Základy matematiky a statistiky pro humanitní obory I

Vojtěch Kovář

Fakulta informatiky, Masarykova univerzita
Botanická 68a, 602 00 Brno, Czech Republic

xkovar3@fi.muni.cz

část 1

Obsah přednášky

1 Informace o předmětu

2 Motivace

3 Principy matematiky

Informace o předmětu

- Obsah předmětu
  - průřez vysokoškolskou matematikou
  - forma srozumitelná studentům s humanitním zaměřením (lingvistika)
- Ukončení předmětu
  - zkouška formou 2 písemek
  - vnitrosemestrální písemka 6.11. → 25 bodů
  - zkoušková písemka → 75 bodů
  - úspěšné ukončení → alespoň 60 bodů z písemek
- Odpadající přednášky
  - 9.10., 20.11. (reading week)

Obsah předmětu

- Okruhy
  - matematická logika, důkazy, indukce
  - základy teorie množin, čísla, relace, funkce
  - ekvivalence, uspořádání
  - kombinatorika, popisná statistika

Obsah předmětu

- Zdroje informací
  - slidy a příklady ve studijních materiálech
  - studijní text k předmětu
  - literatura na stránce předmětu (přesahuje rámec předmětu)
  - osobní konzultace (naživo i on-line)
  - přednášky na YouTube z minulých semestrů

    https://youtube.com/playlist?list=PLifvhlXnhUAkVIN2Hub4BfKGrBQEjfH4d
  - diskusní fórum – současné i z časů lockdownu

    https://is.muni.cz/auth/discussion/predmetove/phil/podzim2020/PLIN004/

    ?fakulta=1421;obdobi=7923;predmet=1298559

Rozdíl mezi SŠ a VŠ matematikou

- Středoškolská matematika
  - $=$ počty s čísly:
  - $\rightarrow$ kolik budu platit v obchodě (sčítání)
  - $\rightarrow$ jaké daně budu mít (zlomky, procenta)
  - $\rightarrow$ proč, proč? (matice, integrály)
- Vysokoškolská matematika
  - $=$ umění abstrakce $+$ přemýšlení v obecnostech
  - $\rightarrow$ zásobárna abstraktních pojmů
  - $\rightarrow$ přesné definice
  - $\rightarrow$ spolehlivé vyvozování závěrů (důkazy)
  - $\rightarrow$ základ pro všechny technické obory

Proč potřebují lingvisté matematiku?

- Počítačová lingvistika
    - zpracování jazyka na počítačích
    - potřeba solupracovat s technicky zaměřenými lidmi
    - $\rightarrow$ pochopit jejich způsob myšlení
    - počítačové modely jazyka jsou založeny na matematických faktech
- Abstraktní myšlení
    - schopnost rozumově uchopit složité pojmy
    - $\rightarrow$ snazší pochopení lingvistických modelů
    - schopnost zobecňovat
    - schopnost rozkládat složité problémy na jednodušší
    - $\rightarrow$ nejsou tak důležité vědomosti samotné jako dovednosti, kterým se při jejich vstřebávání naučíte

Principy vysokoškolské matematiky

- Středoškolská matematika
  - návody, jak něco spočítat
- Vysokoškolská matematika
  - soubor poznatků o abstraktních pojmech
  - styl definice – věta – důkaz :
  - definice = vymezení pojmu
    - "celé číslo x je sudé, pokud

Principy vysokoškolské matematiky

- Středoškolská matematika
  - návody, jak něco spočítat
- Vysokoškolská matematika
  - soubor poznatků o abstraktních pojmech
  - styl definice – věta – důkaz :
  - definice = vymezení pojmu
    - "celé číslo x je sudé, pokud existuje takové celé y, že $y * 2 = x$"

Principy vysokoškolské matematiky

- Středoškolská matematika
  - návody, jak něco spočítat
- Vysokoškolská matematika
  - soubor poznatků o abstraktních pojmech
  - styl definice – věta – důkaz :
  - definice = vymezení pojmu
    - "celé číslo x je sudé, pokud existuje takové celé y, že $y * 2 = x$"
  - věta = formulace poznatku o definovaných pojmech
    - "10 je sudé číslo"
  - důkaz = ověření pravdivosti věty krok za krokem
    - $10 = 5 * 2$ (zákl. aritmetika)
    - tedy existuje takové celé y, že $y * 2 = x$ $(y = 5)$
    - tedy 10 je sudé

Typy důkazů

- Přímý důkaz
  - použitím definic a známých faktů přímo odvodíme znění věty
- Důkaz sporem
  - předpokládáme, že věta neplatí (platí její negace)
  - použitím definic a známých faktů odvodíme spor
  - (např. $1 = 0$ nebo neplatnost některého z předpokladů)
- Důkaz indukcí
  - dokazujeme něco pro posloupnost objektů
  - příště

Ukázky důkazů

- Mějme definováno (znáte ze SŠ)
  - celá čísla (1, 2, 3, ..., 0, -1, -2, ...)
  - sčítání, odčítání, násobení a dělení na celých číslech
  - dělitele (x je dělitelem a, pokud

Ukázky důkazů

- Mějme definováno (znáte ze SŠ)
  - celá čísla (1, 2, 3, ..., 0, -1, -2, ...)
  - sčítání, odčítání, násobení a dělení na celých číslech
  - dělitele (x je dělitelem a, pokud existuje takové celé y, že $y * x = a$)

Ukázky důkazů

- Mějme definováno (znáte ze SŠ)
  - celá čísla (1, 2, 3, ..., 0, -1, -2, ...)
  - sčítání, odčítání, násobení a dělení na celých číslech
  - dělitele (x je dělitelem a, pokud existuje takové celé y, že $y * x = a$)
  - racionální čísla (r/s taková, že r a s jsou celá a nemají společného dělitele jiného než 1 a -1)
  - druhou mocninu ($a^2 =$

Ukázky důkazů

- Mějme definováno (znáte ze SŠ)
  - celá čísla (1, 2, 3, ..., 0, -1, -2, ...)
  - sčítání, odčítání, násobení a dělení na celých číslech
  - dělitele (x je dělitelem a, pokud existuje takové celé y, že $y * x = a$)
  - racionální čísla (r/s taková, že r a s jsou celá a nemají společného dělitele jiného než 1 a -1)
  - druhou mocninu ($a^2 = a * a$)

Ukázky důkazů

- Mějme definováno (znáte ze SŠ)
  - celá čísla (1, 2, 3, ..., 0, -1, -2, ...)
  - sčítání, odčítání, násobení a dělení na celých číslech
  - dělitele (x je dělitelem a, pokud existuje takové celé y, že $y * x = a$)
  - racionální čísla (r/s taková, že r a s jsou celá a nemají společného dělitele jiného než 1 a -1)
  - druhou mocninu ($a^2 = a * a$)
  - druhou odmocninu ($\sqrt{a} = n$, pokud

Ukázky důkazů

- Mějme definováno (znáte ze SŠ)
  - celá čísla (1, 2, 3, ..., 0, -1, -2, ...)
  - sčítání, odčítání, násobení a dělení na celých číslech
  - dělitele (x je dělitelem a, pokud existuje takové celé y, že $y * x = a$)
  - racionální čísla (r/s taková, že r a s jsou celá a nemají společného dělitele jiného než 1 a -1)
  - druhou mocninu ($a^2 = a * a$)
  - druhou odmocninu ($\sqrt{a} = n$, pokud $n * n = a$)

Ukázka důkazu

- Věta
  - pro libovolná celá x, y platí, že
  - pokud $2 * x^2 = y^2$, pak y je sudé

Ukázka důkazu

- Pokud $2 * x^2 = y^2$, pak y je sudé
- Důkaz (sporem)
    - předpokládejme, že y je liché

Ukázka důkazu

- Pokud $2 * x^2 = y^2$, pak y je sudé
- Důkaz (sporem)
    - předpokládejme, že y je liché
    - tedy existuje celé k tak, že $y = 2k + 1$

Ukázka důkazu

- Pokud $2 * x^2 = y^2$, pak y je sudé
- Důkaz (sporem)
  - předpokládejme, že y je liché
  - tedy existuje celé k tak, že $y = 2k + 1$
  - dosazením do původní věty dostáváme:
  - $2x^2 = (2k + 1)(2k + 1)$

Ukázka důkazu

- Pokud $2 * x^2 = y^2$, pak y je sudé
- Důkaz (sporem)
    - předpokládejme, že y je liché
    - tedy existuje celé k tak, že $y = 2k + 1$
    - dosazením do původní věty dostáváme:
    - $2x^2 = (2k + 1)(2k + 1)$
    - dále roznásobíme závorku:
    - $2x^2 = 4k^2 + 4k + 1$

Ukázka důkazu

- Pokud $2 * x^2 = y^2$, pak y je sudé
- Důkaz (sporem)
    - předpokládejme, že y je liché
    - tedy existuje celé k tak, že $y = 2k + 1$
    - dosazením do původní věty dostáváme:
    - $2x^2 = (2k + 1)(2k + 1)$
    - dále roznásobíme závorku:
    - $2x^2 = 4k^2 + 4k + 1$
    - vytkneme 2 z části pravé strany:
    - $2x^2 = 2 * (2k^2 + 2k) + 1$

Ukázka důkazu

- Pokud $2 * x^2 = y^2$, pak y je sudé
- Důkaz (sporem)
    - předpokládejme, že y je liché
    - tedy existuje celé k tak, že $y = 2k + 1$
    - dosazením do původní věty dostáváme:
    - $2x^2 = (2k + 1)(2k + 1)$
    - dále roznásobíme závorku:
    - $2x^2 = 4k^2 + 4k + 1$
    - vytkneme 2 z části pravé strany:
    - $2x^2 = 2 * (2k^2 + 2k) + 1$
    - odečtením výrazu $2 * (2k^2 + 2k)$ a vytknutím 2 z levé strany dostaneme:
    - $2 * (x^2 - (2k^2 + 2k)) = 1$

Ukázka důkazu

- Pokud $2 * x^2 = y^2$, pak y je sudé
- Důkaz (sporem)
  - předpokládejme, že y je liché
  - tedy existuje celé k tak, že $y = 2k + 1$
  - dosazením do původní věty dostáváme:
  - $2x^2 = (2k + 1)(2k + 1)$
  - dále roznásobíme závorku:
  - $2x^2 = 4k^2 + 4k + 1$
  - vytkneme 2 z části pravé strany:
  - $2x^2 = 2 * (2k^2 + 2k) + 1$
  - odečtením výrazu $2 * (2k^2 + 2k)$ a vytknutím 2 z levé strany dostaneme:
  - $2 * (x^2 - (2k^2 + 2k)) = 1$
  - tedy 1 je sudé číslo, což je spor.

Ukázka důkazu

- Věta
  - $\sqrt{2}$ není racionální číslo.

Ukázka důkazu

- Důkaz (sporem)
  - předpokládejme, že $\sqrt{2}$ je racionální číslo.

Ukázka důkazu

- Důkaz (sporem)
  - předpokládejme, že $\sqrt{2}$ je racionální číslo.
  - tedy $\sqrt{2} = r/s$, kde r a s jsou celá a nemají společného dělitele

Ukázka důkazu

- Důkaz (sporem)
  - předpokládejme, že $\sqrt{2}$ je racionální číslo.
  - tedy $\sqrt{2} = r/s$, kde r a s jsou celá a nemají společného dělitele
  - úpravou dostaneme: $\sqrt{2} * s = r$

Ukázka důkazu

- Důkaz (sporem)
  - předpokládejme, že $\sqrt{2}$ je racionální číslo.
  - tedy $\sqrt{2} = r/s$, kde r a s jsou celá a nemají společného dělitele
  - úpravou dostaneme: $\sqrt{2} * s = r$
  - $2 * s^2 = r^2$

Ukázka důkazu

- Důkaz (sporem)
  - předpokládejme, že $\sqrt{2}$ je racionální číslo.
  - tedy $\sqrt{2} = r/s$, kde r a s jsou celá a nemají společného dělitele
  - úpravou dostaneme: $\sqrt{2} * s = r$
  - $2 * s^2 = r^2$
  - tedy r je sudé, tj. $r = 2 * c$ pro nějaké celé c

Ukázka důkazu

- Důkaz (sporem)
  - předpokládejme, že $\sqrt{2}$ je racionální číslo.
  - tedy $\sqrt{2} = r/s$, kde r a s jsou celá a nemají společného dělitele
  - úpravou dostaneme: $\sqrt{2} * s = r$
  - $2 * s^2 = r^2$
  - tedy r je sudé, tj. $r = 2 * c$ pro nějaké celé c
  - nahrazením dostaneme: $2 * s^2 = 2 * c * 2 * c$

Ukázka důkazu

- Důkaz (sporem)
  - předpokládejme, že $\sqrt{2}$ je racionální číslo.
  - tedy $\sqrt{2} = r/s$, kde r a s jsou celá a nemají společného dělitele
  - úpravou dostaneme: $\sqrt{2} * s = r$
  - $2 * s^2 = r^2$
  - tedy r je sudé, tj. $r = 2 * c$ pro nějaké celé c
  - nahrazením dostaneme: $2 * s^2 = 2 * c * 2 * c$
  - $s^2 = 2 * c^2$

Ukázka důkazu

- Důkaz (sporem)
  - předpokládejme, že $\sqrt{2}$ je racionální číslo.
  - tedy $\sqrt{2} = r/s$, kde r a s jsou celá a nemají společného dělitele
  - úpravou dostaneme: $\sqrt{2} * s = r$
  - $2 * s^2 = r^2$
  - tedy r je sudé, tj. $r = 2 * c$ pro nějaké celé c
  - nahrazením dostaneme: $2 * s^2 = 2 * c * 2 * c$
  - $s^2 = 2 * c^2$
  - tedy s je také sudé

Ukázka důkazu

- Důkaz (sporem)
  - předpokládejme, že $\sqrt{2}$ je racionální číslo.
  - tedy $\sqrt{2} = r/s$, kde r a s jsou celá a nemají společného dělitele
  - úpravou dostaneme: $\sqrt{2} * s = r$
  - $2 * s^2 = r^2$
  - tedy r je sudé, tj. $r = 2 * c$ pro nějaké celé c
  - nahrazením dostaneme: $2 * s^2 = 2 * c * 2 * c$
  - $s^2 = 2 * c^2$
  - tedy s je také sudé
  - r i s jsou sudá, tedy mají společného dělitele 2, což je spor s předpokladem.