HRW, Kapitola 16:

Otázka 2. Na obrázku je vynesena časová závislost zrychlení $a(t)$ pro částici, která vykonává harmonický pohyb.

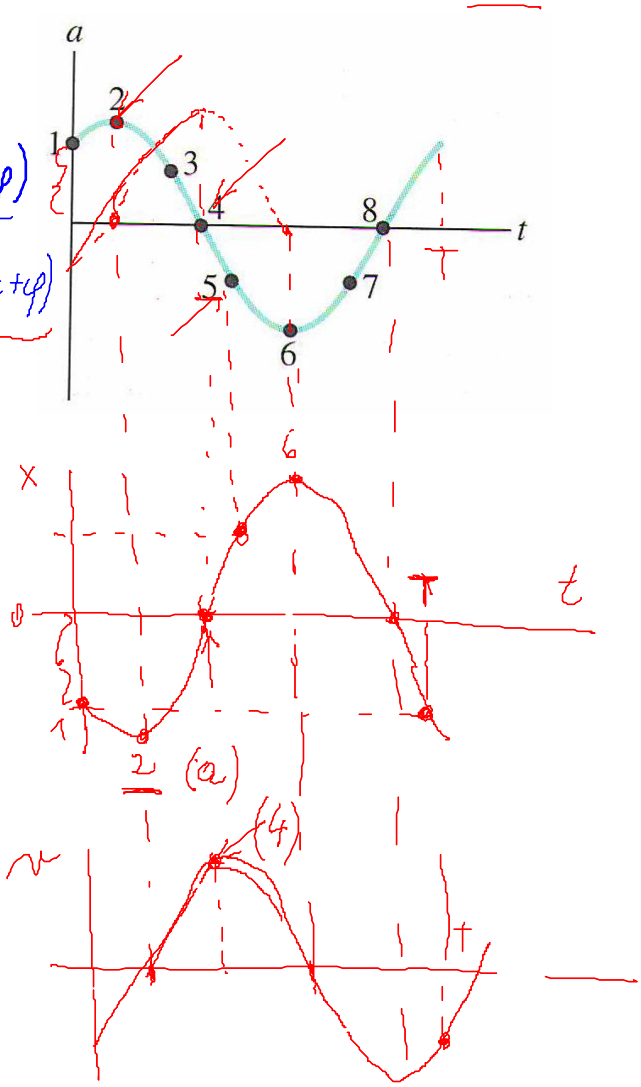
(a) Kterému z číslovaných bodů odpovídá poloha $-x_m$?
(b) Je rychlost částice v bodě 4 kladná, záporná nebo nulová?
(c) Odpovídá bodu 5 poloha částice $-x_m$, $+x_m$, 0, mezi $-x_m$ a 0, nebo mezi 0 a $+x_m$?

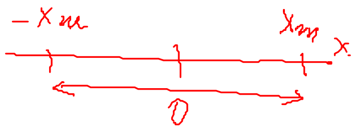
$$x = x_m \cdot \cos(\omega t + \varphi), \quad \varphi = 0$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega x_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 \underbrace{x_m \cos(\omega t + \varphi)}_{x}$$

$$a = -\omega^2 \cdot x$$





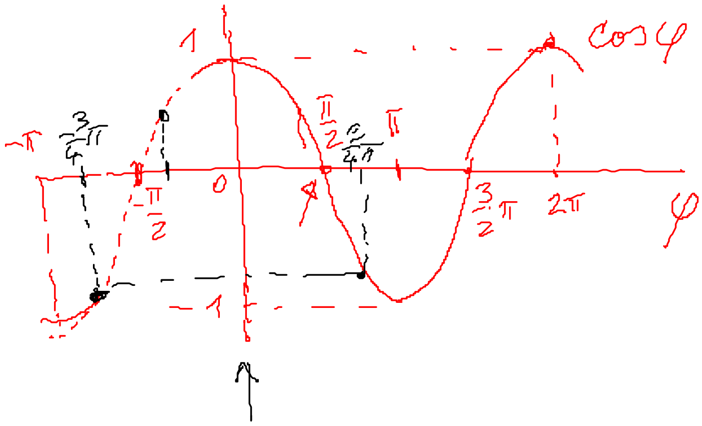
HRW, Kapitola 16:

Otázka 3. Výchylka kmitající částice je popsána vztahem

$x = x_m \cos(\omega t + \varphi)$.

(a) (b)

Určete, zda se částice v čas t = 0 nachází v $-x_m$, $+x_m$, v počátku, mezi $-x_m$ a 0, nebo mezi 0 a $+x_m$, jestliže je φ rovno (a) π/2, (b) -π/3, (c) -3/4 π a (d) 3/4 π.



$$x = x_m \cdot \cos(\underbrace{\omega t}_{=0} + \varphi)$$

$$x(t=0) = x_m \cdot \cos(\varphi)$$

a) $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $\quad x = x_m \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} = 0$

b) $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ $\quad x = x_m \cdot \underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)}_{(0;1)} \in (0; x_m)$

c) $\varphi = -\frac{3}{4}\pi$ $\quad x = x_m \cdot \underbrace{\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right)}_{(-1;0)} \in (-x_m; 0)$

d) $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ $\quad x = x_m \cdot \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) \in (-x_m; 0)$

HRW II – 16.12

Malé těleso o hmotnosti 0,12 kg harmonicky kmitá s amplitudou 8,5 cm a periodou 0,2 s.

(a) Jaká největší síla působí na částici?
(b) Předpokládejme, že kmitání je vyvoláno pružinou. Jaká je tuhost pružiny?

[(a) 10,07 N; (b) 118 N/m]

Daná částice harmonicky kmitá s frekvencí 0,25 Hz kolem rovnovážné polohy $x = 0$. V čase $t = 0$ měla výchylku x = 0,37 cm a nulovou rychlost. Určete pro její kmitání

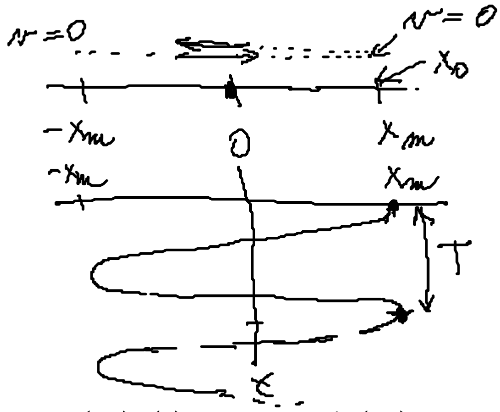
(a) periodu,
(b) úhlovou frekvenci,
(c) amplitudu,
(d) výchylku jako funkci času
(e) rychlost jako funkci času
(f) maximální rychlost
(g) maximální zrychlení,
(h) výchylku v čase t = 3 s,
(i) rychlost v čase t = 3 s.

$f = 0{,}25\ Hz$

$x_0(t=0) = 3{,}7 \cdot 10^{-3}\ m$

$v_0(t=0) = 0\ m \cdot s^{-1}$

$x = x_m \cdot \cos(\omega t)$



[(a) 4 s; (b) 1,57 s^{-1}; (c) 0,37 cm; (d) $x = x_m \cos(\omega t)$; (e) $v = -\omega x_m \sin(\omega t)$; (f) 5,8·10^{-3} ms^{-1}; (g) 9,12·10^{-3} ms^{-2}; (h) 0 m; (i) 5,8·10^{-3} ms^{-1}]

a) $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0{,}25}\ s = 4\ s$

$x(t) = x(t+T)$

$\cancel{x_m} \cdot \cos(\omega t) = \cancel{x_m} \cdot \cos(\omega(t+T))$

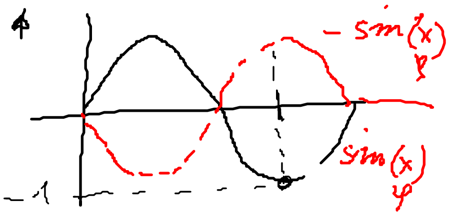
$\omega \cdot t + 2\pi = \omega(t+T)$

$\cancel{\omega t} + 2\pi = \cancel{\omega t} + \omega \cdot T$

$2\pi = \omega T$

b) $\omega = \frac{2\pi}{T\left(\frac{1}{f}\right)} = 2\pi f = \frac{2\pi}{4}\ s^{-1}$

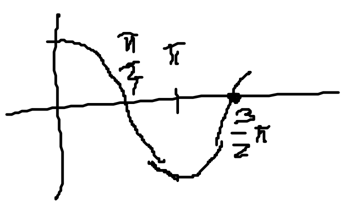
c) $x_m = x_0 = 3{,}7 \cdot 10^{-3}\ m$



d) $x(t) = 3{,}7 \cdot 10^{-3} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{4} \cdot t\right)$

e) $v(t) = -\underbrace{\omega \cdot x_m}_{v_m} \cdot \sin(\omega t) = -\frac{\pi}{2} \cdot 3{,}7 \cdot 10^{-3} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)$

f) $v_m = \omega \cdot x_m = \frac{\pi}{2} \cdot 3{,}7 \cdot 10^{-3}\ m \cdot s^{-1}$



g) $a = -\omega^2 \cdot x_m \cdot \cos(\omega t)$

$a_m = \omega^2 \cdot x_m = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot 3{,}7 \cdot 10^{-3}\ m \cdot s^{-2}$

h) $x(t = 3\,s) = x_m \cdot \cos(\omega t) = 3{,}7 \cdot 10^{-3} \cdot \cos\Big(\underbrace{\frac{\pi}{2} \cdot 3}_{\frac{3}{2}\pi}\Big) = \underline{0\ m}$

rad

$= 0$

i) $v(t = 3\,s) = -\frac{\pi}{2} \cdot 3{,}7 \cdot 10^{-3} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 3\right) = \frac{\pi}{2} \cdot 3{,}7 \cdot 10^{-3}\ m/s$

$= -1$

HRW II – 16.23 (15.80)

Těleso o hmotnosti 0,10 kg osciluje tam a zpět v přímém směru. Jeho výchylka, měřená od počátku souřadnic, je popsána vztahem

$x = (10\ \mathrm{cm})\ \cos\left[(10\ \mathrm{rad.s^{-1}})\ t + \frac{1}{2}\pi\ \mathrm{rad}\right].$

a) Jaká je frekvence kmitů?
b) Jakou maximální rychlostí se těleso pohybuje?
c) Jaké je největší zrychlení tělesa? Při jaké hodnotě výchylky je zrychlení největší?
d) Určete časovou závislost síly, která působí na těleso a vyvolává uvedené kmitání.

[a) 1,59 Hz; b) 1 m.s^{-1}; c) 10 m.s^{-2}; d) …]

HRW II – 16.45 (15.29)

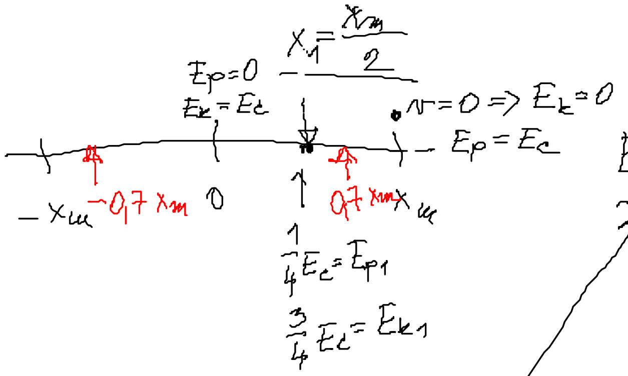
Výchylka harmonicky kmitající částice je v jistém okamžiku rovna jedné polovině amplitudy. Jaká část celkové mechanické energie má v tomto okamžiku formu energie

a) kinetické a

b) potenciální?

c) Při jaké výchylce má jedna polovina celkové mechanické energie formu energie kinetické? Vyjádřete hledanou výchylku pomocí amplitudy.

[a) 3/4 E_C; b) 1/4 E_C; c) $x_m/\sqrt{2}$]



$$E_c = E_k + E_p = \frac{1}{2}\overset{m\omega^2}{k}\, x_m^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 \cdot x_m^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v_m^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

$$E_{p1} = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k \left(\frac{x_m}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} k \left(\frac{x_m^2}{4}\right) = \boxed{\frac{1}{2} k x_m^2}\, \frac{1}{4} = \frac{1}{4} E_c$$

$$E_c = E_{k1} + E_{p1} \Rightarrow E_{k1} = E_c - E_{p1} = E_c - \frac{1}{4} E_c = \frac{3}{4} E_c$$

b) $\frac{1}{2} E_c = E_{k2} = E_{p2}$

$$\cancel{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cancel{k} \cdot x_m^2 = \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{k} \cdot x_2^2 \Rightarrow x_2 = \pm\sqrt{\frac{1}{2} x_m^2}$$

$$x_2 = \pm \frac{x_m}{\sqrt{2}} = \pm 0{,}7 \cdot x_m$$

HRW 16.10

Závaží o hmotnosti 50 g zavěsíme na konec svislé pružiny a rozkmitáme. Největší rychlost závaží činí 15,0 $cm \cdot s^{-1}$, perioda kmitání je 0,5 s. Určete (a) tuhost pružiny, (b) amplitudu kmitání a (c) frekvenci kmitů.

[(a) 7,9 N/m; (b) 11,9 mm; (c) 2 Hz]

HRW 16.41

Kmitající soustava pružina+těleso má mechanickou energii 1,0 J. Kmitání probíhá s amplitudou 10 cm a maximální rychlost tělesa je 1,2 $m \cdot s^{-1}$. Určete (a) tuhost pružiny, (b) hmotnost tělesa a (c) frekvenci kmitů.

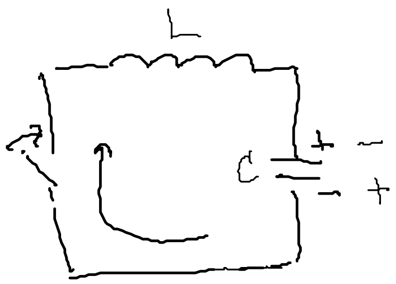
[(a) 200 N/m; (b) 1,39 kg; (c) 1,91 Hz]

Př. 9:

Určete, s jakou frekvencí bude kmitat elektrický obvod složený z nabitého ideálního kondenzátoru s kapacitou 10 μF a ideální cívky s indukčností 1 mH?

[1592 Hz]

$L = 1\,mH = 1 \cdot 10^{-3}\,H \qquad C = 1 \cdot 10^{-5}\,F$



$$\omega = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}$$

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}}{2\pi} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{1}{10^{-3} \cdot 10^{-5}}}}{2\pi} s^{-1} = \frac{\sqrt{\frac{1}{10^{-8}}}}{2\pi} s^{-1} = \frac{\sqrt{10^{8}}}{2\pi} s^{-1} =$$

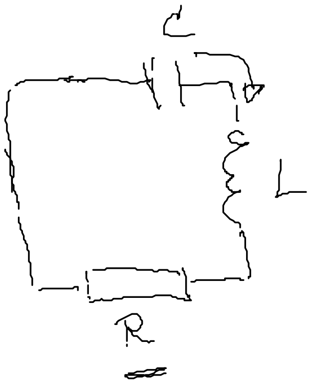
$$= \frac{10^{4}}{2\pi} s^{-1} = \underline{1592\,Hz}$$

Př. 10:

Elektrický obvod je tvoře nabitým kondenzátorem s kapacitou 10 μF a cívky s indukčností 1 mH. Určete, jaká může být maximální hodnota sériového odporu těchto součástek, aby obvod konal kmity.

~~[14,1 Ω]~~

20



$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \qquad \delta = \frac{R}{2L}$$

$$\underline{\omega'} = \sqrt{\underbrace{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{(2 \cdot L)^2}}_{>0}}$$

$$\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} > 0$$

$$\frac{1}{\cancel{L}C} > \frac{R^2}{4L^{\cancel{2}}} \Rightarrow R^2 < \frac{4L}{C}$$

$$R < \sqrt{\frac{4 \cdot L}{C}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10^{-3}}{10^{-5}}} =$$

$$= \sqrt{4 \cdot 10^2} = \underline{20\ \Omega}$$