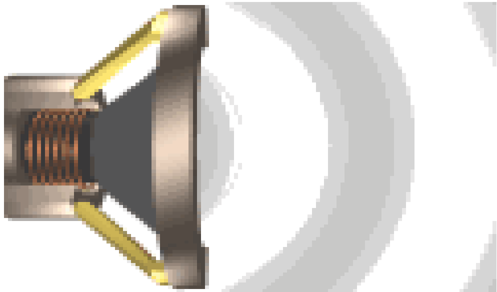
zvuk ve vzduchu:
podélná vlna s rychlostí

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

zvuk v krystalech:
směsice podélných a příčných vln. Energie se mění skokem, který si můžeme představit jako kvazičástici, tzv. fonon.

infrazvuk:
zvuk nezaznamenatelný sluchem s frekvencí nižší než 20 Hz. Přirozeně vzniká při pádech lavin, zemětřesení, sopečné činnosti a průletu meteoru.

magnetoakustická vlna:
silně anizotropní komplex zvukových vln šířících se plazmatem v přítomnosti magnetického pole. Skládá se z Alfvénovy vlny, rychlé a pomalé vlny.

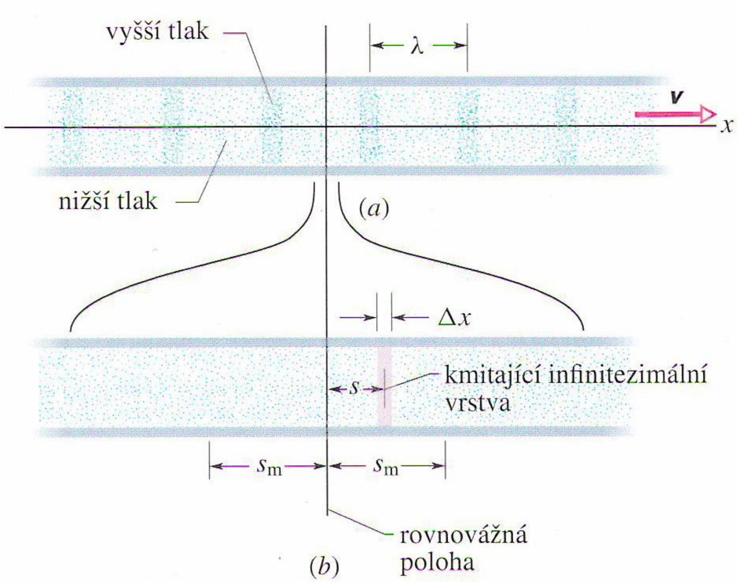


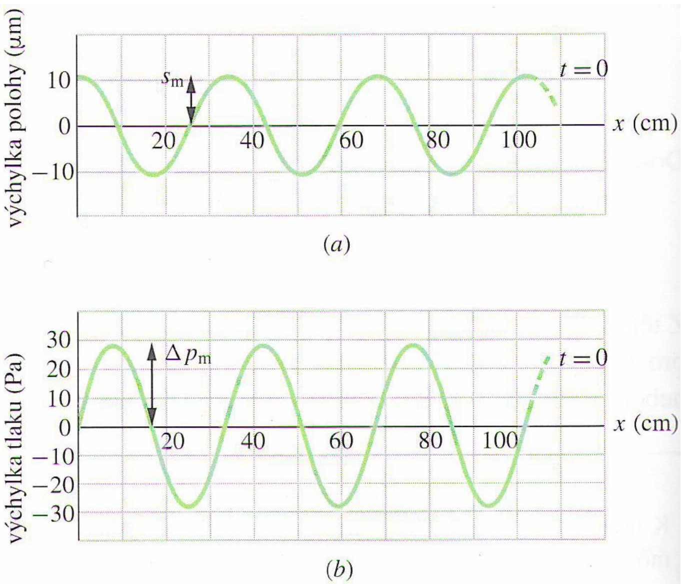
ultrazvuk:
zvuk nezaznamenatelný sluchem s frekvencí vyšší než 20 kHz. Využitelný v lékařské diagnostice a k čištění nástrojů, čoček, klenotů...

seismická vlna:
směsice podélných a příčných vln šířících se jak po povrchu (S a P vlna) tak v hloubce (Rayleighova a Loveho vlna).

Zvukové vlnění

Zvuková vlna se ve vzduchu šíří jako **podélná vlna**. Skládá se z **pohybujících se** a periodicky se opakujících **oblastí s nízkým a vysokým tlakem**.
Změna tlaku Δp je popsána harmonickou funkcí **s amplitudou** $\boldsymbol{\Delta p_m}$.
Amplituda výchylek $\boldsymbol{s_m}$ jednotlivých bodů je o hodně menší než vlnová délka.
Kladná hodnota výchylky tlaku odpovídá zmenšení objemu (zhuštění) vrstvy.
Záporná hodnota výchylky tlaku odpovídá zvětšení objemu (zředění) vrstvy
Platí vztah mezi amplitudou tlaku a amplitudou výchylky:
$\boldsymbol{\Delta p_m = (v\varrho\omega) s_m}$, kde v je fázová rychlost vlny; ρ je hustota prostředí, ω je úhlová frekvence vlny





Zvukové vlnění

Zdroje hudebního zvuku

- Kmity strun (kytary, housle, klavír, cimbál,…)
- Kmity membrán (buben,…)
- Kmity vzduchového sloupce (flétna, hoboj, varhany,…)
- Kmity kovových tyčí (xylofon,…)

Většina nástrojů obsahuje víc než jednu kmitající část – např. vedle strun může kmitat i korpus nástroje.

Velikost hudebního **nástroje** je dána **rozsahem frekvencí**, pro které byl stavěn.

Menší nástroj → vyšší frekvence; větší nástroj → nižší frekvence

Basa – violoncello – viola – housle

nižší frekvence → vyšší frekvence / frekvenční rozsahy se překrývají

Základní frekvence – výška tónu, vyšší harmonické – barva tónu
Vyšší harmonické o různé intenzitě = důvod, proč různé nástroje mají různé zabarvení téhož tónu

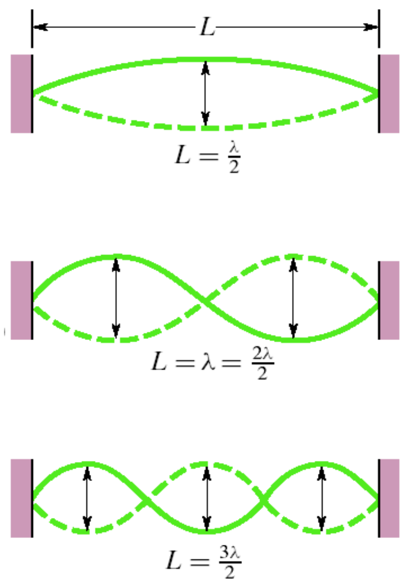
Zvukové vlnění

Zdroje hudebního zvuku

Struna/membrána/sloupec/kovová tyč se rozkmitá na vlastní frekvenci f_n → dojde k rozkmitání vrstvy vzduchu s frekvencí rovnou vlastní frekvenci → vzniká **zvuková vlna šířící se vzduchem rychlostí v_z s vlnovou délkou λ_z**

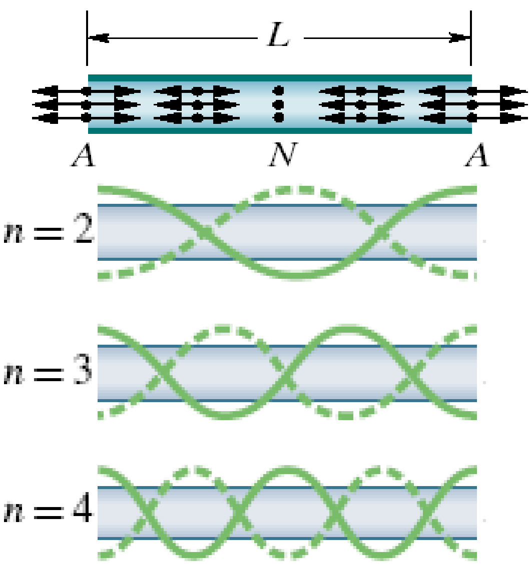
$$\lambda_z = \frac{v_z}{f_n}$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$



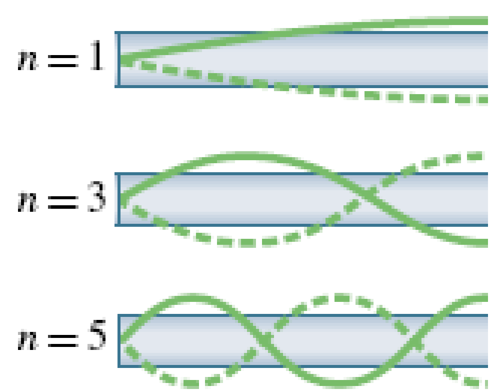
$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{2L}$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$



$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{2L}$$

$$\lambda_n = \frac{4L}{n}$$



$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{4L}$$

KONTROLA 4: Trubice A délky L a trubice B délky $2L$ mají každá oba konce otevřené. Kolikátá harmonická, příslušná trubici B, má stejnou frekvenci jako základní tón trubice A?

$$\boxed{\lambda_n = \frac{2L}{n}}$$

Druhá harmonická

HRW 18.49

49C. Houslová struna kmitá v základním módu, přičemž vznikají zvukové vlny o vlnové délce λ. Kolikrát musíme zvýšit napětí ve struně, aby se při stejném způsobu kmitání vlnová délka zvuku zmenšila na polovinu?

$$\boxed{\lambda_z = \frac{v_z}{f_n}} \qquad \boxed{f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{2L}}$$

Řešení: 4x

Návod: Vlna ve struně se šíří rychlostí v danou parametry struny. Vlnová délka vlny na struně je $\lambda = 2L$ (L je délka struny). Struna kmitá s frekvencí $f \rightarrow$ vznikne zvuková vlna se stejnou frekvencí šířící se rychlostí v_z (zvuk ve vzduchu) se zadanou vlnovou délkou λ_z.
Při změně napětí ve struně → kmity s frekvencí f' → zvuková vlna s frekvencí $\lambda_z' = \lambda_z/2$.

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}};\ f = \frac{v}{\lambda} = \frac{\sqrt{\frac{\tau}{\mu}}}{2L};\ \text{zvuková vlna}\ f = \frac{v_z}{\lambda_z} = \frac{\sqrt{\frac{\tau}{\mu}}}{2L} \Rightarrow \lambda_z = \frac{2Lv_z}{\sqrt{\frac{\tau}{\mu}}}$$

$$\lambda_z' = \frac{2Lv_z}{\sqrt{\frac{\tau'}{\mu}}} = \frac{\lambda_z}{2} = \frac{2Lv_z}{2\sqrt{\frac{\tau}{\mu}}} \Rightarrow \sqrt{\tau'} = 2\sqrt{\tau} \Rightarrow \tau' = 4\tau$$