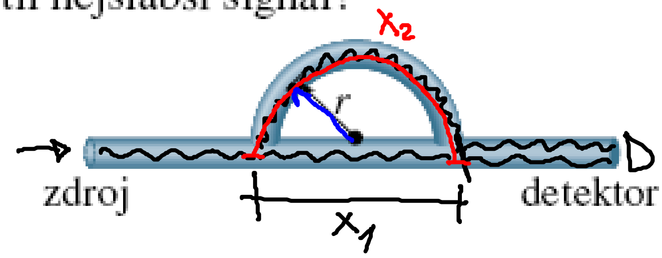
Cvičení Vlny - Interference

24Ú. Zvuková vlna o vlnové délce 40,0 cm vstupuje do trubice nakreslené na obr. 18.33 koncem, na němž je připojen zdroj. Jaký musí být nejmenší poloměr r, aby detektor na druhém konci zachytil nejslabší signál?



$\lambda = 0{,}4\ m \qquad r = ?$

$\Delta L = x_2 - x_1 = \frac{\lambda}{2}$ .. podmínka destruktivní interference

$x_1 = 2r$

$x_2 = \pi \cdot r$

$\pi \cdot r - 2 \cdot r = \frac{\lambda}{2}$

$r(\pi - 2) = \frac{\lambda}{2}$

$r = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{1}{\pi - 2} = \frac{0{,}4}{2 \cdot (\pi - 2)}\ m =$

$= \frac{0{,}4}{2{,}28}\ m = 0{,}175\ m = \underline{\underline{17{,}5\ cm}}$

HRW 18.22

Dva reproduktory jsou umístěny 3,35 m od sebe. Posluchač sedí ve vzdálenosti 18,3 m od jednoho a 19,5 m od druhého reproduktoru. Zvukový generátor udržuje na obou reproduktorech stejnou amplitudu a frekvenci. Vysílaná frekvence se mění v celém slyšitelném rozsahu (20 Hz – 20 kHz).

a) Najděte tři nejnižší frekvence, při kterých bude kvůli destruktivní interferenci posluchač vnímat nejslabší signál.
b) Jaké jsou tři nejnižší frekvence, při kterých bude vnímaný signál maximální?

$d = 3{,}35\,m$ $\qquad v = 340\,m \cdot s^{-1}$

$x_1 = 18{,}3\,m$

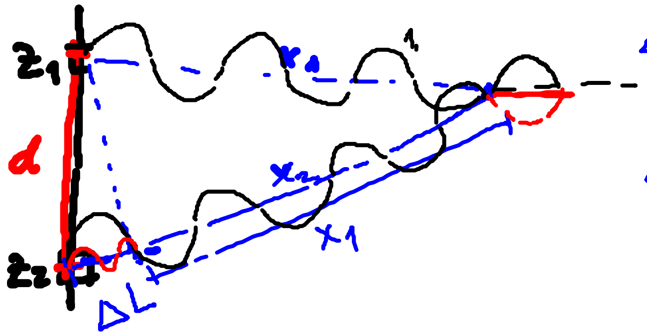
$x_2 = 19{,}5\,m$ $\qquad \Delta L = x_2 - x_1$

Destruktivní interference $(2m-1)\frac{\lambda}{2}$ $m = 1;2;)$

$$\Delta L = (2m+1)\frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Konstruktivní interference

$$\Delta L = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$



$\Delta L = 1\frac{\lambda_1}{2} \rightarrow f_1$ $\qquad x_2 - x_1 = \frac{\lambda_1}{2}$

$\lambda_1 = 2 \cdot (x_2 - x_1)$

$\Delta L = \frac{3}{2}\lambda_2 \rightarrow f_2$ $\qquad \lambda_2 = \frac{2(x_2 - x_1)}{3}$

$\Delta L = \frac{5}{2}\lambda_3 \rightarrow f_3$ $\qquad \lambda_3 = \frac{2(x_2 - x_1)}{5}$

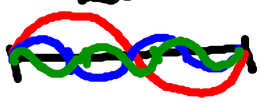
$$\lambda = v \cdot T = \frac{v}{f} \Rightarrow f = \frac{v}{\lambda}$$

$$f_1 = \frac{v}{2(x_2 - x_1)} = \frac{340}{2 \cdot (19{,}5 - 18{,}3)}\,Hz = \frac{340}{2 \cdot 1{,}2}\,Hz = 141{,}6\,Hz \doteq 142\,Hz$$

$$f_2 = \frac{3\,v}{2(x_2 - x_1)} = 3 \cdot f_1 \doteq 426\,Hz$$

$$f_3 = \frac{5\,v}{2(x_2 - x_1)} = 5 \cdot f_1 \doteq 710\,Hz$$

ΔL



$\Delta L = m\lambda \qquad m = 0;\ 1;\ 2;\ 3$

$x_2 - x_1 = m\lambda$

$\lambda_m = \dfrac{x_2 - x_1}{m} \qquad \lambda_1 = (x_2 - x_1)$

$\lambda_2 = \dfrac{x_2 - x_1}{2}$

$\lambda_3 = \dfrac{x_2 - x_1}{3}$

$f = \dfrac{v}{\lambda} \qquad f_1 = \dfrac{v}{\lambda_1} = \dfrac{v}{x_2 - x_1} = \dfrac{340}{1{,}2}\ Hz = 283{,}3\ Hz$

$f_2 = \dfrac{v}{\lambda_2} = \dfrac{v}{\frac{x_2 - x_1}{2}} = 2 \cdot \dfrac{v}{x_2 - x} = 2 \cdot f_1 = 566{,}6\ Hz$

$f_3 = \dfrac{v}{\lambda_3} = \dfrac{v}{\frac{x_2 - x_1}{3}} = 3 \cdot f_1 = 949{,}9\ Hz$

KONTROLA 5: Uvažme interferenci dvou vln stejné amplitudy a vlnové délky. Výsledná vlna má rovnici (1) $y'(x,t) = 4\sin(5x - 4t)$, (2) $y'(x,t) = 4\sin(5x)\cos(4t)$ a (3) $y'(x,t) = 4\sin(5x + 4t)$. Která z těchto rovnic popisuje výslednou vlnu v situaci, kdy se výchozí vlny šíří (a) obě ve směru osy x, (b) obě proti směru osy x a (c) v opačných směrech?

a) y_1 $\quad y'(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$

y_2

$\xrightarrow{+x}$ $y_1 = y_m \cdot \sin(kx - \omega t)$

$\xrightarrow{+x}$ $y_2 = y_m \sin(kx - \omega t)$

$\Big\} \to (1)\ y' = \underline{4\sin(5x - 4t)}$

b) $\xleftarrow{-x}$ $\xleftarrow{-x}$ $\to (3)\ y' = 4 \cdot \sin(\underset{\xleftarrow{-x}}{5x + 4t})$

c) $\xrightarrow{+x}$ $\xleftarrow{-x}$ $\to$ stojatá vlna $\Rightarrow (2)$

58Ú. Kmitání struny je popsáno rovnicí

$$\underbrace{y' = (0{,}50\,\mathrm{cm})}_{2y_m} \sin\left[\left(\overset{k}{\frac{\pi}{3}}\,\mathrm{cm}^{-1}\right)x\right]\cos\left[(\overset{\omega}{40\pi}\,\mathrm{s}^{-1})\,t\right]. \quad \Rightarrow \text{stojaté vlna}$$

(a) Uvedené kmitání vzniklo superpozicí dvou stejných vln (až na směr šíření). Jaká byla jejich amplituda a rychlost? (b) Jaká je vzdálenost mezi sousedními uzly stojaté vlny? (c) Jak velkou příčnou rychlost má částice struny o souřadnici $x = 1{,}5\,\mathrm{cm}$ v čase $t = \frac{9}{8}$ s?

$\sin kx = 0$ $\quad$ $\boxed{kx = n\pi \Longrightarrow x = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\pi}{\frac{2\pi}{\lambda}} \to x_n = n\frac{\lambda}{2} \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ 3) \quad \text{uzly}}$

$y_1 = y_m \cdot \sin(kx - \omega t) \qquad y_2 = y_m \cdot \sin(kx + \omega t)$

$$y' = (2 \cdot y_m) \sin kx \cos \omega t$$

a) $0{,}5\,\mathrm{cm} = 5\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} = 2y_m \Rightarrow y_m = \frac{5\cdot10^{-3}\,\mathrm{m}}{2} = 2{,}5\cdot10^{-3}\,\mathrm{m}$

$v = \frac{\omega}{k} \qquad k = \frac{\pi}{3}\,\mathrm{cm}^{-1} = \frac{\pi}{3}\cdot 10^{2}\,\mathrm{m}^{-1}$

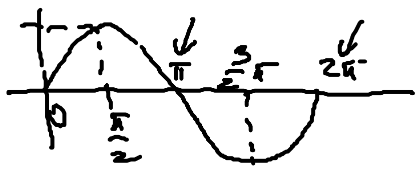
$\omega = 40\pi\,\mathrm{s}^{-1}$

$v = \frac{40\cancel{\pi}}{\frac{\cancel{\pi}}{3}\cdot 10^2}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} = \frac{3\cdot 40}{10^2}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} = 1{,}2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

b) $x_n = n\cdot\frac{\lambda}{2} \qquad n = 0;\ 1;\ 2\ldots \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k}$

$x_0 = 0\,\mathrm{m} \qquad x_1 = 1\cdot\frac{\lambda}{2} = \frac{2\pi}{k}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\cancel{2}\cancel{\pi}}{\frac{\cancel{\pi}}{3}\cdot 10^2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} = \frac{3}{10^2} = 3\cdot10^{-2}\,\mathrm{m} = 3\,\mathrm{cm}$

$\Delta x_n = x_1 - x_0 = 3\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$



$x_2 = 1{,}5\,\mathrm{cm}$

$v_p = \frac{\partial y}{\partial t} = (-2y_m \cdot \sin kx \sin \omega t)\cdot\omega$

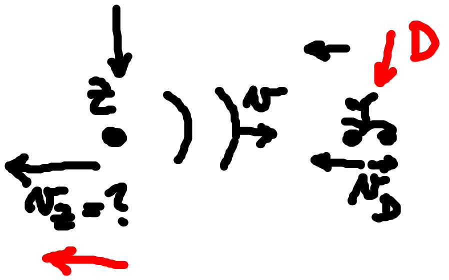
$v_p\left(x = 1{,}5\,\mathrm{cm};\ t = \frac{9}{8}\,\mathrm{s}\right) = -2y_m\cdot\omega \sin kx \sin \omega t = -5\cdot10^{-3}\, 40\pi \sin\left(\frac{\pi}{3}\cdot\cancel{10^2}\cdot 1{,}5\cdot\cancel{10^{-2}}\right)\cdot$

$\cdot \sin\left(\overset{5}{\cancel{40}}\pi\cdot\frac{9}{\cancel{8}}\right) = -\underbrace{\sin\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{3}\right)}_{1}\ \underbrace{\sin(45\pi)}_{=0} = 0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

HRW 18.69

Sanitka, jejíž siréna zní s frekvencí 1600 Hz, předjíždí cyklistu jedoucího rychlostí 2,5 m.s^{-1}. Poté, co ho sanitka předejde, slyší cyklista frekvenci 1590 Hz. Jakou rychlostí jede sanitka.

Rychlost zvuku ve vzduchu uvažujeme 343 m.s^{-1}.



$$f = 1590\ \text{Hz}$$
$$f_0 = 1600\ \text{Hz}$$

$$f = f_0 \cdot \frac{v + v_D}{(v + v_Z)} \Rightarrow v_Z$$

$$f \cdot (v + v_Z) = f_0 \cdot (v + v_D)$$

$$f \cdot v + f \cdot v_Z = f_0 \, (v + v_D)$$

$$f \cdot v_Z = f_0 (v + v_D) - f \cdot v \quad | : f$$

$$v_Z = \frac{f_0}{f} \cdot (v + v_D) - v$$

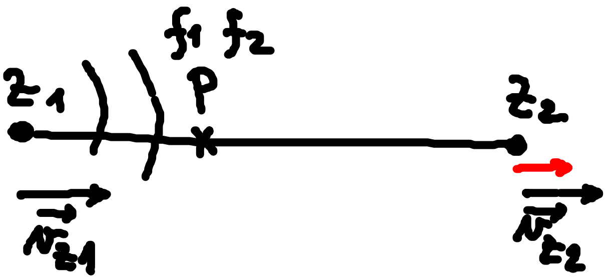
$$v_Z = \left(\frac{1600}{1590} (343 + 2{,}5) - 343 \right) \text{m/s} =$$

$$= \underline{4{,}6\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

HRW 18.73

Dvě stejné ladičky oscilují s frekvencí 440 Hz. Někde na jejich spojnici se nachází posluchač. Vypočtěte, jaký naměří rozdíl frekvencí signálů od obou ladiček a jakou slyší frekvenci, když

(a) on je v klidu a obě ladičky se pohybují směrem doprava rychlostí 30 m.s^{-1}.
(b) Obě ladičky jsou v klidu a posluchač se pohybuje doprava rychlostí 5 m.s^{-1}.
(c) Může v některém případě slyšet/identifikovat rázy (zázněje)?



$f_0 = 440\,Hz$ $\quad v = 340\,m/s$

$v_{z1} = v_{z2} = 30\,m\cdot s^{-1}$

$f_v = ?$

$\Delta f = ?$

a)

$$f_v = \frac{f_1+f_2}{2}$$

$$\Delta f = |f_2 - f_1|$$

$$f_1 = f_0 \cdot \frac{v}{v - v_z} = 440\,Hz \cdot \frac{340}{340-30} = 482{,}6\,Hz$$

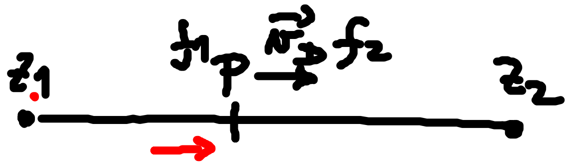
$$f_2 = f_0 \cdot \frac{v}{v + v_z} = 440\,Hz\, \frac{340}{340+30} = 404\,Hz$$

$$f_v = 443{,}4\,Hz$$

$$\Delta f = (482{,}6 - 404)\,Hz = 78{,}6\,Hz$$

$$N = |f_1 - f_2| \doteq 79$$

b)



$$f_1 = f_0 \cdot \frac{v - v_D}{v}$$

$$f_2 = f_0\, \frac{v + v_D}{v}$$

$$f_1 = 440 \cdot \frac{340-5}{340} = 433{,}5\,Hz$$

$$f_2 = 440 \cdot \frac{340+5}{340} = 446{,}5\,Hz$$

$$f_v = \frac{433{,}5 + 446{,}5}{2} \doteq 440\,Hz$$

$$\Delta f = 446{,}5 - 433{,}5 = 13\,Hz$$

$$N = 13$$

HRW II – 18.79 Ú

Siréna vydávající zvuk frekvence 1 000 Hz se pohybuje směrem od nás ke stěně skalního útesu rychlostí 10 m.s^{-1}. Rychlost zvuku ve vzduchu je 330 m.s^{-1}.

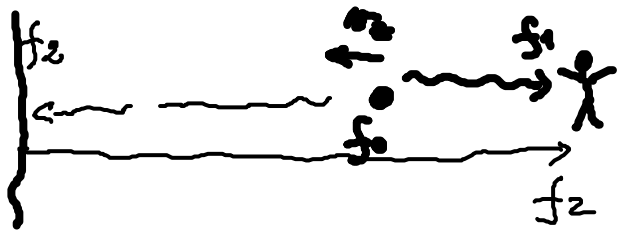
a) Jaká je frekvence zvuku, který slyšíme přímo od sirény?

b) Jaká je frekvence zvuku odraženého od útesu?

c) Jaká je frekvence záznějů (rázů)? Může lidské ucho tyto zázněje rozeznat

(jejich frekvence musí být nižší než 20 Hz)?

$f_0 = 1000\ \mathrm{Hz}$ $\quad v_z = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ $\quad v = 330\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$



a) $f_1 = f_0 \dfrac{v}{v + v_z} = 1000 \cdot \dfrac{330}{330+10}\ \mathrm{Hz}$

$\doteq 971\ \mathrm{Hz}$

b) $f_2 = f_0 \dfrac{v}{v - v_z} = 1000 \cdot \dfrac{330}{330-10}\ \mathrm{Hz}$

$= 1031\ \mathrm{Hz}$

c) $N = |f_2 - f_1| = 1031 - 971 \doteq \underline{60}$ Ne, nerozeznáme

lze rozeznat jenom do 20 záznějí

$f_v = \dfrac{1031 + 971}{2} = \underline{1001\ \mathrm{Hz}}$