Kmity

HRW kap. 16

Obsah

- **Základní veličiny charakterizující harmonické kmity**
- **Kinematický a dynamický popis harmonických kmitů**
- **Energie harmonického oscilátoru**
- **Tlumené mechanické kmity**
- **Nucené mechanické kmity**

Kmity - definice

Definice

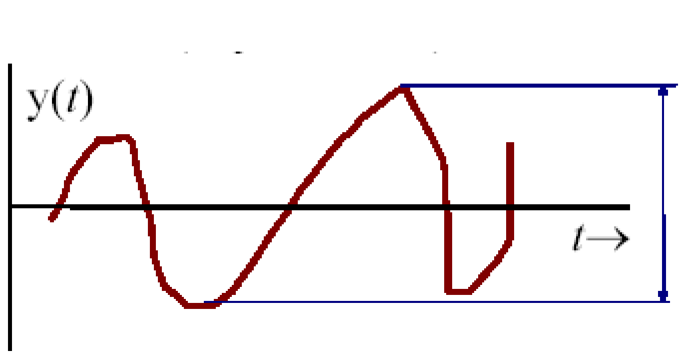
Mechanický kmitavý pohyb je pohyb, který je **prostorově omezený**, tělesa se pohybují jen v okolí jisté **rovnovážné polohy**.

Kmitání není omezeno jen na hmotné objekty. Obecně je **kmitání (oscilace) časová změna nějaké fyzikální veličiny vykazující opakování** (např. oscilace napětí, proudu, náboje v obvodech se střídavým proudem, oscilace teploty kolem určité průměrné denní hodnoty, atd.)

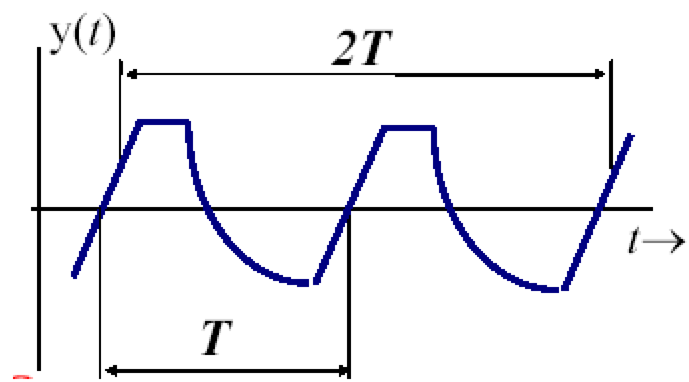
Kmitající systém se nazývá **oscilátor**.

Klasifikace kmitavých pohybů

obecné (neperiodické)



periodické

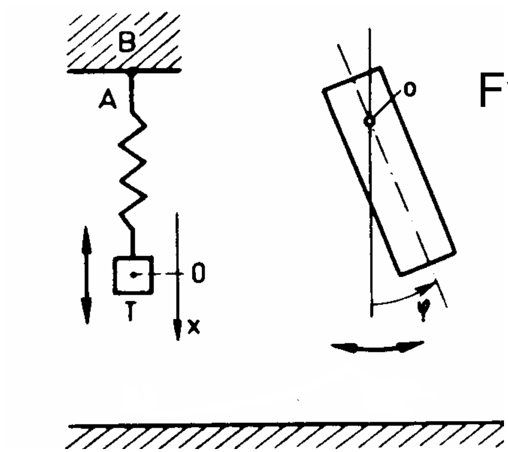


$$y(t) = y(t + nT)$$
$$n = 0,1,2,3,\ldots$$
$$T = \text{perioda}$$

T = nejkratší časový úsek, za který se stav systému začíná opakovat [s]

Kmity – příklady

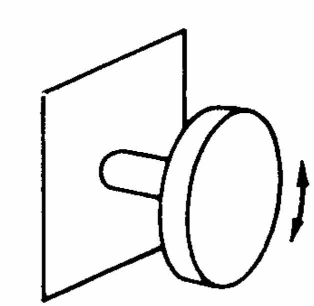
Těleso na pružině



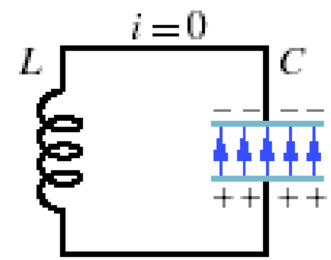
Fyzické kyvadlo

Země

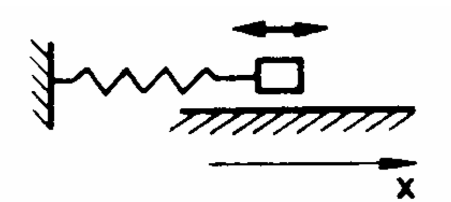
Torzní kmity



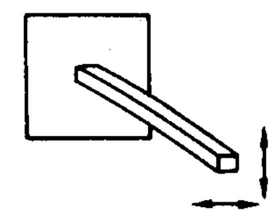
Elektrický kmitavý obvod



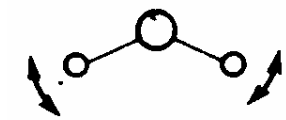
Těleso na pružině

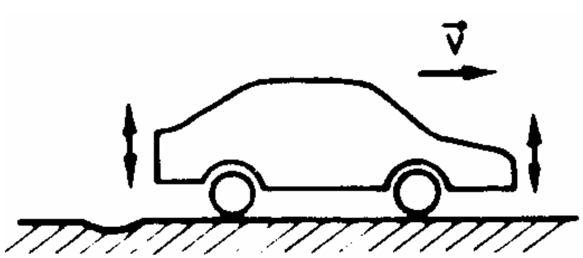


Kmity nosníku



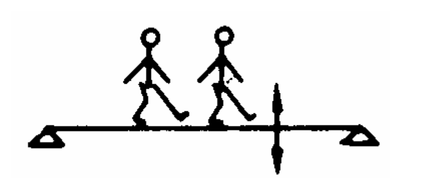
Kmity atomů v molekule





Kmity automobilu s vadnými tlumiči

Kmity mostu účinkem periodických nárazů



Kmity periodické - harmonické

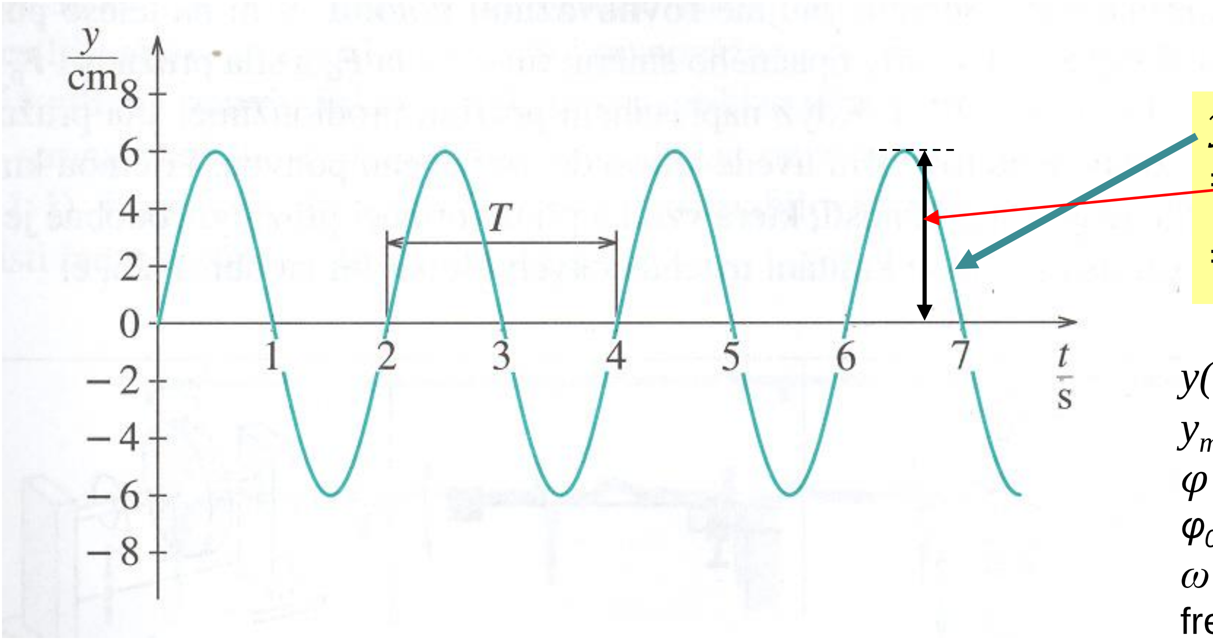
Harmonické kmity

Harmonické kmity jsou zvláštní případ periodického kmitavého pohybu.
K popisu využijeme některou z těchto funkcí:

$$\boxed{\sin(\omega t+\varphi_0),\ \cos(\omega t+\varphi_0),\ e^{j(\omega t+\varphi_0)}}$$

případně (za určitých předpokladů) jejich kombinaci.

$$e^{j(\omega t+\varphi_0)}=\cos(\omega t+\varphi_0)+j\sin(\omega t+\varphi_0)$$



Časový diagram kmitů harmonického oscilátoru

$$y(t)=y_m\cdot\sin(\omega t+\varphi_0)$$
$$=y_m\cdot\cos(\omega t+\varphi_0{}^*)$$
$$=y_m\cdot\cos\left(\omega t+\varphi_0-\frac{\pi}{2}\right)$$

$y(t)$ .. výchylka oscilátoru v čase t
y_m .. amplituda výchylky [m]
$\varphi=(\omega t+\varphi_0)$ .. fáze [rad]
φ_0, $\varphi_0{}^*$ .. počáteční fáze [rad]
ω .. úhlová rychlost (úhlová frekvence) [rad·s^{-1}]
T .. perioda [s]

Harmonické kmity - rozdělení

Harmonické

kmity

Volné (vlastní)

Působí jediná síla = **elastická**

Amplituda je konstantní

Probíhají v čase $t \in (t_0, +\infty)$

Tlumené

Působí 2 síly: **elastická + tlumící**

Tlumící síla: tření, odpor prostředí aj.

Jsou **kvaziperiodické**. Amplituda klesá s časem. Po dostatečně dlouhé době je amplituda prakticky nulová

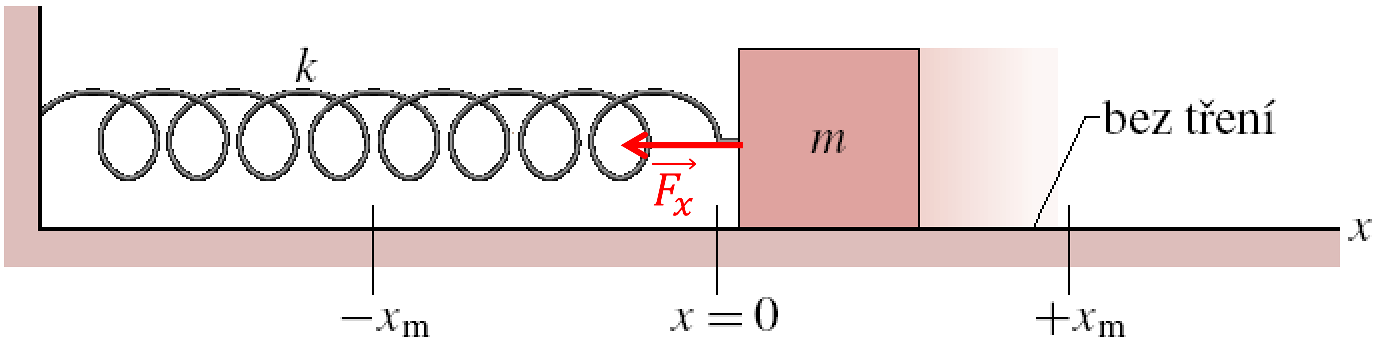
Vynucené

Působí 3 síly: **elastická + tlumící + + vnější budící síla**

Frekvence (kmitočet) vynucených kmitů = kmitočtu budící síly. Amplituda závisí na rozdílu kmitočtu volných kmitů a budícího kmitočtu.

Volné harmonické kmity

Příkladem volných harmonických kmitů může být pohyb tělesa, připojeného k pružině a pohybujícího se na vodorovné podložce bez tření. Při vychýlení tělesa z rovnovážné polohy (stlačení/prodloužení pružiny) začne působit pružná síla ve vodorovném směru, která je orientována proti výchylce – vrací těleso do rovnovážného stavu. Pro popis vyjdeme z Hookova zákona a 2. Newtonova zákona.



2. Newtonův zákon:

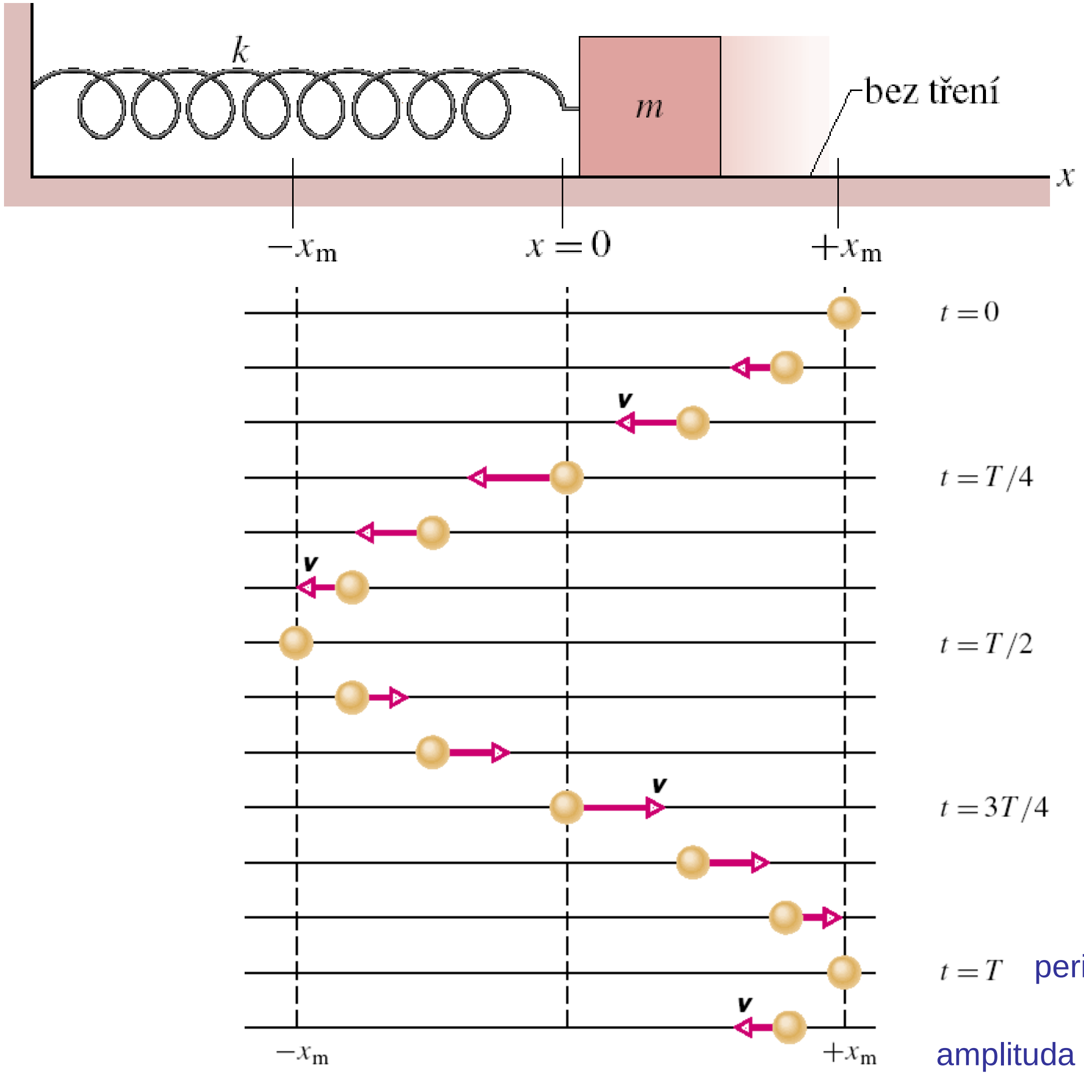
výsledná pružná síla uděluje tělesu o hmotnosti m zrychlení a

$$\overbrace{F_x = ma_x}\ \underbrace{= -kx}$$

Hookův zákon: výsledná síla je úměrná výchylce částice z rovnovážné polohy a orientovaná proti výchylce

zrychlení je úměrné výchylce a míří proti ní

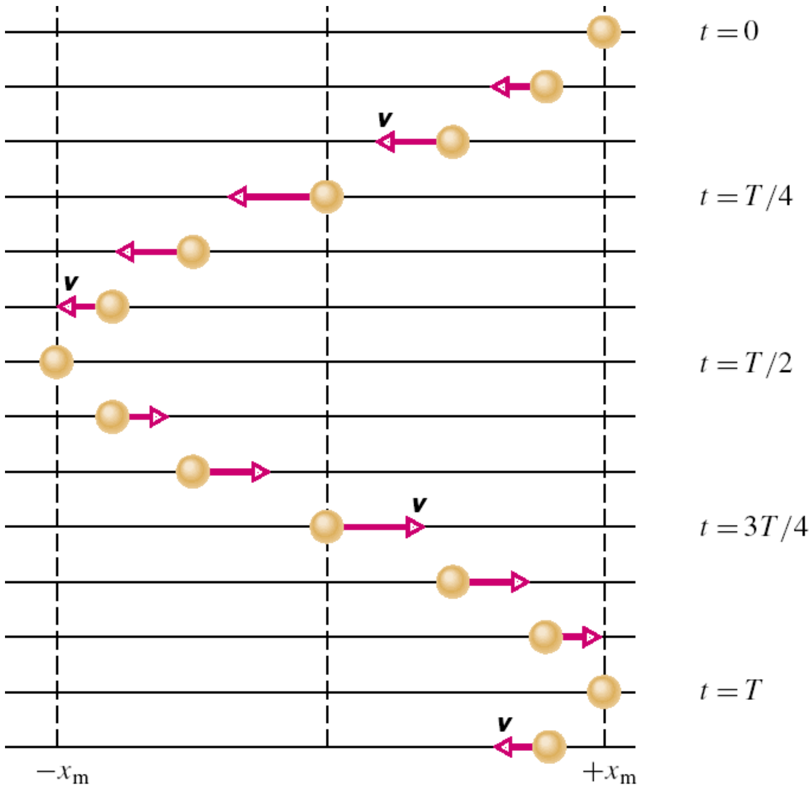
Volné harmonické kmity



perioda

amplituda

Volné harmonické kmity

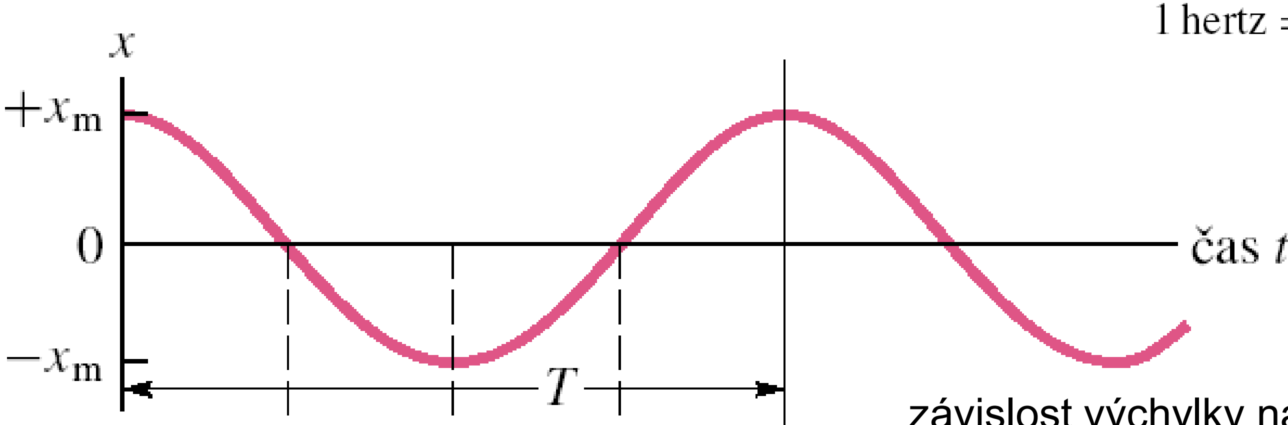


perioda T $[T]$ = s
= doba, za kterou se uskuteční jeden úplný kmit
= nejkratší doba, za kterou se výchylka a rychlost (nebo jiné fyzikální veličiny popisující systém) vrátí na původní hodnoty

frekvence f $[f]$ = Hz = s^{-1}
= počet kmitů za jednu sekundu

$$f = \frac{1}{T}$$

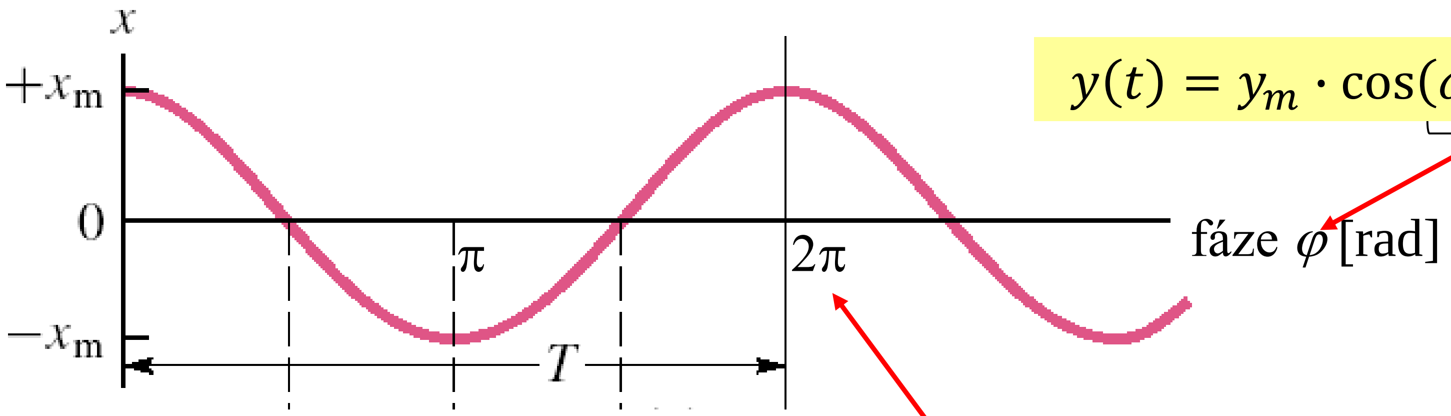
$$1 \text{ hertz} = 1 \text{ Hz} = 1 \text{ kmit za sekundu} = 1 \text{ s}^{-1}$$



závislost výchylky na čase

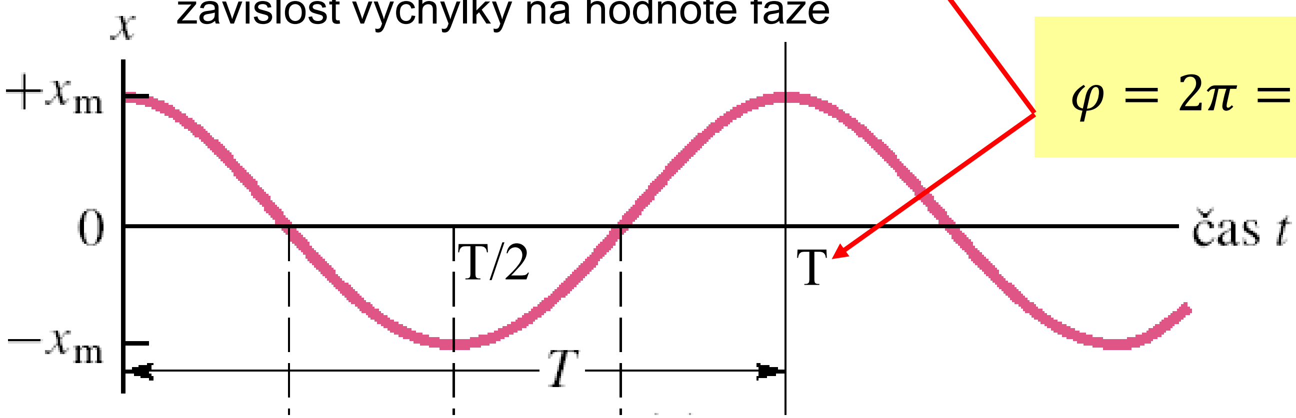
Volné harmonické kmity

$$y(t) = y_m \cdot \cos(\omega t)$$



závislost výchylky na hodnotě fáze

$$\varphi = 2\pi = \omega T \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

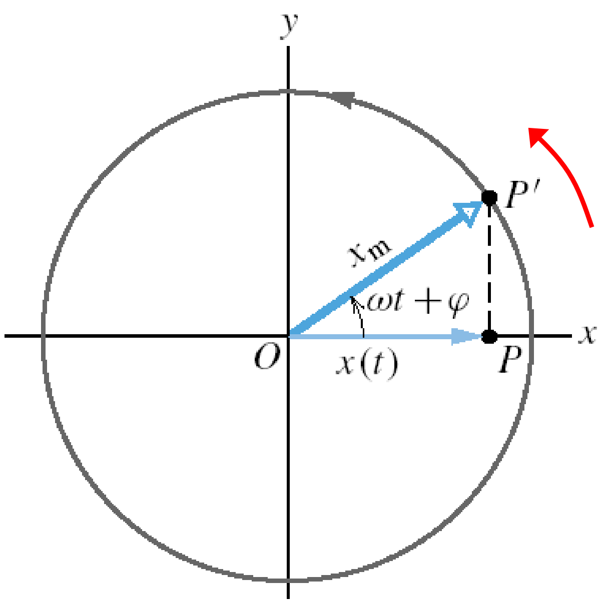


závislost výchylky na čase

Volné harmonické kmity – model

MODEL: pohyb po kružnici

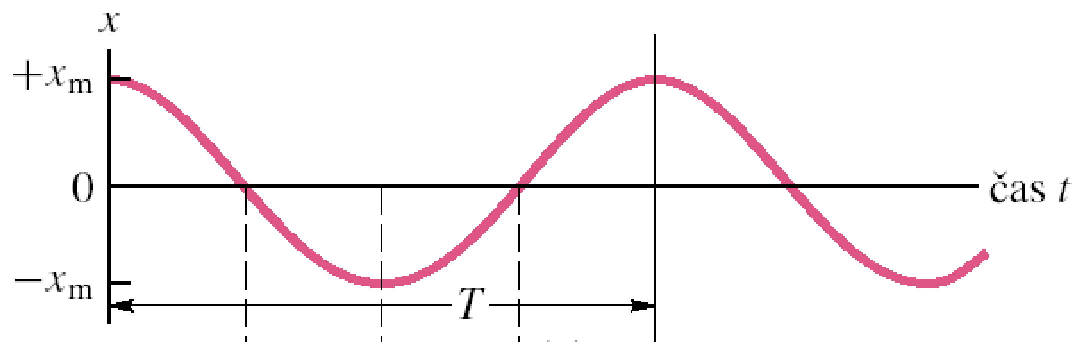
Harmonický pohyb ***lze modelovat*** *jako* průmět rovnoměrného kruhového pohybu do libovolného pevného směru.



Modelujeme kmity podél osy x mezi x_m a $-x_m$

Časová závislost polohy bodu P - průmět polohy P´ do osy x

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$



Částice rotuje úhlovou rychlostí ω, za dobu t urazí úhlovou dráhu (= úhel o velikosti) $\varphi_t = \omega \cdot t$ radiánů. Za dobu T (za 1 periodu) urazí úhlovou dráhu 2π rad.

$2\pi = \omega T \rightarrow T = 2\pi / \omega$ - **perioda**

$f = 1/T \rightarrow f = \omega / 2\pi$ - **frekvence**

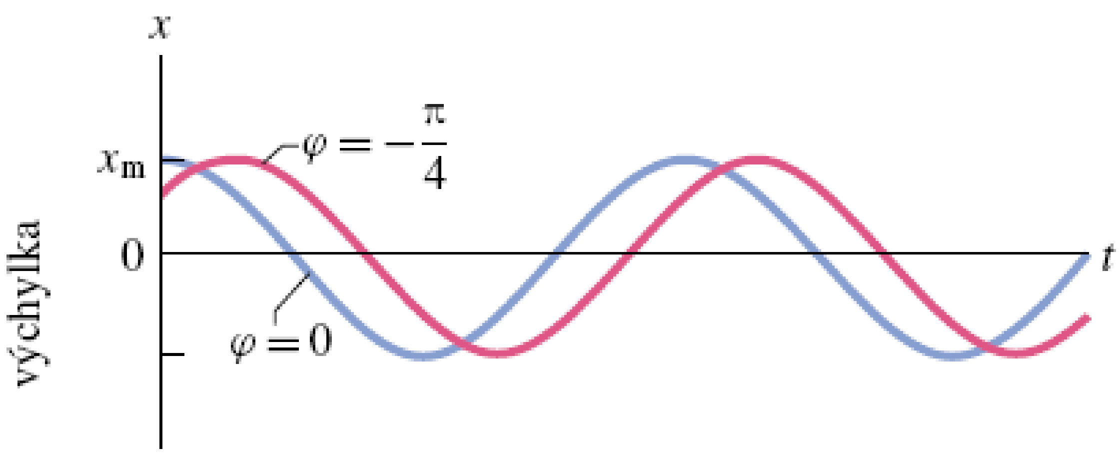
Volné harmonické kmity – model

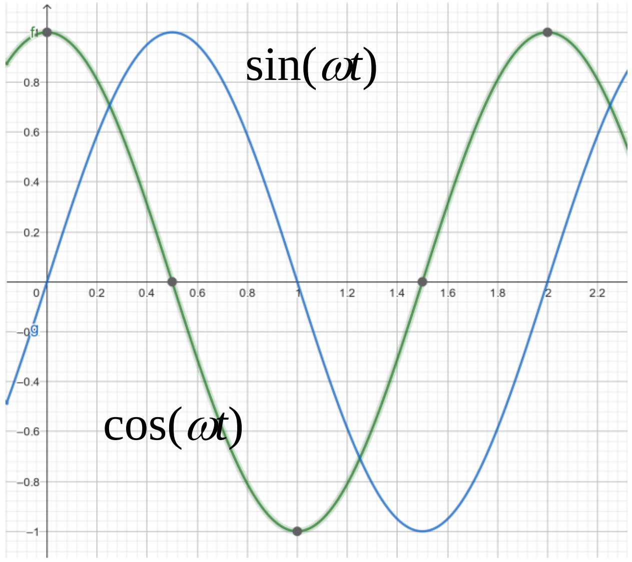
φ = počáteční fáze kmitavého pohybu.

Určuje výchylku, příp. jinou veličinu harmonického kmitání v počátečním okamžiku t_0

Výchylka v závislosti na čase je popsána rovnicí: $x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$

V čase $t = t_0 = 0$ s dostaneme výchylku: $x(t_0 = 0\ \mathrm{s}) = x_m \cos(\omega \cdot 0 + \varphi) = x_m \cos(\varphi)$





$$y(t) = y_m \cdot \sin(\omega t) = y_m \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Harmonické kmity – kinematický popis

Kinematické veličiny – popis harmonického pohybu

Výchylka:

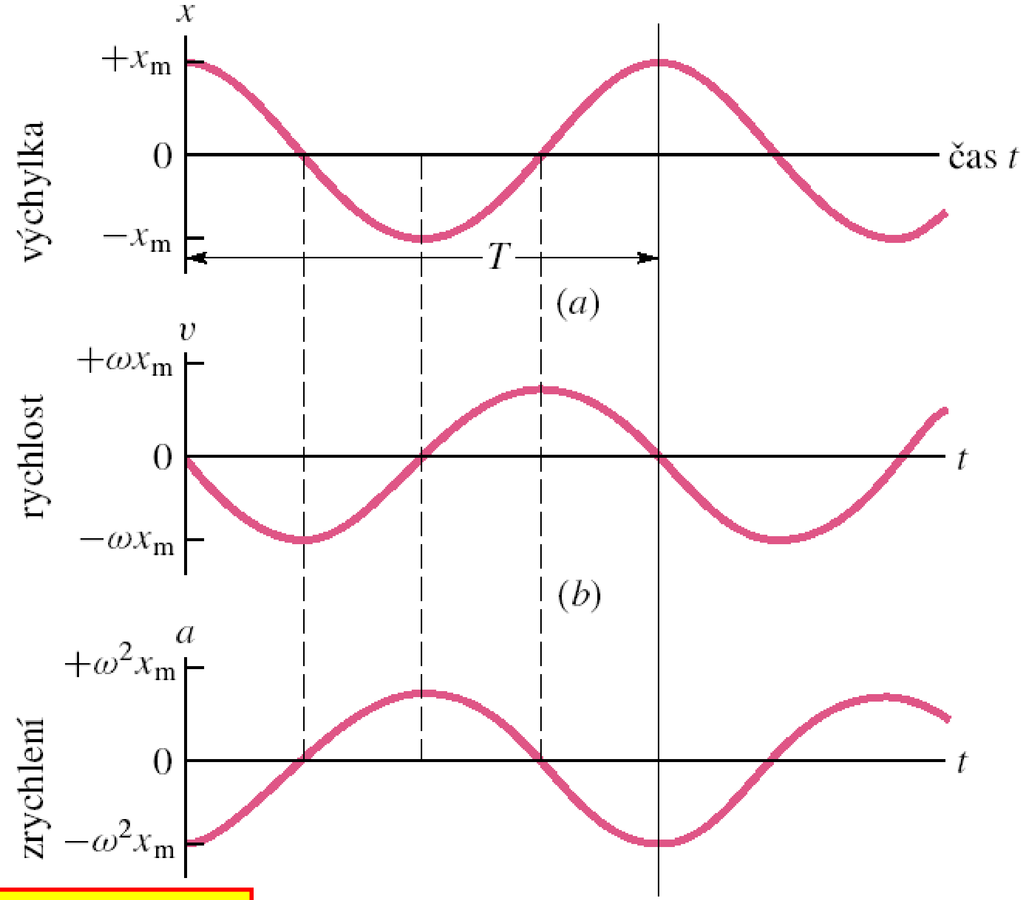
$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Rychlost:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega\, x_m \sin(\omega t + \varphi)$$

Zrychlení:

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \underbrace{x_m \cos(\omega t + \varphi)}_{x(t)}$$



$$\boxed{a(t) = -\omega^2\, x(t) \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \cdot x(t)}$$

Vztah mezi zrychlením a výchylkou typický pro harmonický pohyb

Harmonické kmity – kinematický popis

Odtud plyne

základní diferenciální rovnice *volných harmonických kmitů*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

-***lineární obyčejná diferenciální rovnice 2. řádu,***

s konstantními koeficienty

Systémy, jejichž chování lze popsat rovnicí tohoto typu, se nazývají **lineární harmonické oscilátory**

Př.1: Rovnice harmonického kmitání má tvar

$$y = 5{,}0.10^{-3}\sin\left(4\pi t\right)$$

y je v metrech, *t* v sekundách

Určete:

a) amplitudu výchylky, b) frekvenci kmitání, c) dobu od počátečního okamžiku, za kterou kmitající těleso dosáhne výchylky -5 mm.

a) $y_m = 5.10^{-3}$ m

b) $f = \omega / 2\pi = 4\pi / 2\pi = 2$ Hz

c) $-5.10^{-3} = 5.10^{-3}\sin(4\pi t)$

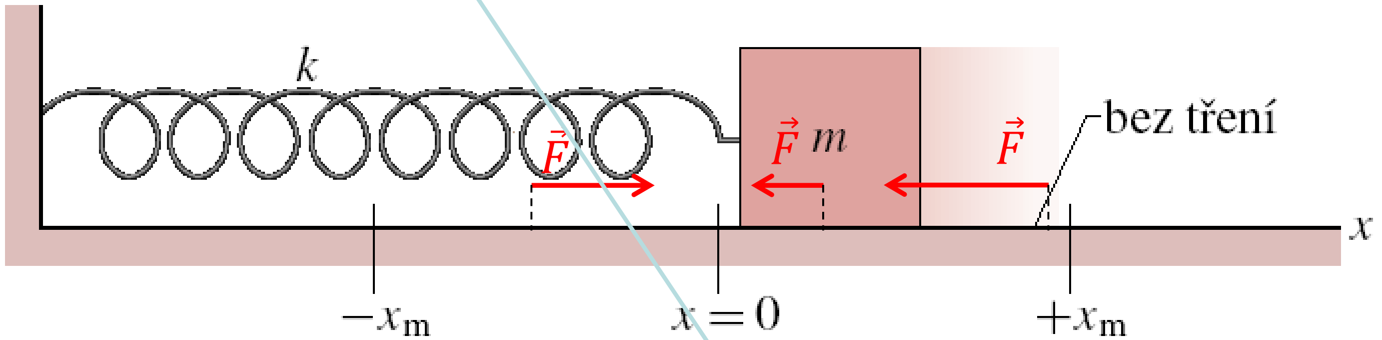
$\Rightarrow \sin(4\pi t) = -1$ $\Rightarrow 4\pi t = 3/2\ \pi$ $\Rightarrow t = 3/8$ s

Dynamický popis harmonického pohybu

Příčinou harmonického kmitání mechanického oscilátoru je síla, která je přímo úměrná výchylce oscilátoru z rovnovážné polohy a stále směřuje do rovnovážné polohy (**síla pružnosti, elastická síla**).

Hookův zákon: $\boxed{F = -k\,x}$

k – tuhost pružiny, [*k*] = Nm^{-1}
x - výchylka z rovnovážné polohy, [*x*] = m



2. Newtonův pohybový zákon (**pohybová rovnice**):

$$ma = F \quad \Rightarrow \quad m\,a = -k\,x$$

Dynamický popis harmonického pohybu

Převedeme všechny členy rovnice na pravou stranu:

$$ma = -kx \quad \Longrightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

Vydělíme hmotností *m*

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0}$$

Pohybová rovnice vlastních kmitů

Rovnice je formálně shodná s **diferenciální rovnicí harmonického pohybu**

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$

<u>Srovnáním</u>:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \quad k = m\,\omega^2$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

úhlová frekvence vlastních kmitů

je plně určena vlastnostmi soustavy, tj.

hmotností oscilátoru a tuhostí vazby

Dynamický popis harmonického pohybu

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

$$x(t) = x_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \varphi) \qquad \text{(výchylka)}$$

Řešení pohybové rovnice

- Obecné řešení pohybové rovnice
- $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ je určeno parametry kmitající soustavy
- Konstanty x_m a φ určíme z počátečních podmínek

Počáteční podmínky:

$$x(0) = x_0$$
$$v_x(0) = v_{0x}$$

$\Rightarrow$

$$x_m \cos\varphi = x_0$$
$$-\omega x_m \sin\varphi = v_{0x}$$

Časté zvláštní případy:

1. $v_x(0) = 0 \;\Rightarrow\; -\omega x_m \sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0; \quad x(t) = x_m \cos(\omega t), \quad x_m = x_0$
2. $x(0) = 0 \;\Rightarrow\; x_m \cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}; \quad x(t) = x_m \sin(\omega t), \quad \omega x_m = v_{0x}$

Dynamický popis harmonického pohybu

Pozn.: ***Vliv konstantní síly na harmonický oscilátor***

Zavěšením závaží o hmotnosti *m* se pružina protáhne o délku y_r.
V rovnovážné poloze platí

$$\vec{G} + \vec{F_p} = \vec{0}$$

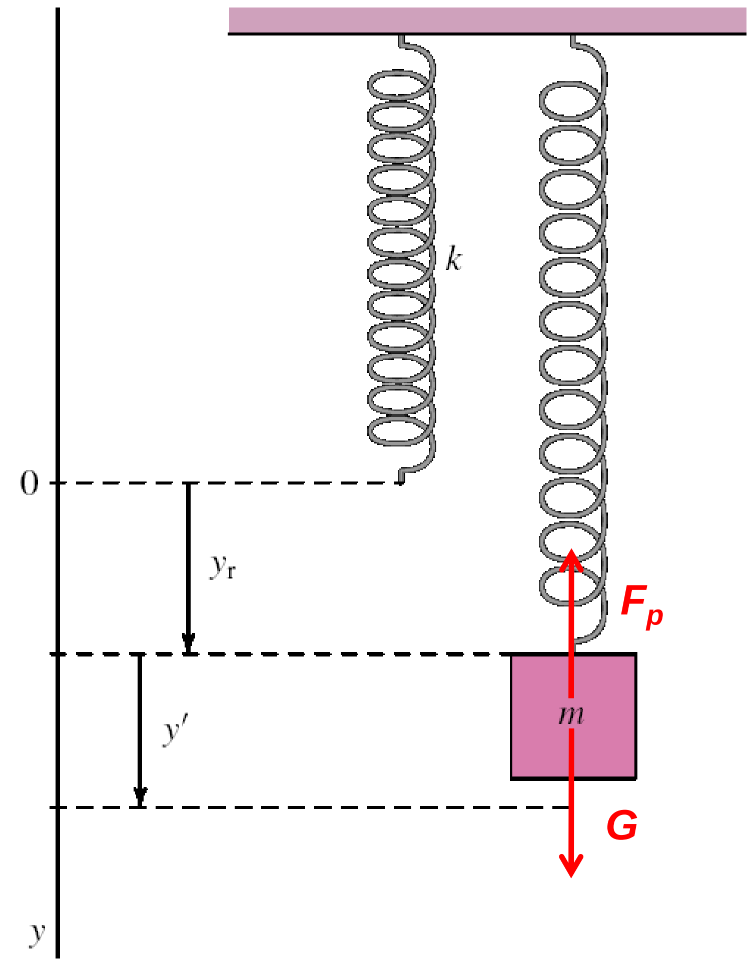
tj. pro velikosti sil $G = F_p \Rightarrow mg = ky_r$

$$y_r = \frac{mg}{k}$$

Při vychýlení závaží ve svislém směru se poruší rovnováha sil (síla pružnosti se změní)

$$\boldsymbol{F_V} = G - F_p = mg - k(y_r + y') = mg - k(mg/k) - ky' = \boldsymbol{-ky'}$$

– výsledná elastická síla způsobí harmonické kmity závaží



závaží kmitá kolem nové rovnovážné polohy

HRW 16.15C

Uvažme kmitání automobilu ve svislém směru. Lze uvažovat, jako by vozidlo bylo umístěno na čtyřech stejných pružinách. U jistého vozidla nastavíme tuhost těchto pružin tak, aby frekvence kmitání činila 3,00 Hz.

a) Jaká je tuhost pružin, předpokládáme-li hmotnost vozidla 1 450 kg a rovnoměrné rozložení váhy?

b) Ve vozidle jede 5 osob. Jejich průměrná hmotnost je 73 kg a váha je opět rozložena rovnoměrně. Jaká je frekvence kmitání každé pružiny?

[a) k = 1,29.10^{5} N.m^{-1} ; b) f ´=2,68 Hz]

16.15 C - Návod k řešení

M = 1450 kg; f = 3 Hz; k = ?

a) Každá pružina představuje samostatný kmitající systém; hmotnost připadající na 1 pružinu je $m = M/4$

Pro kmitající systém platí:

$$\text{2.N.z.}: F = ma \qquad x = x_m \cos(\omega t)$$

$$\text{Hook.z.}: F = -kx \qquad a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$-kx = -m\omega^2 x \Rightarrow k = \frac{M}{4}\omega^2 = \frac{M}{4}(2\pi f)^2$$

b) M_1 = 5 x 73 kg; f' = ?

Zatížení každé pružiny se zvýší na $m' = M/4 + M_1/4$

$$-kx = -m'\omega'^2 x \Rightarrow k = \frac{M + M_1}{4}(2\pi f')^2 \Rightarrow$$

$$f' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4k}{M + M_1}}$$

HRW 16.27

27Ú. Na píst, který harmonicky kmitá ve svislém směru, položíme závaží. (a) Je-li perioda kmitů pístu 1,0 s, při jaké amplitudě se závaží oddělí od pístu? (b) Je-li amplituda kmitů pístu 5,0 cm, jaká může být největší frekvence, pro kterou zůstává závaží nepřetržitě v kontaktu s pístem?

[a) $x_m > 25$ cm ; b) $f = 2{,}2$ Hz]

16.27 - Návod k řešení

Harmonické kmity => $x = x_m \cos(\omega t)$; T = 1 s; závaží se oddělí od pístu pro amplitudu x_m = ?

a) Závaží se oddělí, když v amplitudě bude hodnota zrychlení větší než g

$$x = x_m \cos(\omega t)$$

$$a = \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x_m \cos(\omega t) \Rightarrow \text{amplituda zrychlení} \quad a_m = \omega^2 x_m$$

$$\omega = 2\pi / T\,,\ g < a_m \Rightarrow x_m > \frac{g}{\omega^2} = \frac{gT^2}{4\pi^2}$$

b) x_m = 5 cm; f_{max} = ?

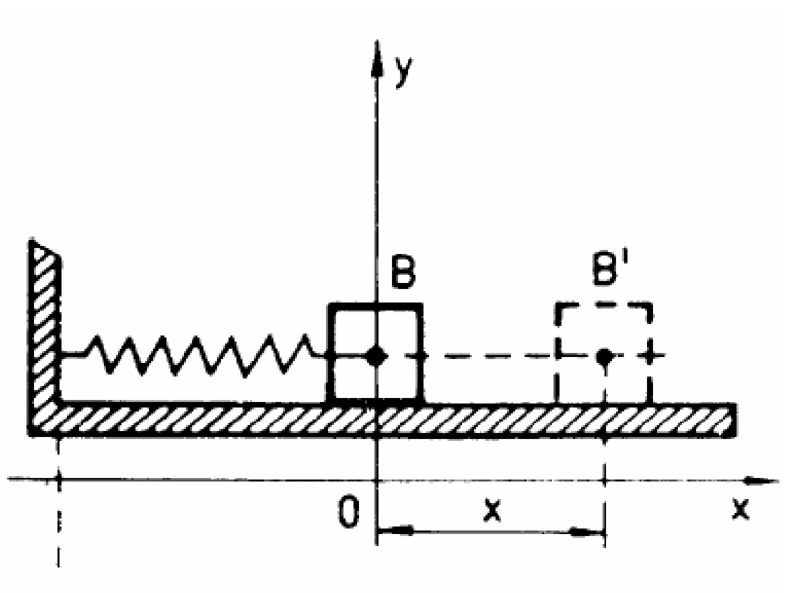
$$a_m \le g \Rightarrow \omega_{\max}{}^2 x_m \le g,\ \omega = 2\pi f_{\max} \Rightarrow f_{\max} \le \sqrt{\frac{g}{4\pi^2 x_m}}$$

Energie harmonických kmitů

Uvažujme o hmotném bodu B o hmotnosti m kmitajícím na pružině, jejíž tuhost je k.

Elastická síla je $F = -k.x$

Tento kmitající hmotný bod má:



① **kinetickou energii**

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 ,$$

② **potenciální energii**

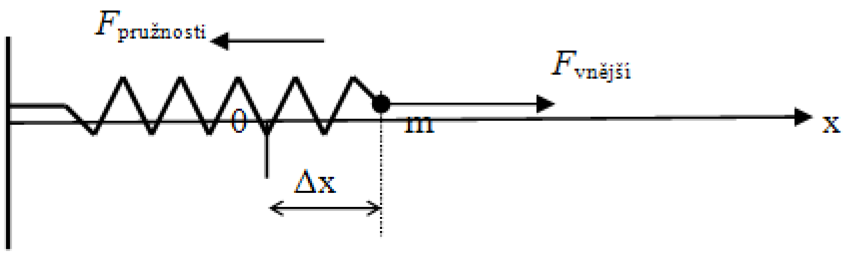
$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

Počáteční podmínky: $x(0) = 0$; $v(0) = \omega x_m$

Energie harmonických kmitů

Poznámka:
Odvození vztahu pro potenciální energii kmitavého pohybu

Změna potenciální energie je rovna práci vnější síly, která způsobí protažení pružiny



$$\Delta E_p = E_{p_2} - E_{p_1} = W = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} kx dx = \left[\frac{1}{2}kx^2\right]_{x_1}^{x_2} =$$

$$= \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2; \quad \text{pro } x_1 = 0 \text{ dostáváme } E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

Energie harmonických kmitů

Rovnice harmonických kmitů pak je:

$$x = x_m \cdot \sin(\omega t), \text{ kde } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Rychlost $v = \dot{x} = \omega x_m \cos(\omega t) \Rightarrow$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 x_m^{\ 2} \cos^2(\omega t)$$

Dosadíme $k = m\omega^2$

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 x_m^{\ 2} \sin^2(\omega t)$$

Celková mechanická energie hmotného bodu je

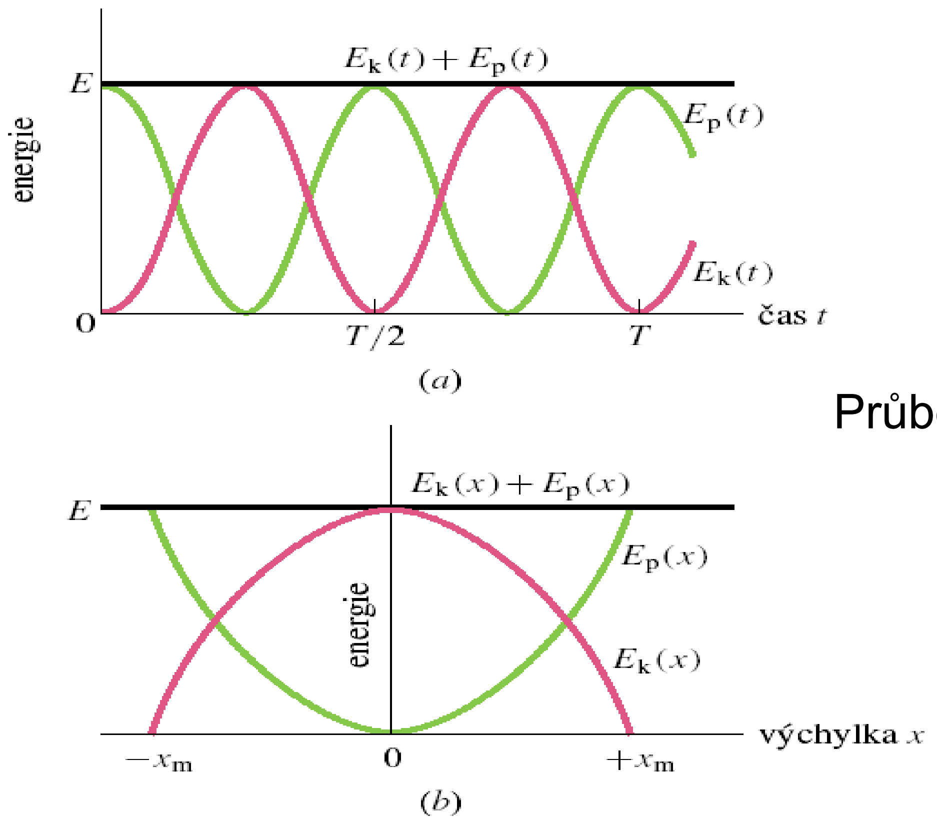
$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 x_m^{\ 2} \left(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)\right)$$

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 x_m^{\ 2} = \frac{1}{2} k x_m^{\ 2}$$

je nezávislá na čase

- zákon zachování mechanické energie

Př.9: Pomocí obrázku určete, kolikrát během jedné periody kinetická a potenciální energie dosáhnou svého maxima a kolikrát svého minima. Je možné, aby se celková energie rovnala *pouze okamžité* hodnotě energie kinetické, resp. okamžité hodnotě energie potenciální? V případě, že je to možné, určete, v jaké poloze se v takové situaci nachází kmitající těleso.



Průběh energie mechanického oscilátoru.

HRW 16.50

50Ú. Na pružině tuhosti $500\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$ visí těleso o hmotnosti $4{,}0\,\mathrm{kg}$. Přímo zespodu je do tělesa vstřelena kulka hmotnosti $50\,\mathrm{g}$. Kulka vnikne do tělesa rychlostí $150\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a uvízne v něm. (a) Určete amplitudu takto vyvolaného harmonického pohybu. (b) Jakou část mechanické energie kmitajícího systému představuje původní kinetická energie kulky?

[a) y_m = 16,7 cm ; b) E_k = 81 E_c]

16.50 - Návod k řešení

Těleso na pružině visí v rovnovážné poloze. Při nárazu střely platí ZZH. Vyvolané harmonické kmity => $x = x_m \sin(\omega t)$. Rychlost v_1 po nárazu představuje amplitudu rychlosti harmonických kmitů.

a) v_0 = 150m/s; M = 4 kg; m = 50 g; k = 500 N/m; x_m = ?

$$\text{ZZH}: mv_0 = (M+m)v_1 \Rightarrow v_1 = \frac{mv_0}{(M+m)}$$

$$x = x_m \sin(\omega t);\ v = \frac{dx}{dt} = \overbrace{\omega x_m}^{v_m} \cos(\omega t) \Rightarrow \omega x_m = v_1$$

$$\text{2.N.z.}: F = (M+m)a \qquad x = x_m \sin(\omega t)$$

$$\text{Hook.z.}: F = -kx \qquad a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$-kx = -(M+m)\omega^2 x \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{(M+m)}}$$

$$x_m = \frac{v_1}{\omega} = \frac{mv_0}{\sqrt{(m+M)k}}$$

b) Kinetická energie střely E_k; celková energie kmitajícího systému E_c

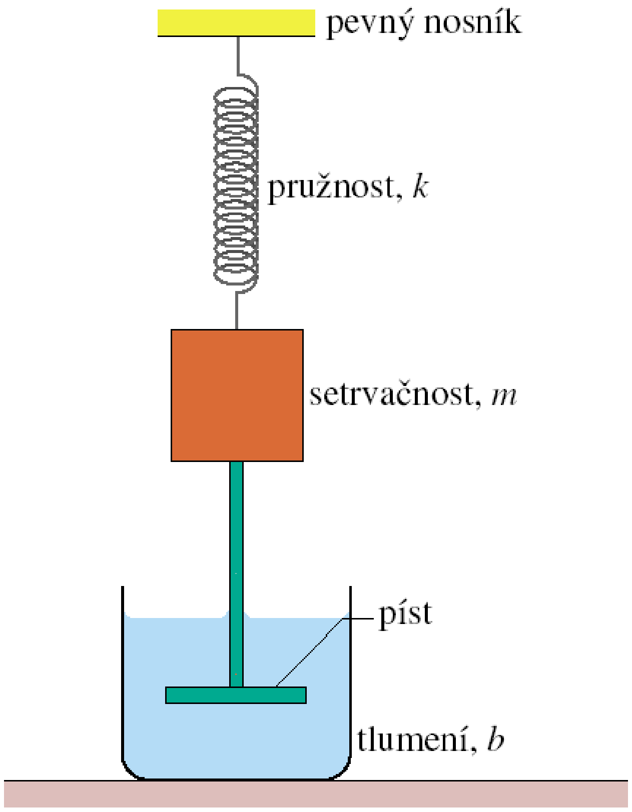
$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^{\ 2}; E_c = \frac{1}{2}(m+M)v_1^{\ 2} \Rightarrow \frac{E_k}{E_c} = \frac{m+M}{m}$$

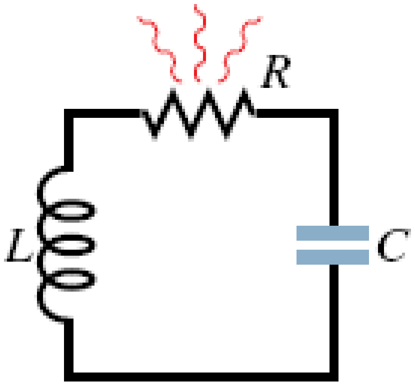
Tlumené kmity

Reálné oscilátory během kmitání **průběžně ztrácejí svou energii kmitů**

$\Rightarrow$ **snižování amplitudy** kmitů až do jejich úplného zániku.

Příčina tlumení - různé odporové (tlumící) síly, např. odpor prostředí, tření, nebo vyzařování elektromagnetické energie (elektrické kmity).





Tlumené kmity

Mechanické tlumící síly - **závislé na rychlosti kmitů**

Tlumící síla míří vždy proti směru rychlosti kmitů $F_{tlum} = -bv$

b je **koeficient odporu prostředí** (jednotka: 1 kg.s^{-1}).

Pohybová rovnice

$$\overrightarrow{F_{pruž}} + \overrightarrow{F_{tlum}} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \boxed{-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}}$$

Po malé úpravě **pohybová rovnice vlastních tlumených kmitů**

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0}$$

Lineární diferenciální rovnicí 2. řádu s konstantními koeficienty, s nulovou pravou stranou

$\delta = \dfrac{b}{2m}$ **je konstanta útlumu,** $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ **je úhlová frekvence vlastních netlumených kmitů oscilátoru**

Tlumené kmity

Řešení hledáme ve tvaru:

$$x = C e^{\lambda t}$$

C je konstanta a λ je kořenem tzv. charakteristické rovnice (dostaneme dosazením předpokládaného řešení do pohybové rovnice)

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0$$

Kořeny charakteristické rovnice:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$$

Tři různé situace:

a) Pro $\delta > \omega$ (tzv. **silný útlum**) dostaneme dva různé reálné kořeny (záporné).

b) Pro $\delta = \omega$ (tzv. **kritické tlumení**) dostaneme jeden dvojnásobný kořen reálný.

c) Pro $\delta < \omega$ (tzv. **slabý útlum**) dostaneme dva komplexně sdružené kořeny.

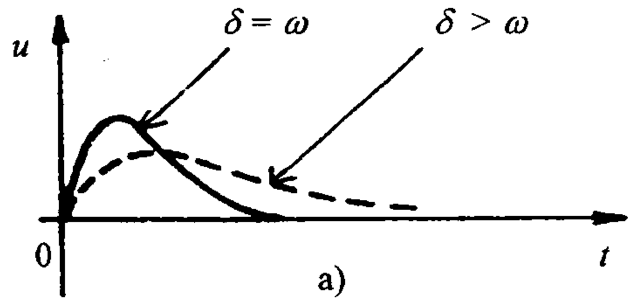
Tlumené kmity

a) Silné tlumení $\delta > \omega$

Řešení rovnice (okamžitá výchylka): $x = x_{m_1} e^{\lambda_1 t} + x_{m_2} e^{\lambda_2 t}, \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$

b) Kritické tlumení $\delta = \omega$

Řešení rovnice (okamžitá výchylka): $x = x_m e^{-\delta t}$



Časový průběh okamžité výchylky z rovnovážné polohy

V obou případech je **výsledný pohyb aperiodický**, oscilátor se z počáteční výchylky asymptoticky přibližuje k rovnovážné poloze.

V případě kritického tlumení je toto přiblížení k rovnováze rychlejší, což je (i přes větší hodnotu výchylky z rovnovážného stavu) výhodnější, pokud chceme kmity tlumit (např. stavby vs. zemětřesení).

Tlumené kmity

c) Slabé tlumení

Řešení pohybové rovnice:

$$x = x_m e^{-bt/(2m)} \cos(\omega_{tl} t + \varphi_0)$$

Kmity jsou **periodické, s amplitudou, která s časem exponenciálně klesá:**

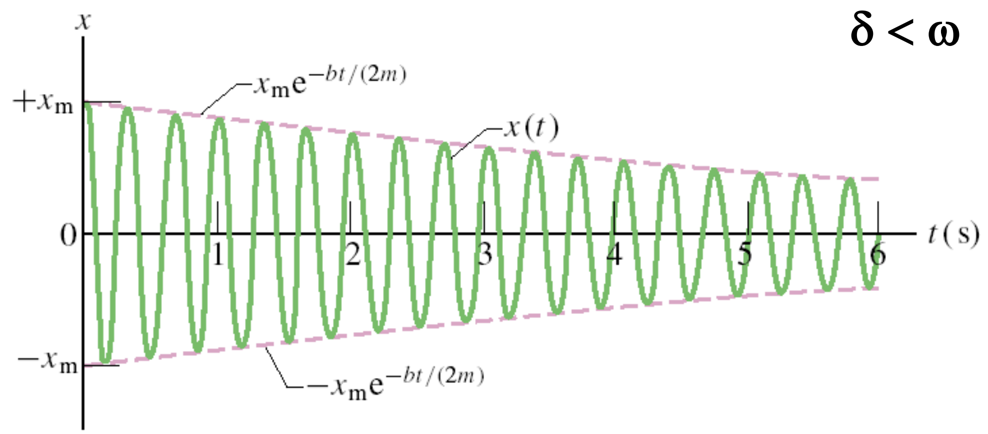
$$x_m^{/}(t) = x_m e^{-bt/(2m)}$$

Úhlová frekvence tlumených kmitů ω_{tl} je vždy menší než úhlová frekvence ω netlumených kmitů **téhož** oscilátoru:

$$\boxed{\omega_{tl} = \sqrt{\omega^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}}$$

Časový průběh slabě tlumených kmitů

$\delta < \omega$



Tlumené kmity

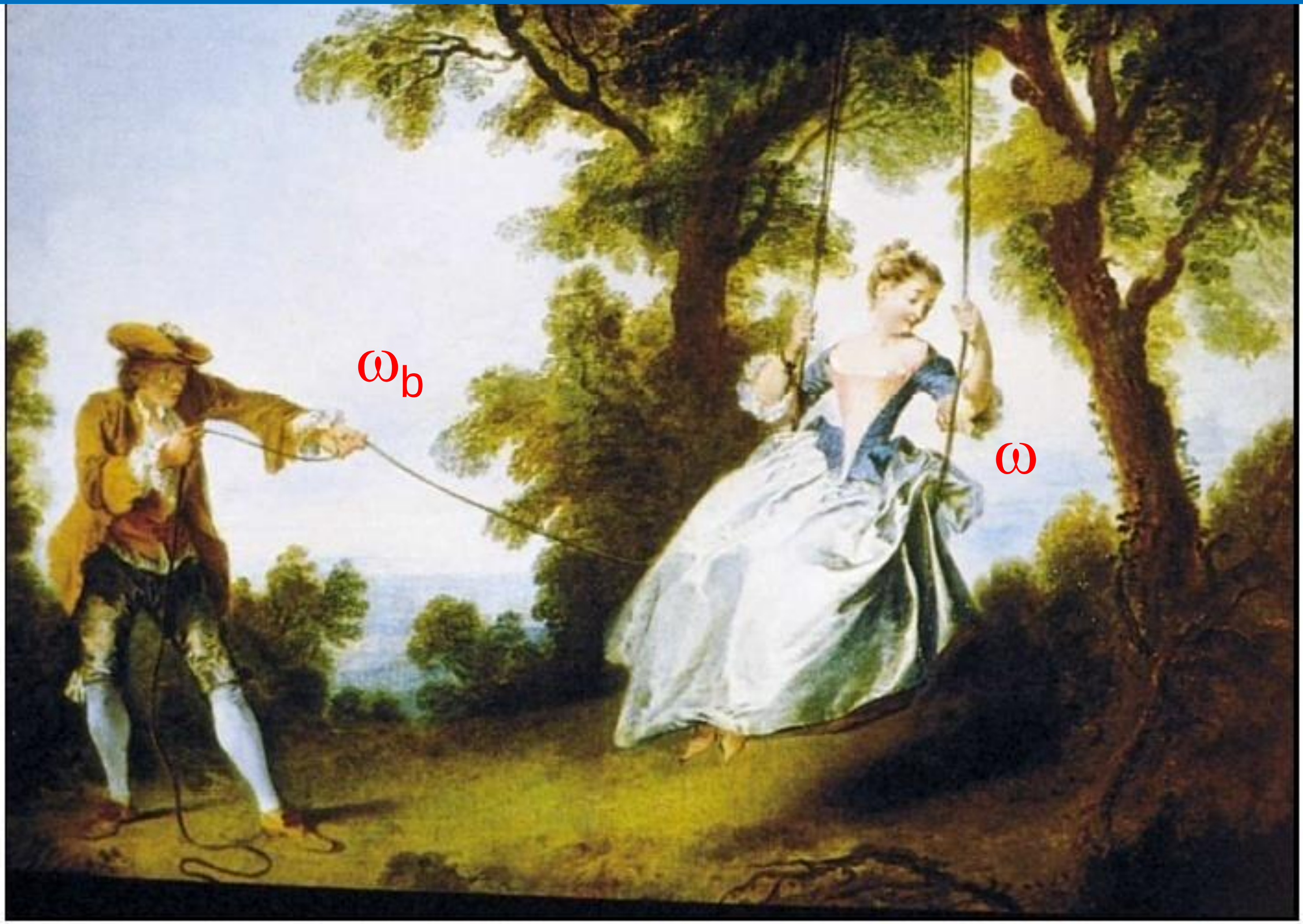
Protože amplituda výchylky slabě tlumených kmitů klesá exponenciálně s časem

$$x_m^{/}(t) = x_m e^{-bt/(2m)}$$

klesá exponenciálně s přibývajícím časem **energie** tlumeného lineárního harmonického oscilátoru

$$E \approx \frac{1}{2} k x_m^2 e^{-bt/m}$$

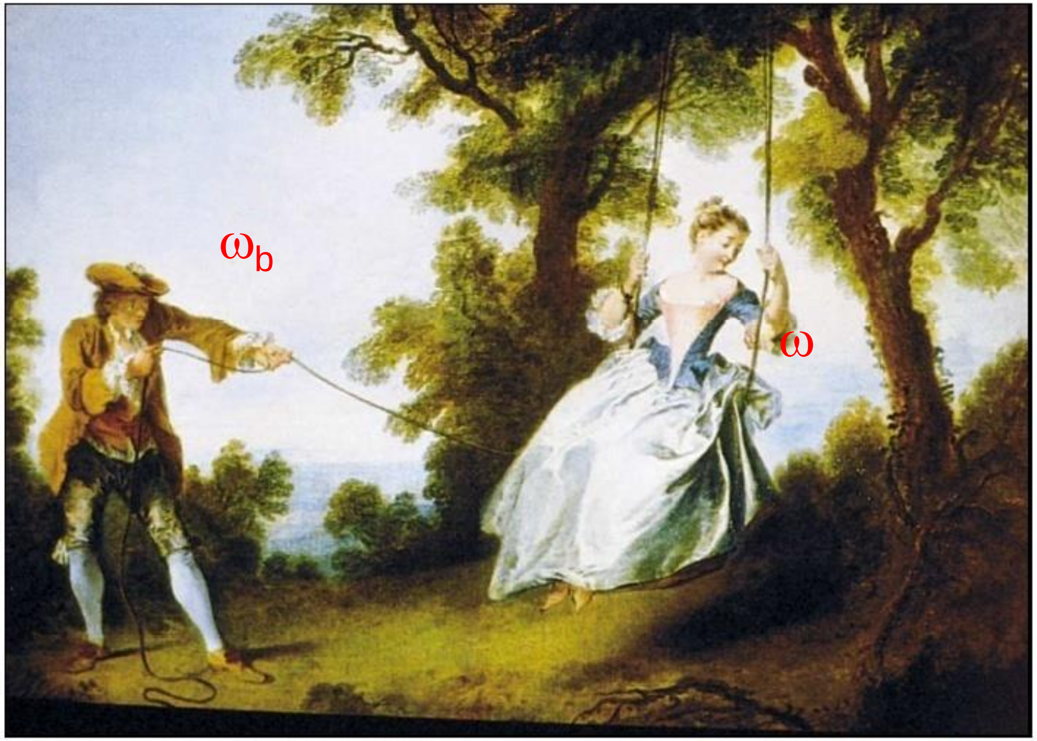
Nucené kmity



volné a nucené kmity, tj. dvě frekvence:

- úhlová frekvence vlastních kmitů ω
- úhlová frekvence budící síly ω_b

Nucené kmity



$x(t)$? Jaká bude výchylka nucených kmitů?

V systému působí:

- pružná síla ($\rightarrow$ vlastní kmity)
- brzdná síla ($\rightarrow$ tlumení)
- harmonická budící síla

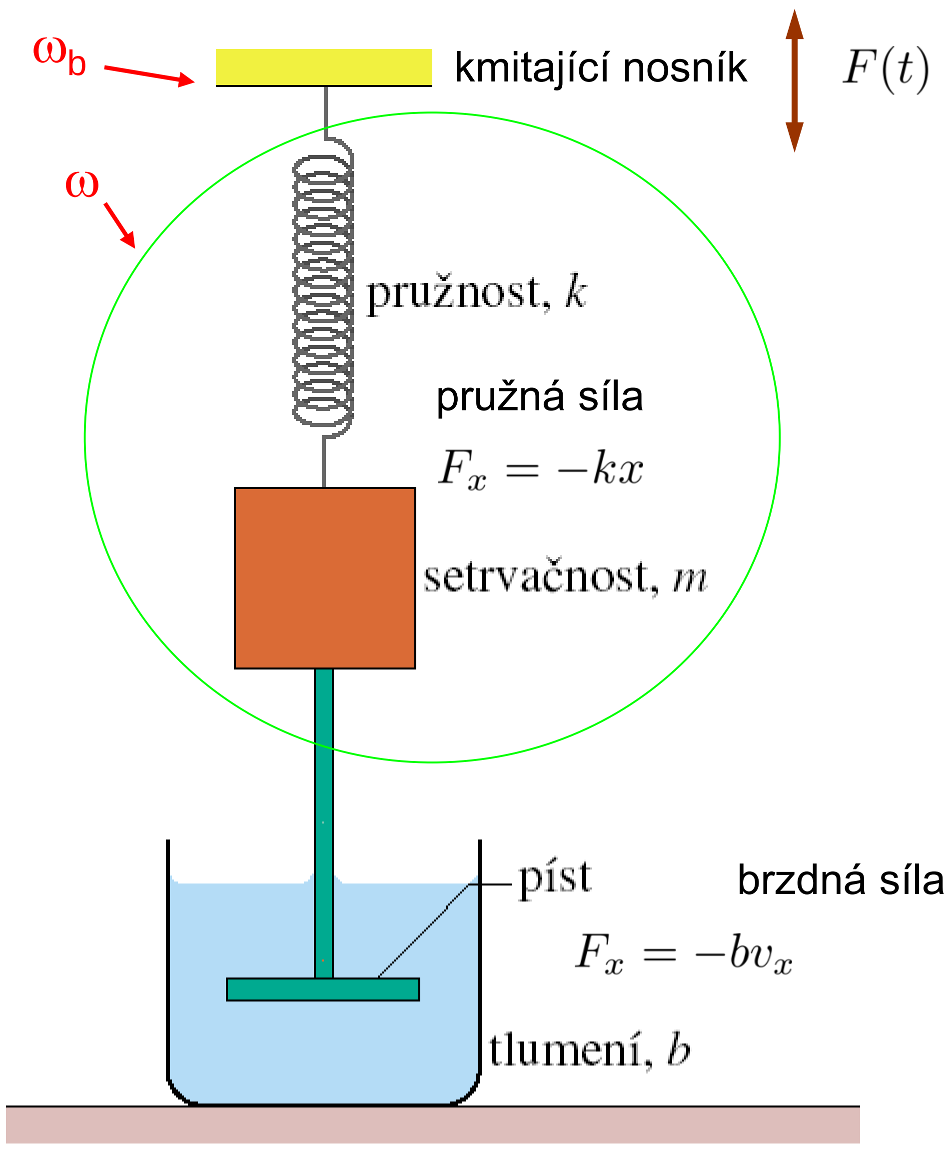
$$F(t) = F_{\mathrm{m}} \cos(\omega_{\mathrm{b}} t)$$

Po zapnutí budící síly: pohyb je superpozicí (vlastních) tlumených kmitů a nucených kmitů.
Po dostatečně dlouhé době: tlumené kmity vymizí a systém přejde do ustáleného stavu (nezávisí na počátečních podmínkách), tj. vykonává pouze nucené kmity. **Jaká je jejich amplituda a fázový posun vůči budící síle?**

? ?

$$x(t) = x_{\mathrm{m}} \cos(\omega_{\mathrm{b}} t + \varphi)$$

Nucené kmity



$$F(t) = F_{\mathrm{m}} \cos(\omega_{\mathrm{b}} t)$$

? ?

$$x(t) = x_{\mathrm{m}} \cos(\omega_{\mathrm{b}} t + \varphi)$$

pohybová rovnice

$$ma_x = -kx - bv_x + F_{\mathrm{m}} \cos(\omega_{\mathrm{b}} t)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{b}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}x = \frac{F_{\mathrm{m}}}{m}\cos(\omega_{\mathrm{b}} t)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = f_{\mathrm{m}} \cos(\omega_b t)$$

$$\delta = \frac{b}{2m}, \quad \omega^2 = \frac{k}{m}, \quad f_{\mathrm{m}} = \frac{F_{\mathrm{m}}}{m}$$

Nucené kmity

Řešení pohybové rovnice **nucených kmitů ve stacionárním, tj. ustáleném stavu** (po utlumení vlastních kmitů)

$$\boxed{x(t)_{stac} = \frac{f_m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_b^{\;2})^2 + 4\delta^2\omega_b^{\;2}}}\cos(\omega_b t - \Psi)}$$

Amplituda stacionárních kmitů závisí na amplitudě budící síly

Velikost amplitudy je tím větší, čím menší je rozdíl $\omega^2 - \omega_b^2$ (tj. úhlová frekvence budící síly blízká úhlové frekvenci vlastních kmitů) a čím menší je δ (slabé tlumení)

Maximum amplitudy (**amplitudová rezonance**) nastane pro:

$$\boxed{(\omega_b)_{rez} = \sqrt{\omega^2 - 2\delta^2}}$$

úhlová frekvence ω_b nucených kmitů v ustáleném stavu je **stejná jako u budící síly**

Ψ vyjadřuje **fázové zpoždění nucených kmitů za budící silou**

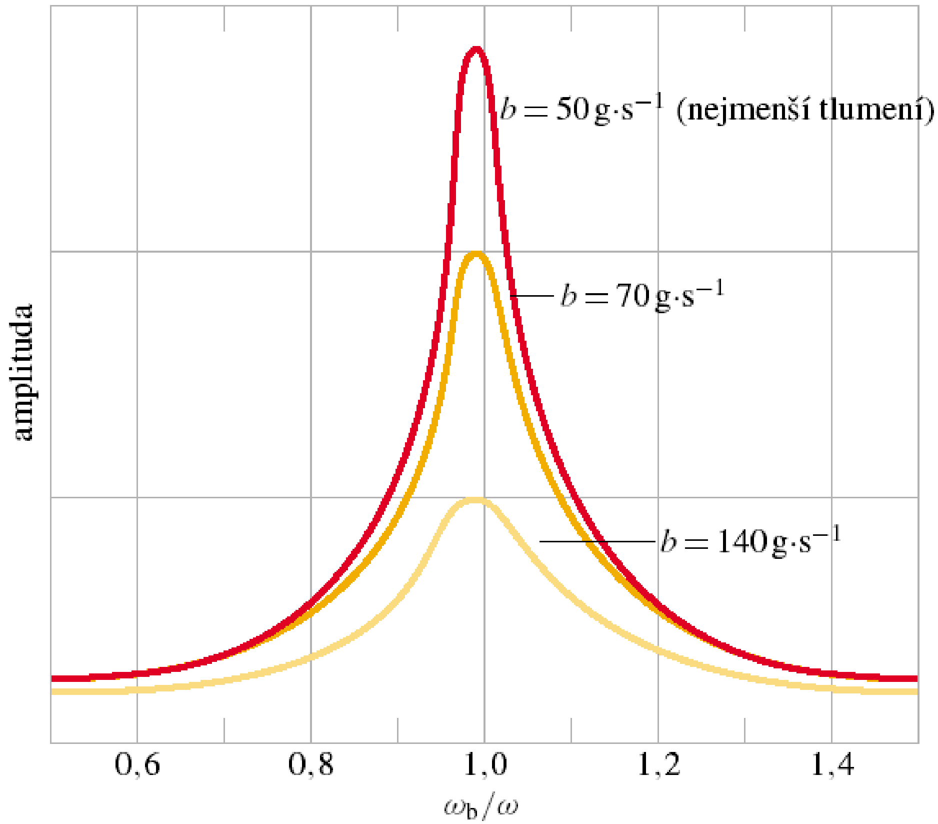
$$tg\Psi = \frac{2\delta\omega_b}{\omega^2 - \omega_b^2}$$

- Amplituda i fáze jsou funkcemi budící frekvence.
- Fáze nezávisí na amplitudě budící síly.

Nucené kmity - rezonance

K velkému zesílení (rezonanci) amplitudy kmitů dochází pro $\delta \ll \omega$ a $\omega_b \sim \omega$

(slabé tlumení & frekvence budící síly je rovna frekvenci vlastních kmitů oscilátoru)



Amplituda výchylky nucených kmitů při rezonanci

Odchylka od rovnosti úhlových frekvencí je způsobena tím, že v praxi máme vždy tlumení $\delta \neq 0$

Nucené kmity - rezonance

Nežádoucí rezonance - vede např.k narušení konstrukce staveb…..

http://www.aldebaran.cz/animace/

Žádoucí rezonance – rezonanční elektrické obvody