

Základy matematiky a statistiky pro humanitní obory I

Vojtěch Kovář

Fakulta informatiky, Masarykova univerzita
Botanická 68a, 602 00 Brno, Czech Republic
xkovar3@fi.muni.cz

část 2



Obsah přednášky

- 1 Matematická logika
- 2 Výroková logika
- 3 Něco z predikátové logiky
- 4 Matematická indukce

Matematická logika – motivace

■ Jazyk matematiky

- přirozený jazyk je víceznačný
- „k jednání X na úřadě YZ potřebujete pas a řidičský průkaz nebo občanský průkaz“
- matematická fakta potřebujeme zapisovat přesně

■ Formalizace pojmu důkaz

- důkaz = posloupnost elementárních kroků
- to, co je „elementární“ je individuální
- logika zavádí přesnou definici elementárního kroku

Typy logik

- Výroková logika
 - výroky, logické funkce, pravidlo modus ponens
- Predikátová logika
 - predikáty, kvantifikátory
- Další typy logik
 - modální, temporální, fuzzy, intenzionální, ...
 - nebudeme se jimi zabývat
- Naším cílem je naučit se logiku prakticky používat
 - \rightarrow číst a psát
 - nikoli zkoumat její temná zákoutí (viz předmět „Matematická logika“ na FI)

Výroková logika

■ Výrok

- základní jednotka
- tvrzení, jemuž lze přiřadit pravdivostní hodnotu
- např. „ $a = 1$ “, „4 je prvočíslo“

■ Pravdivost

- přiřazení hodnoty 0 nebo 1 každému výroku
- zapisujeme $v(A) = 1$ („výrok A platí“)
- $v(A) = 0$ („výrok A neplatí“)

■ Logické funkce

- konstrukce složitějších výroků z výroků jednodušších

Logické funkce (1)

■ Základní logické funkce

- nechť A, B jsou výroky
- **negace** $\neg A$
- $v(\neg A) = 0$, je-li $v(A) = 1$
- $v(\neg A) = 1$, je-li $v(A) = 0$
- **implikace** $A \Rightarrow B$
- $v(A \Rightarrow B) = 0$, je-li $v(A) = 1$ a $v(B) = 0$
- $v(A \Rightarrow B) = 1$ v ostatních případech
- kombinací těchto funkcí lze vyjádřit všechny ostatní logické funkce

Logické funkce (2)

■ Odvozené logické funkce

- **konjunkce** $A \wedge B$ (logické „a“)
- $v(A \wedge B) = 1$, je-li $v(A) = 1$ a $v(B) = 1$
- $v(A \wedge B) = 0$ v ostatních případech
- **disjunkce** $A \vee B$ (logické „nebo“)
- $v(A \vee B) = 0$, je-li $v(A) = 0$ a $v(B) = 0$
- $v(A \vee B) = 1$ v ostatních případech
- **ekvivalence** $A \Leftrightarrow B$
- $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

Odvozování

■ Schémata axiomů

- pro libovolné výroky A , B , C platí
- $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
- $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
- $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
- dosazením konkrétních výroků vzniknou **axiomy**

■ Odvozovací pravidlo modus ponens

- pokud platí A a platí $A \Rightarrow B$, pak platí B

■ Formální definice důkazu

- posloupnost výroků, z nichž každý je buď axiom nebo výsledek aplikace odvozovacího pravidla na předchozí výroky

Příklad důkazu: $X \Rightarrow X$

■ Schémata axiomů

- $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
- $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
- $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

■ Dokazujeme, že pro libovolný výrok X platí $X \Rightarrow X$

- 1 $(X \Rightarrow ((X \Rightarrow X) \Rightarrow X)) \Rightarrow ((X \Rightarrow (X \Rightarrow X)) \Rightarrow (X \Rightarrow X))$ / axiom 2
- 2 $X \Rightarrow ((X \Rightarrow X) \Rightarrow X)$ / axiom 1
- 3 $(X \Rightarrow (X \Rightarrow X)) \Rightarrow (X \Rightarrow X)$ / aplikace modus ponens na 2. a 1.
- 4 $X \Rightarrow (X \Rightarrow X)$ / axiom 1
- 5 $X \Rightarrow X$ / aplikace modus ponens na 4. a 3.

Něco z predikátové logiky

■ Ohodnocení proměnných

- formule („výroky“) mohou obsahovat proměnné ($x = 1$)
- pravdivost pak závisí na ohodnocení, tj. přiřazení hodnot proměnným

■ Kvantifikátory

- \exists – existuje alespoň jedno ohodnocení, při kterém formule platí
- \forall – výrok platí pro všechna možná ohodnocení
- např.: $\exists x(x = 0 \wedge x = 1)$

Něco z predikátové logiky (2)

■ Funkční symboly

- kombinují objekty, se kterými zacházíme (množiny, čísla)
- výsledkem je další objekt
- např. plus, množinové sjednocení
- např. $+(x, y)$, resp. $x + y$

■ Predikáty

- vyjadřují fakta o konstantách a proměnných
- výstupem je pravdivostní hodnota
- např. $\text{Prime}(x)$ – „ x je prvočíslo“
- např. $\in(x, Y)$, resp. $x \in Y$ – „prvek x patří do množiny Y “

Něco z predikátové logiky (3)

■ Příklady složitějších formulí

- $\exists x(\exists k(x = 2k + 1) \wedge \exists m(x = 2m))$
- $\forall x(\text{Prime}(x) \Rightarrow \exists k(x = 2k))$
- $\exists x(\text{Prime}(x) \wedge \exists k(x = 2k))$
- dokážete je přečíst?

Matematická indukce

- Obecný matematický princip
 - použitelný pro definice, důkazy
 - napřed vyrobíme/dokážeme něco jednoduchého
 - → **báze indukce**
 - pak vyrobíme z obecného jednoduchého objektu o krok složitější objekt
 - případně dokážeme, že z platnosti pro jednoduchý objekt vyplývá platnost pro složitější objekt
 - → **indukční krok**
 - tím dostaneme nekonečnou řadu definic/důkazů

Induktivní definice

- **Báze indukce**
 - definujeme nejjednodušší prvky
- **Indukční krok**
 - popíšeme, jak se z jednodušších prvků vyrobí složitější
- **Příklad: induktivně definované posloupnosti**
 - definujeme nekonečnou posloupnost 3, 5, 7, 9, ...
 - báze indukce: $a_1 = 3$
 - indukční krok: $a_{n+1} = a_n + 2$

Induktivní definice (2)

■ Bází může být víc

- Fibonacciho posloupnost: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...
- báze indukce: $a_1 = 0$
- báze indukce: $a_2 = 1$
- indukční krok: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

■ Indukčních kroků může být víc

- definice toho, jak vypadá správná výroková formule
- báze indukce: libovolný jednoduchý výrok A je výroková formule
- indukční krok: pokud A je výroková formule, pak $\neg(A)$ je výroková formule
- indukční krok: pokud A a B jsou výrokové formule, pak $(A \Rightarrow B)$ je výroková formule

Důkaz matematickou indukcí

■ Princip

- potřebujeme dokázat, že pro všechny prvky nějaké posloupnosti x_0, \dots, x_n, \dots platí nějaký výrok A
- $\forall n(A(x_n))$
- dokážeme výrok pro x_0
- \rightarrow **báze indukce**
- dokážeme, že pokud výrok platí pro x_{i-1} , pak platí i pro x_i pro libovolné i
- $A(x_{i-1}) \Rightarrow A(x_i)$
- \rightarrow **indukční krok**
- levá strana implikace výše se nazývá **indukční předpoklad**

Příklad indukce

- Dokážeme, že pro všechna přirozená $n \geq 1$ platí:
 - $1 + 2 + \dots + n = n/2 * (1 + n)$
- Báze
 - $1 = 1/2 * (1 + 1)$
- Indukční krok
 - předpokládáme: $1 + 2 + \dots + k = k/2 * (1 + k)$
 - dokážeme:
 $1 + 2 + \dots + k + (k + 1) = (k + 1)/2 * (1 + (k + 1))$

Příklad indukce (2)

■ Indukční krok

■ předpokládáme: $1 + 2 + \dots + k = k/2 * (1 + k)$

■ **dokážeme:**

$$1 + 2 + \dots + k + (k + 1) = (k + 1)/2 * (1 + (k + 1))$$

■ $1 + 2 + \dots + k = k/2 * (1 + k)$

■ $1 + 2 + \dots + k + (k + 1) = k/2 * (1 + k) + (k + 1)$

■ $1 + 2 + \dots + k + (k + 1) = (k * (1 + k) + 2 * (k + 1))/2$

■ $1 + 2 + \dots + k + (k + 1) = (k + k^2 + 2k + 2)/2$

■ $1 + 2 + \dots + k + (k + 1) = (k^2 + 3k + 2)/2$

■ $1 + 2 + \dots + k + (k + 1) = (k + 1)(k + 2)/2$

■ $1 + 2 + \dots + k + (k + 1) = (k + 1)/2 * (1 + (k + 1))$

Proč to funguje?

■ Intuitivní ověření korektnosti

- báze \rightarrow platí $A(x_0)$
- indukční krok \rightarrow platí $(A(x_0) \Rightarrow A(x_1))$
- modus ponens \rightarrow platí i $A(x_1)$
- indukční krok \rightarrow platí $(A(x_1) \Rightarrow A(x_2))$
- modus ponens \rightarrow platí i $A(x_2)$
- atd. ad infinitum

■ Formální důkaz korektnosti matematické indukce

- sporem – předpokládáme, že nějaké $A(x_n)$ neplatí

Složitější typy indukce (1)

- Složitější indukční předpoklad
 - např. platí $A(x_{i-1})$ i $A(x_{i-2})$
 - musíme dokázat odpovídající bázi
 - tj. $A(x_0)$ i $A(x_1)$

Složitější typy indukce (2)

■ Strukturální indukce

- aplikujeme na induktivně definované objekty (např. výrokové formule)
 - báze indukce: věta platí pro jednoduché výroky
 - indukční krok 1: věta platí pro formuli A
 \Rightarrow platí i pro $\neg(A)$
 - indukční krok 2: věta platí pro formule A a B
 \Rightarrow platí i pro $(A \Rightarrow B)$
- Princip zůstává stejný, pouze vedení důkazu je komplikovanější
- Důkaz, že každá formule podle definice výše má sudý počet závorek?

Všichni koně mají stejnou barvu

- **Věta:** V každém stádě mají všichni koně stejnou barvu.
- **Důkaz:** indukcí vzhledem k velikosti stáda
 - **báze:** Ve stádě o 1 koni mají všichni stejnou barvu.
 - **indukční krok:** Předp., že věta platí pro dvě stáda o n koních; dokážeme, že platí pro stádo o velikosti $n + 1$
 - $S_1 = \{K_1, \dots, K_n\}$, $S_2 = \{K_2, \dots, K_{n+1}\}$
 - podle předpokladu mají v S_1 i v S_2 všichni koně stejnou barvu
 - koně K_2, \dots, K_n jsou v obou stádech \Rightarrow i barva obou stád je stejná
 - tedy i ve stádě $S = \{K_1, \dots, K_{n+1}\}$ mají všichni koně stejnou barvu
- Kde je problém? (zřejmě existují různí koně :))