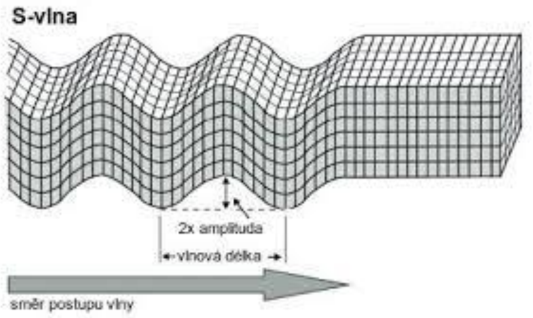


Vlny

VLNĚNÍ

- zvláštní druh pohybu, při kterém se přenášejí kmity.

Prostředím postupuje pouze rozruch a spolu s ním **energie** kmitů.

Částice prostředí zůstávají na místě a pouze **kmitají** kolem svých rovnovážných poloh.

Kmity - periodicky se opakující změny stavu

Šíření kmitů od místa svého vzniku do okolí - vzniká děj nazvaný **vlnění**

Vlnění je děj závislý na čase, jehož podstatou je ***šíření periodických změn fyzikálních veličin***

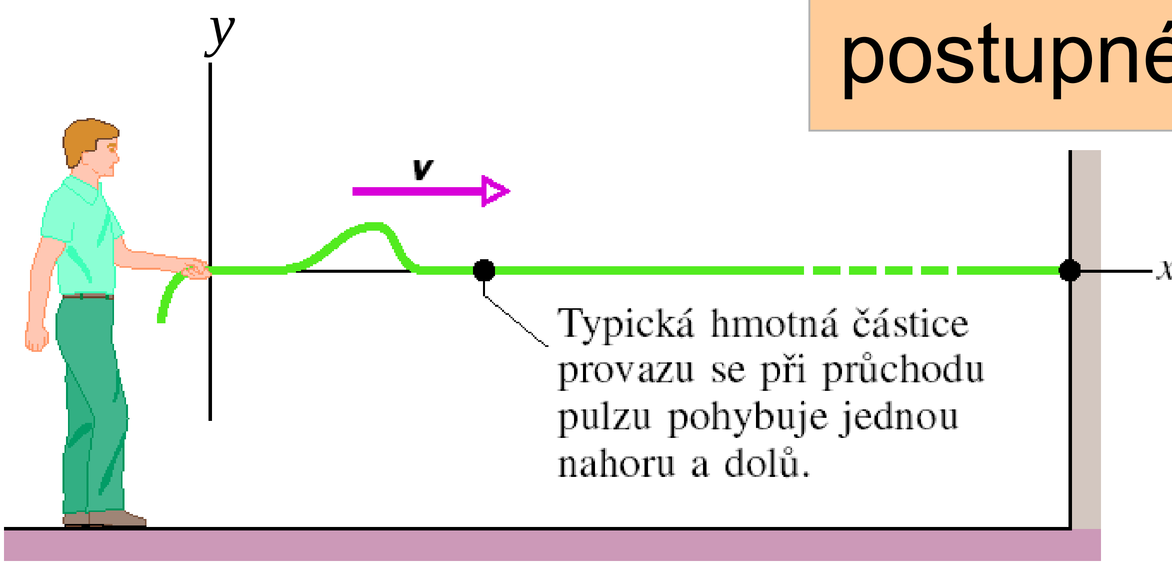
(např. mechanických výchylek, nebo změn vektorů intenzity elektrické nebo magnetické složky elektromagnetického pole, apod.)

Vlny – základní popis

postupné, příčné

Pulz:

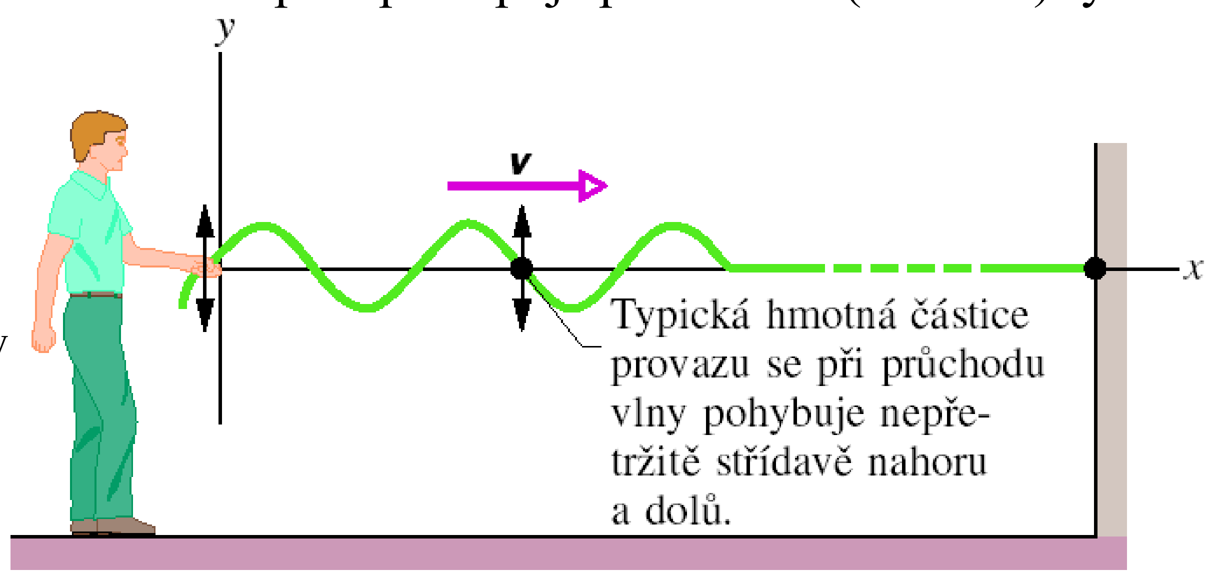
Východisko:
napnuté vlákno; krajním bodem pohnu nahoru a poté zpět do rovnovážné polohy



Vlna/pulz postupuje prostředím (fázovou) rychlostí $\vec{v}$

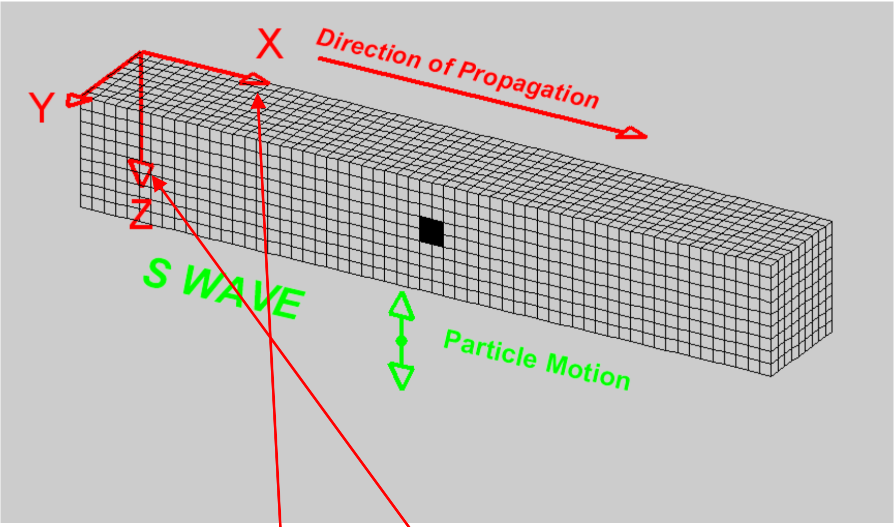
Vlna:

Východisko:
napnuté vlákno; krajním bodem pohybuji harmonicky nahoru a dolů, vždy o stejnou vzdálenost od rovnovážné polohy



Vlny – základní popis

postupné, příčné



Proč **POSTUPNÁ** ?

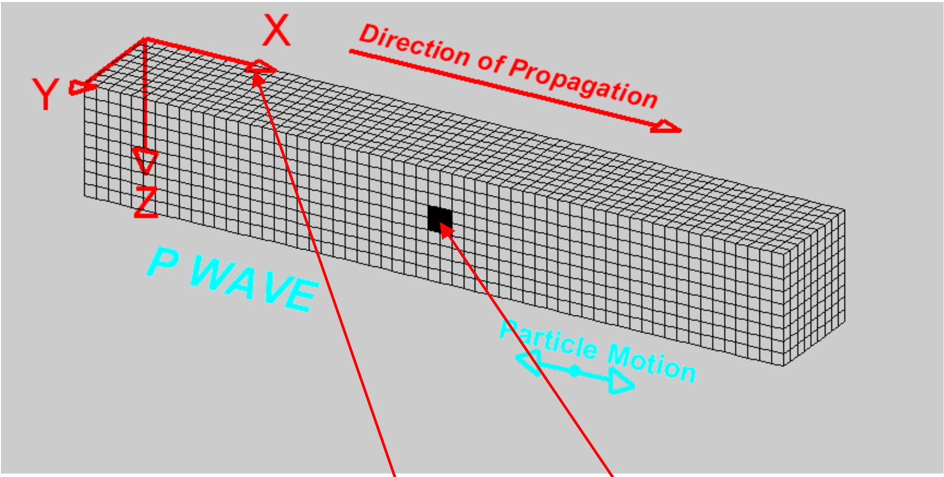
Rozruch (pulz/vlna) **postupuje** prostředím od místa vybuzení „do nekonečna“

Proč **PŘÍČNÁ** ?

Částice prostředí kmitá kolmo, tj. **příčně** na směr šíření.

Př.: Šíření podél osy *x* → okamžitá výchylka bodu z rovnovážné polohy ve směru osy *z* je funkcí souřadnice *x* a času *t* → výchylku označíme *z(x,t)* [nebo *y(x,t)*,případně obecným výrazem *u(x,t)*]

Vlny – základní popis

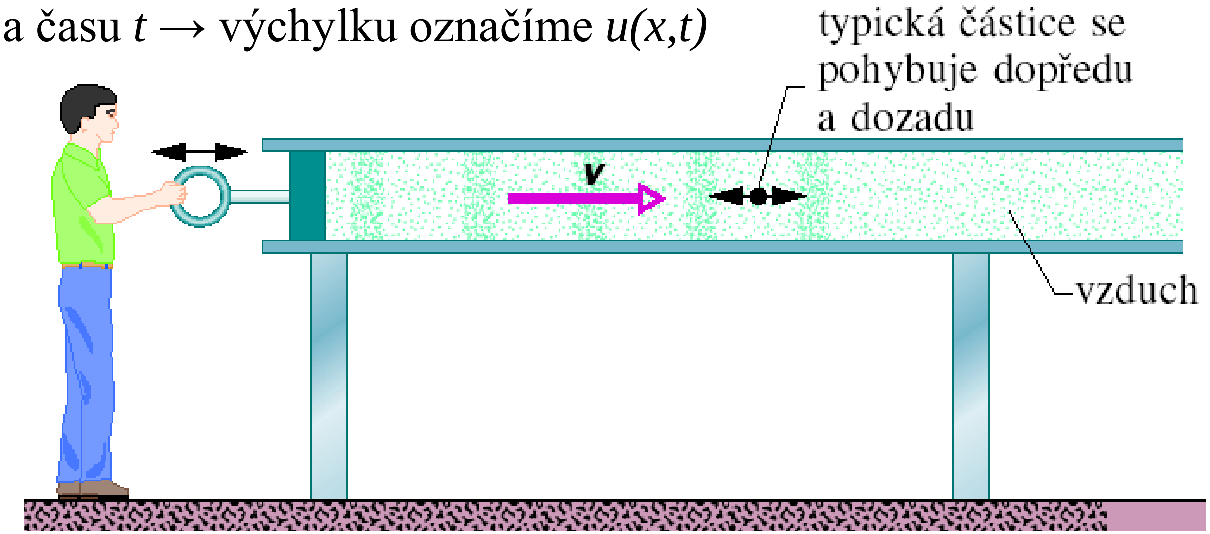


postupná podélná

Proč **PODÉLNÁ** ?

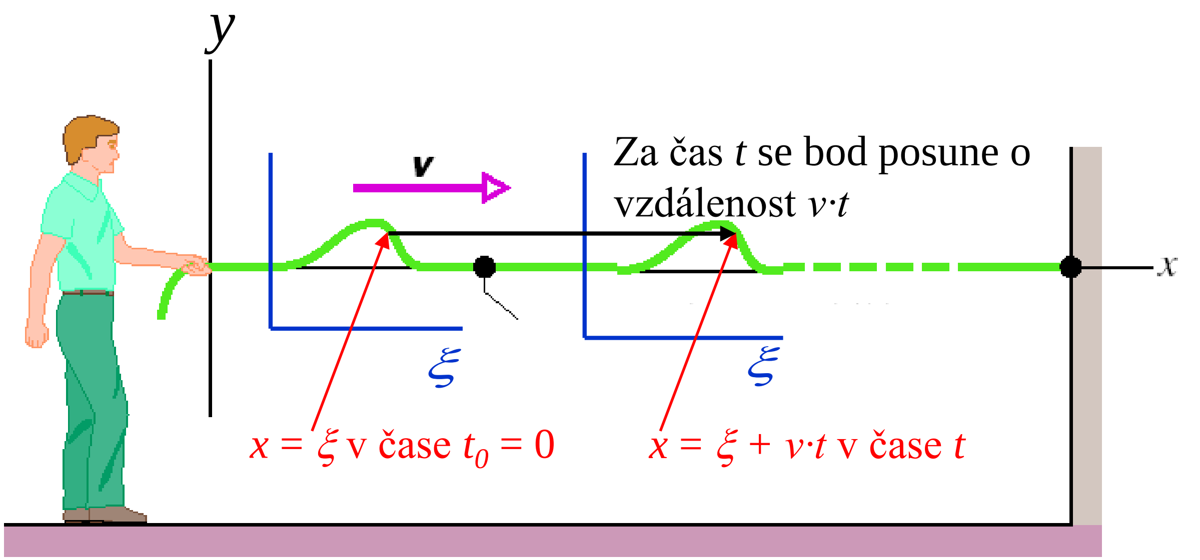
Částice prostředí kmitá rovnoběžně se směrem šíření, tj. **podél** směru šíření.

Př.: Šíření podél osy *x* → okamžitá výchylka bodu z rovnovážné polohy ve směru osy *x* je funkcí souřadnice *x* a času *t* → výchylku označíme *u(x,t)*



Pulz – popis výchylky

Na vlákně se šíří pulz, zajímá nás výchylka (souřadnice y) jednotlivých částic vlákna (souřadnice x) v čase t, tj. ***y(x,t)***



Zvolíme pomocnou souřadnou soustavu $[\xi; y]$, ve které popíšeme tvar pulzu pomocí (nějaké/vhodné) funkce f v čase $t_0 = 0$:
$y(\xi) = f(\xi)$

$$y = f(\xi)$$

Předpoklad: souřadná soustava $[\xi; y]$ se pohybuje podél vlákna stejnou rychlostí v, jakou se šíří pulz;
tj. popis výchylky v soustavě $[\xi; y]$ se nemění.

Vyjádříme souřadnici x:
$x = \xi + v \cdot t \longrightarrow \xi = x - v \cdot t$

$$\boxed{\begin{aligned} y(\xi) &= f(\xi) \\ y(x,t) &= f(x - vt) \end{aligned}}$$

Výchylka y jednotlivých částic vlákna (souřadnice x) v čase t je potom popsána pomocí této funkce $f(x - vt)$

Vlnová rovnice

Okamžitou výchylku postupné vlny lze obecně popsat rovnicí: $u(x,t) = f(x - vt)$

Provedeme druhou derivaci a) podle času a b) podle prostorové souřadnice →

Vlnová rovnice:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

Řešení:

$$\boxed{u(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)}$$

vlna postupující zleva doprava

vlna postupující zprava doleva

v - **fázová rychlost šíření vlny**

Harmonická postupná vlna

Harmonická vlna: jednotlivé body vlákna (prostoru) harmonicky kmitají, tj. jejich výchylku z rovnovážného stavu popíšeme pomocí funkce sinus (nebo cosinus)

$$y(x,t) = y_m \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi\right] = \\ = y_m \sin(\omega t - kx + \varphi)$$

POZOR! Toto k není tuhost

$$k = \frac{\omega}{v}$$

Výchylku z rovnovážné polohy bodu se souřadnicí x lze popsat:

$$y(t) = y_m \sin(\omega \Delta t + \varphi) = y_m \sin(\omega(t - t_{x0}) + \varphi)$$

Výraz $\Delta t = t - t_{x0}$ zahrnuje zpoždění, se kterým se vlnění rychlostí v rozšíří do bodu se souřadnicí x

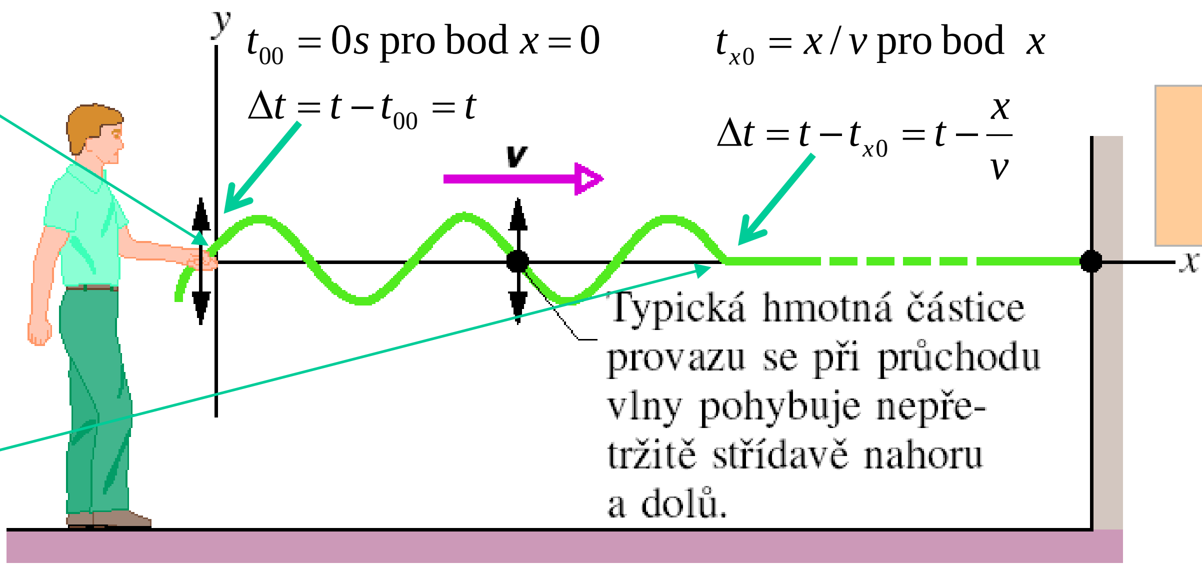
Krajní bod kmitá „celou dobu“

$t_{00} = 0s$ pro bod $x = 0$

$\Delta t = t - t_{00} = t$

$t_{x0} = x / v$ pro bod x

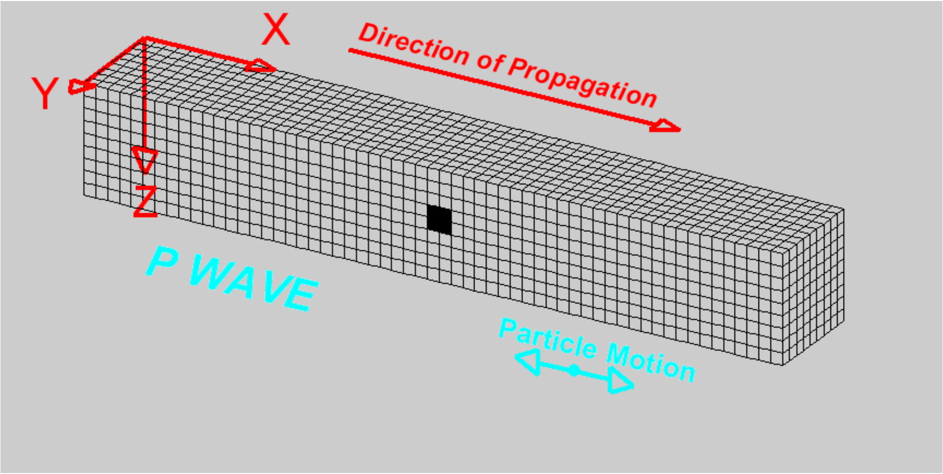
$\Delta t = t - t_{x0} = t - \frac{x}{v}$



příčná

Do bodu x se kmity rychlostí v dostanou až za dobu $t_{x0} \rightarrow$ platí: $x = v \cdot t_{x0}$

Harmonická postupná vlna

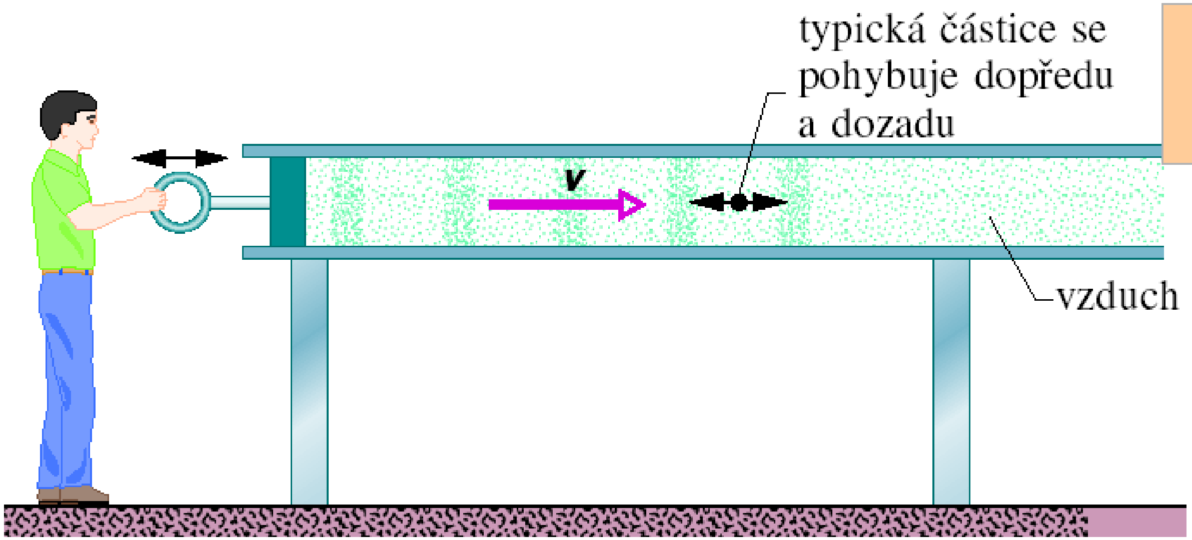


$$u(x,t) = u_m \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi\right] =$$
$$= u_m \sin(\omega t - kx + \varphi)$$

$$k = \frac{\omega}{v}$$

Obdobně pro podélnou vlnu: výchylku z rovnovážné polohy bodu se souřadnicí *x* lze popsat:

$$u(t) = u_m \sin(\omega \Delta t + \varphi)$$



podélná

Harmonická postupná vlna

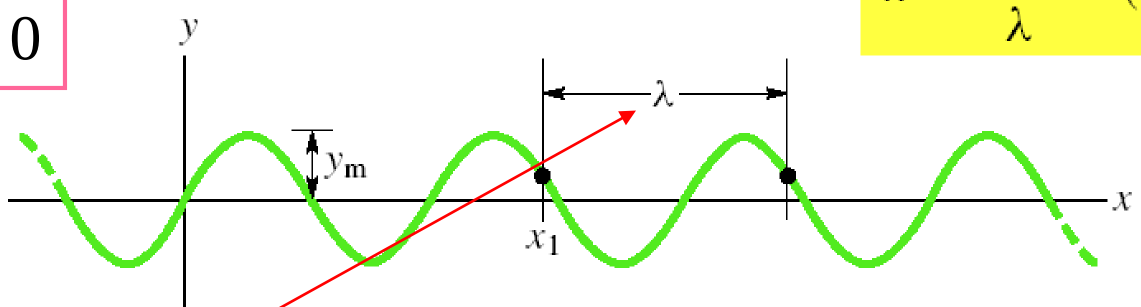
$$y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

Výchylka závisí na dvou proměnných – prostorové souřadnici a času. Pro zobrazení průchodu vlny prostředím tak máme dvě možnosti:

1. Zobrazení výchylky v prostoru v jednom časovém okamžiku

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \text{(úhlový vlnočet)}$$

$$\boxed{t = 0}$$

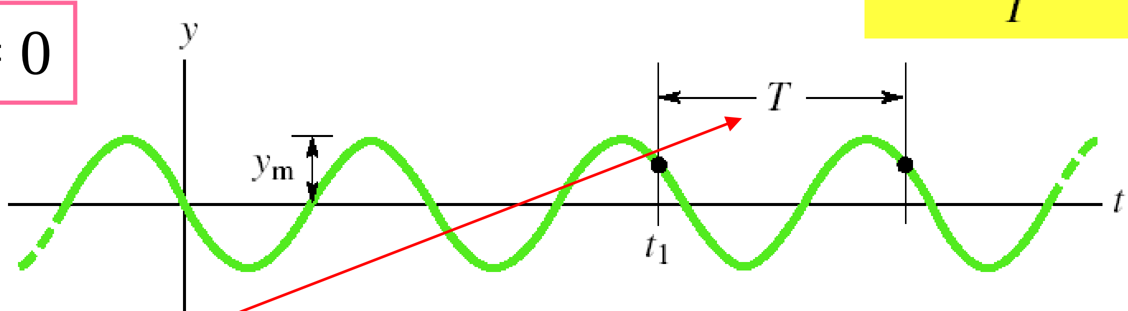


λ .. vlnová délka = nejkratší vzdálenost, mezi dvěma body se stejnou výchylkou v libovolném čase

2. Zobrazení výchylky jednoho bodu prostředí v čase

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \text{(úhlová frekvence)}$$

$$\boxed{x = 0}$$



T .. perioda = nejkratší čas, za který se výchylka daného bodu (stav systému) začne opakovat

Harmonická postupná vlna

$$y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

Odvození vztahu pro úhlový vlnočet: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t + \varphi) = y_m \sin(k(x + \lambda) - \omega t + \varphi)$$

$$\sin\underbrace{(kx - \omega t + \varphi)} = \sin\underbrace{(k(x + \lambda) - \omega t + \varphi)}$$

$$\cancel{kx} - \cancel{\omega t} + \cancel{\varphi} + 2\pi = \cancel{kx} + k\lambda - \cancel{\omega t} + \cancel{\varphi}$$

$$2\pi = k\lambda \rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Odvození vztahu mezi úhlovou frekvencí a periodou vlnění: $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t + \varphi) = y_m \sin(kx - \omega(t + T) + \varphi)$$

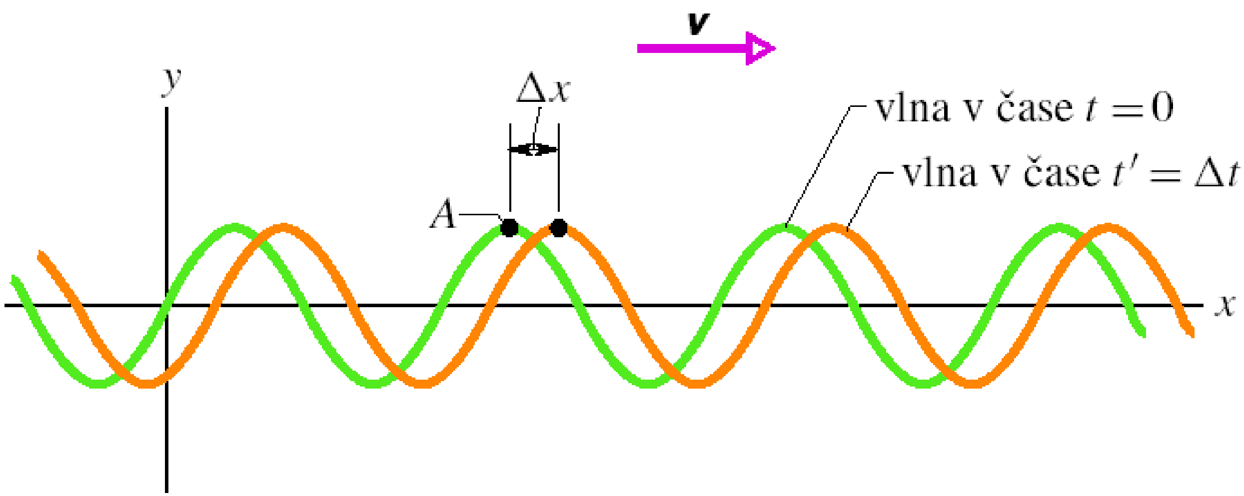
$$\sin\underbrace{(kx - \omega t + \varphi)} = \sin\underbrace{(kx - \omega(t + T) + \varphi)}$$

$$\cancel{kx} - \cancel{\omega t} + \cancel{\varphi} - 2\pi = \cancel{kx} - \cancel{\omega t} - \omega T + \cancel{\varphi}$$

$$2\pi = \omega T \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Harmonická postupná vlna

$$y(x,t) = y_{\mathrm{m}} \sin(kx - \omega t + \varphi)$$



Obr. 17.5 Dva snímky postupné vlny popsané v rov. (17.2) s $\varphi = 0$. První snímek zachycuje vlnu v čase $t = 0$, druhý v pozdějším čase $t' = \Delta t$. Během časového intervalu Δt se celá křivka posunula o vzdálenost Δx doprava.

Harmonická postupná vlna

Fyzikální význam veličin:

$$y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

$$u(x,t) = u_m \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

y, u - **okamžitá výchylka** z rovnovážné polohy bodu v prostoru, v němž se šíří vlnění; jednotky $[y] = [u] = \mathrm{m}$

y_m, u_m - **amplituda** výchylky; jednotky $[y_m] = [u_m] = \mathrm{m}$

$kx - \omega t + \varphi$ - **okamžitá fáze** vlny; φ – počáteční fáze. $[kx - \omega t + \varphi] = [\varphi] = \mathrm{rad}$

ω - úhlová frekvence kmitavého pohybu zdroje i všech bodů prostředí, v němž se vlnění šíří – **úhlová frekvence vlnění**; jednotky $[\omega] = \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$

f - **frekvence vlnění**; jednotky $[f] = \mathrm{Hz} = \mathrm{s^{-1}}$ $\omega = 2\pi f$

$\frac{1}{f} = T$ - **perioda** ; jednotky $[T] = \mathrm{s}$

$$v_p(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$$

Příčná rychlost vlnění – jak rychle se mění velikost výchylky daného bodu.

Pro: $y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t) \rightarrow v_p(x,t) = -\omega \cdot y_m \cos(kx - \omega t)$

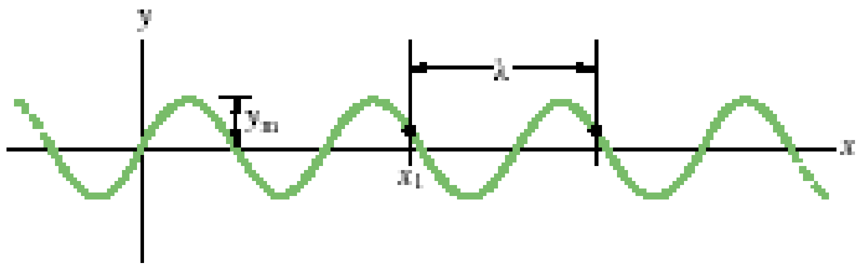
Harmonická postupná vlna

Vzdálenost, kterou urazí vlnění za dobu jedné periody – **vlnová délka**

$$\boxed{\lambda = vT = \frac{v}{f}}$$

λ - **vlnová délka,** jednotky $[\lambda] = \mathrm{m}$
v - **fázová rychlost šíření vlnění,** jednotky $[v] = \mathrm{ms}^{-1}$

(**vlnová délka =** nejmenší vzdálenost dvou bodů, které kmitají ve stejné fázi)



Snímek struny, kterou se šíří sinusová vlna, v daném okamžiku t

$\dfrac{1}{\lambda}$ - **prostý vlnočet,** který určuje, kolik vln se vytvoří na úseku dlouhém 1metr.

$k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ - **úhlový vlnočet,** určuje, o kolik radiánů se změní fáze vlny na délce 1m ve směru šíření vlny, jednotky $[k] = \mathrm{rad\cdot m^{-1}}$

$$\boxed{v = \frac{\omega}{k}}$$

- **disperzní vztah**

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{\lambda f} = \frac{\omega}{v}$$

HRW 17.7

7C. Ukažte, že vlnu $y = y_{\mathrm{m}} \sin(kx - \omega t)$ lze zapsat v následujících ekvivalentních tvarech:

$$y = y_{\mathrm{m}} \sin\left[k(x - vt)\right],$$

$$y = y_{\mathrm{m}} \sin\left[\omega\left(\frac{x}{v} - t\right)\right],$$

$$y = y_{\mathrm{m}} \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - ft\right)\right],$$

$$y = y_{\mathrm{m}} \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right].$$

KONTROLA 2: Uvažte tři vlny, popsané rovnicemi (1) $y(x,t) = 2\sin(4x - 2t)$, (2) $y(x,t) = \sin(3x - 4t)$ a (3) $y(x,t) = 2\sin(3x - 3t)$. Uspořádejte tyto vlny sestupně (a) podle rychlosti vlny, (b) podle největší příčné rychlosti kmitajících částic.

Příčná rychlost: $v_p(x,t) = \dfrac{\partial y(x,t)}{\partial t}$

HRW 17.13Ú

(a) Napište rovnici příčné postupné sinusové vlny, šířící se ve vlákně ve směru +x, má-li tato vlna vlnovou délku 10 cm, frekvenci 400 Hz a amplitudu 2,0 cm. (b) jaká je největší příčná rychlost částic vlákna? (c) Jaká je rychlost vlny?

a) $$y(x,t) = 0.02\sin(800\pi \cdot t - 20\pi \cdot x)$$

b) $$v_p(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \qquad v_{p\max} = 16\pi\ \mathrm{ms^{-1}} = 50{,}3\ \mathrm{ms^{-1}}$$

c) $$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f = 40\ \mathrm{ms^{-1}}$$

Příklad 1.

a) Napište rovnici příčné postupné harmonické vlny šířící se proti směru osy *x*.

b) Pro vlnu o amplitudě 4 mm, vlnové délce 0,5 m a frekvenci 6 Hz zapište vztah pro příčnou rychlost částic struny v závislosti na *x* a *t* a určete maximální hodnotu příčné rychlosti.

b) $v(t,x) = 0{,}15 \cos(4\pi x + 12\pi t)$, $v_{max} = 0{,}15\ \mathrm{m.s^{-1}}$