

# Kmity mechanické a elektromagnetické - porovnání

07.11.2023

# Obsah

- **Volné mechanické kmity – popis a energie**
- **Elektromagnetické kmity – netlumené, LC kmitavý obvod, popis a energie**
- **Tlumené kmity – mechanické a elektromagnetické**
- **Nucené kmity – mechanické a elektromagnetické**

# Harmonické kmity - rozdělení

## Harmonické kmity

### Volné

Působí jediná síla = **elastická**

Amplituda je konstantní

Probíhají v čase  $t \in (t_0, +\infty)$

### Tlumené

Působí 2 síly: **elastická + tlumící**

Tlumící síla: tření, odpor prostředí aj.

Jsou **kvaziperiodické**. Amplituda klesá

s časem. Po dostatečně dlouhé době je amplituda prakticky nulová

### Vynucené

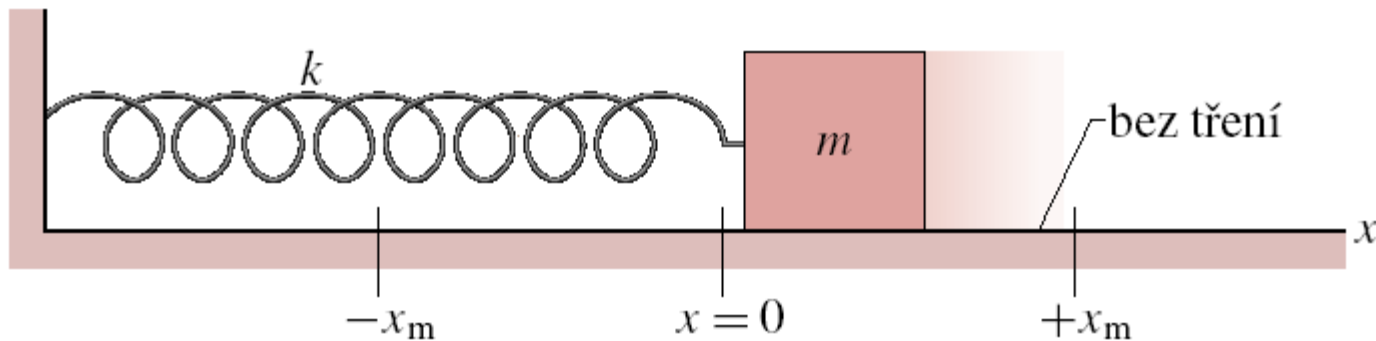
Působí 3 síly: **elastická + tlumící +  
+ vnější budící síla**

Kmitočet vynucených kmitů = kmitočtu budící síly.

Amplituda závisí na rozdílu kmitočtu volných kmitů a budícího kmitočtu

# Volné harmonické kmity

**Příčinou harmonického kmitání** mechanického oscilátoru je síla, která je přímo úměrná výchylce oscilátoru z rovnovážné polohy a stále směřuje do rovnovážné polohy (**síla pružnosti, elastická síla**).



2. Newtonův zákon

Zrychlení  $a$  je úměrné výchylce a míří proti ní

$$F_x = ma_x = -kx$$

Hookův zákon

výsledná síla je úměrná výchylce částice z rovnovážné polohy a orientovaná proti výchylce

$k$  – tuhost pružiny

# Volné harmonické kmity - popis

Převědeme všechny členy rovnice na pravou stranu:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0$$

Vydělíme hmotností  $m$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

**Pohybová rovnice  
vlastních kmitů**

Rovnice je formálně shodná s **diferenciální rovnicí harmonického pohybu**

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Srovnáním:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \quad k = m \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

**úhlová frekvence vlastních kmitů**

je plně určena vlastnostmi soustavy, tj.  
hmotností oscilátoru a tuhostí vazby

# Energie harmonických kmitů

Uvažujme o hmotném bodu  $B$  o hmotnosti  $m$  kmitajícím na pružině, jejíž tuhost je  $k$ .

**Elastická síla je**  $F = -k \cdot x$

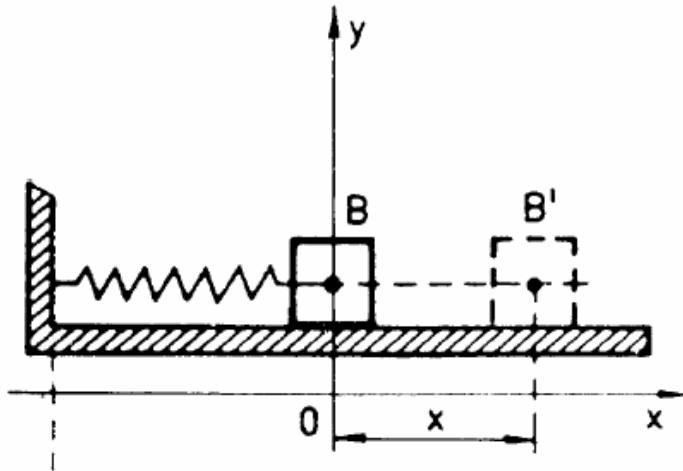
Tento kmitající hmotný bod má:

① **kinetickou energii**

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 ,$$

② **potenciální energii**

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$



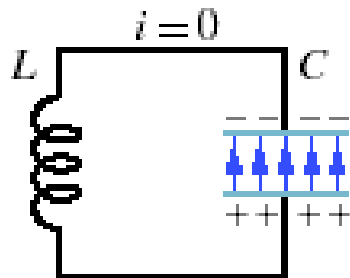
**Celková energie**  $E = E_p + E_k$  je nezávislá na čase:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 x_m^2 = \frac{1}{2} k x_m^2$$

**- zákon zachování  
mechanické energie**

# Elektromagnetické kmity

## Elektromagnetické kmity v sériovém obvodu s $L$ , $C$ .



$u_L$  .. okamžité napětí na cívce

$u_C$  .. okamžité napětí na kondenzátoru

Podle 2. Kirchhoffova zákona

$$u_L + u_C = 0 \quad , \text{ tj.}$$

$$L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

Protože  $i = \frac{dq}{dt}$  upravíme rovnici

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C} q = 0$$

tj.

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0.$$

Srovnání s obecnou rovnicí

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

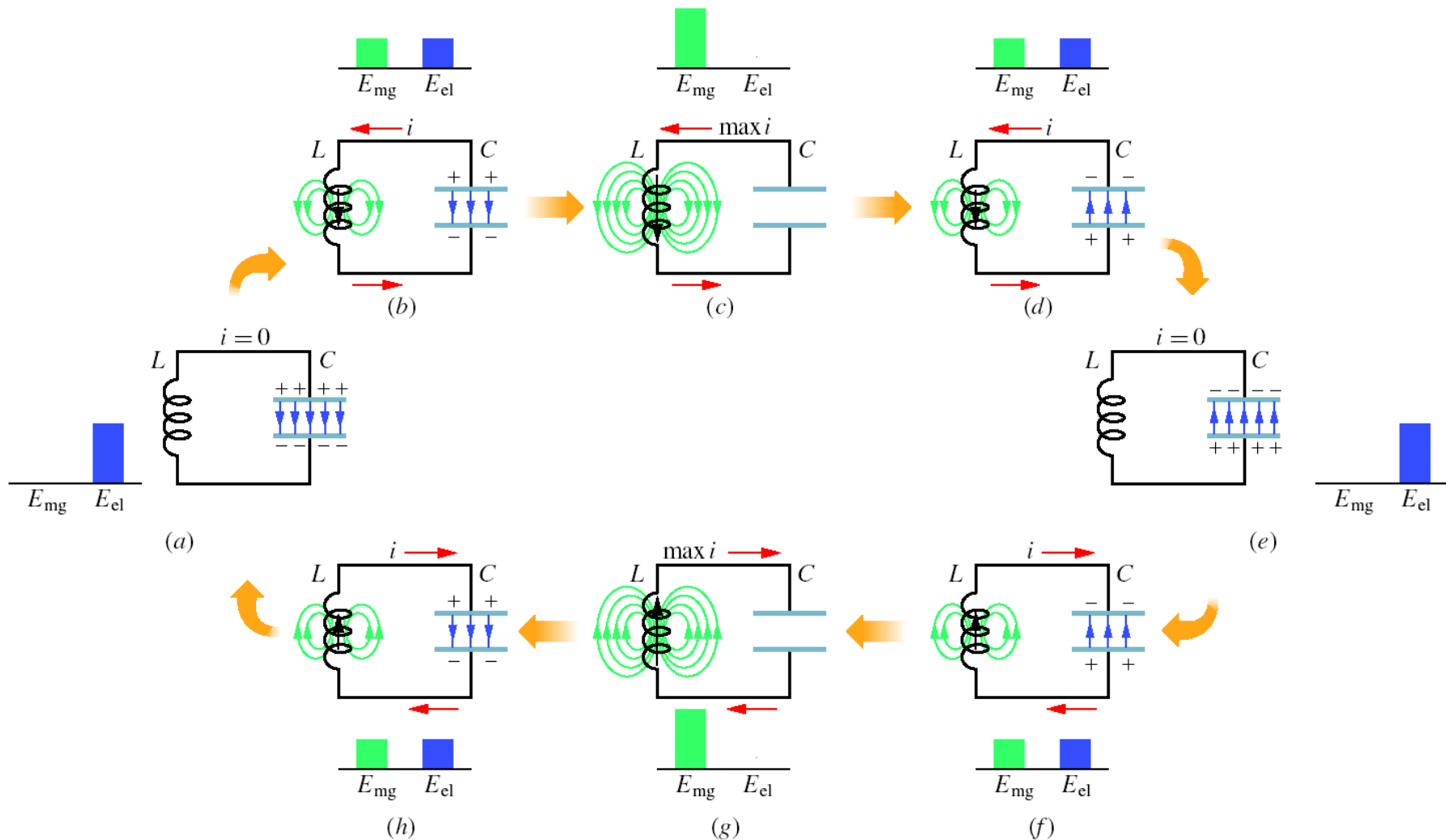
diferenciální “pohybová” rovnice elektrických kmitů v obvodu

⇒ **úhlová frekvence vlastních kmitů** elektrického obvodu

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

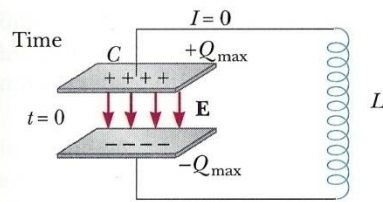
# Elektromagnetické kmity

Zachování energie:  $E = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{q^2}{2C} = \text{konst.}$

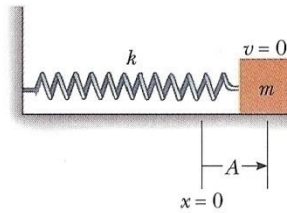




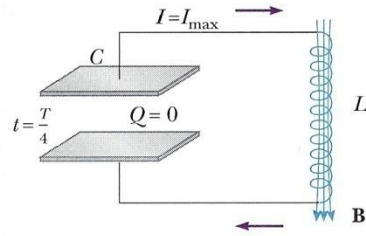
$$E = E_{mg} + E_{el} = \frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C}$$



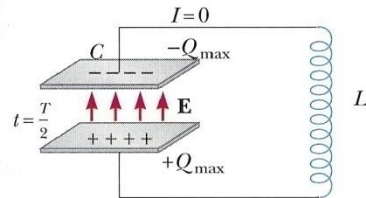
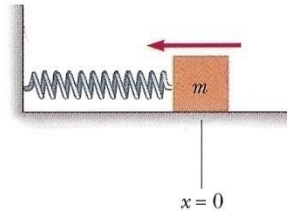
(a)



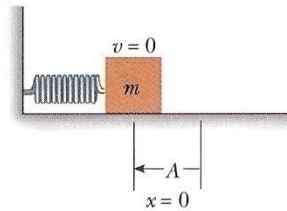
$$E = E_k + E_p = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$$



(b)

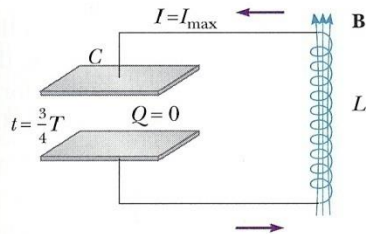


(c)

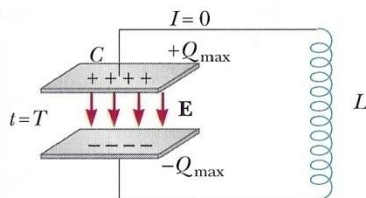
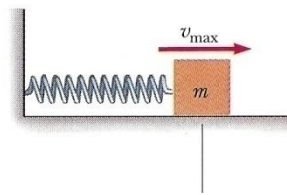


$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0$$

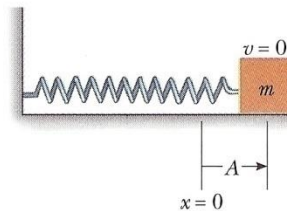
$$q(t) = Q \cos(\omega t + \varphi)$$



(d)



(e)



$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

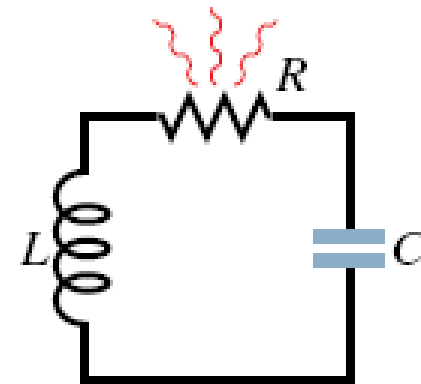
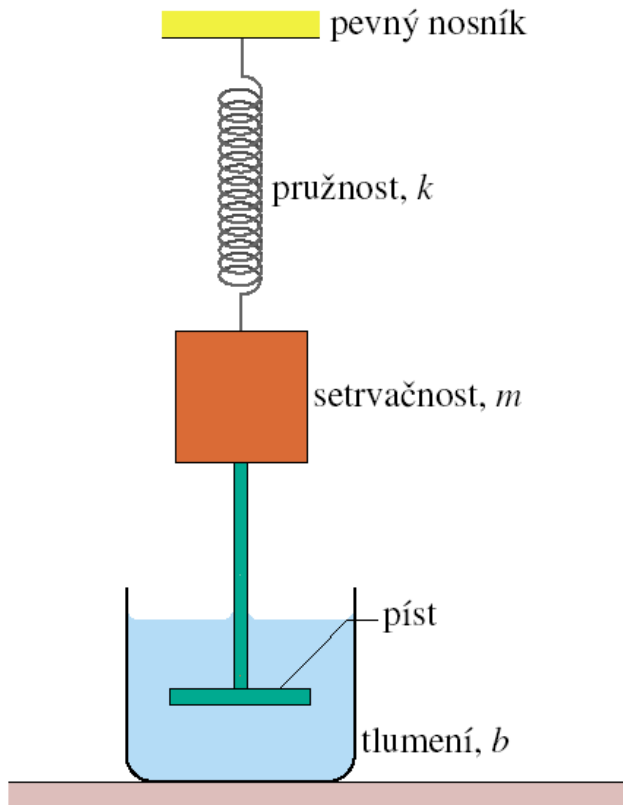
$$x(t) = X \cos(\omega t + \varphi)$$

# Tlumené kmity

Reálné oscilátory během kmitání **průběžně ztrácejí svou energii kmitů**

⇒ **snížování amplitudy** kmitů až do jejich úplného zániku.

**Příčina tlumení** - různé odporové (tlumící) síly, např. odpor prostředí, tření, nebo vyzařování elektromagnetické energie (elektrické kmity).



# Tlumené kmity - mechanické

Mechanické tlumící síly - **závislé na rychlosti kmitů**

Tlumící síla míří vždy proti směru rychlosti kmitů

$$F_{tlum} = -bv$$

**$b$**  je koeficient odporu prostředí (jednotka:  $1 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$ ).

**Pohybová rovnice**

$$\overrightarrow{F_{pruž}} + \overrightarrow{F_{tlum}} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad -kx - b \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

Po malé úpravě **pohybová rovnice vlastních tlumených kmitů**

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

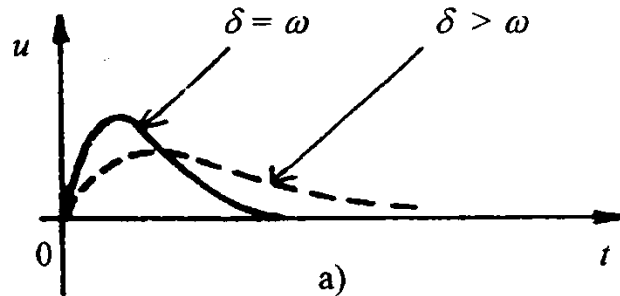
**Lineární diferenciální rovnici 2. řádu s konstantními koeficienty, s nulovou pravou stranou**

$\delta = \frac{b}{2m}$  je konstanta útlumu,  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  je úhlová frekvence vlastních netlumených kmitů oscilátoru

# Tlumené kmity - mechanické

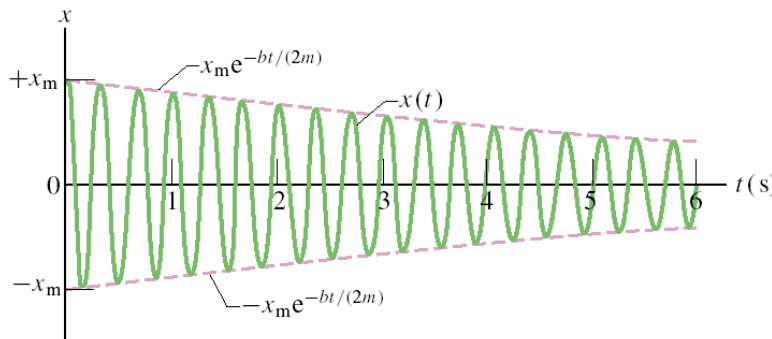
## Tři různé situace:

- a) Pro  $\delta > \omega$  (tzv. **silný útlum**) dostaneme dva různé reálné kořeny (záporné).
- b) Pro  $\delta = \omega$  (tzv. **kritické tlumení**) dostaneme jeden dvojnásobný kořen reálný.



Časový průběh okamžité výchylky z rovnovážné polohy

- c) Pro  $\delta < \omega$  (tzv. **slabý útlum**) dostaneme dva komplexně sdružené kořeny.



Časový průběh slabě tlumených kmitů

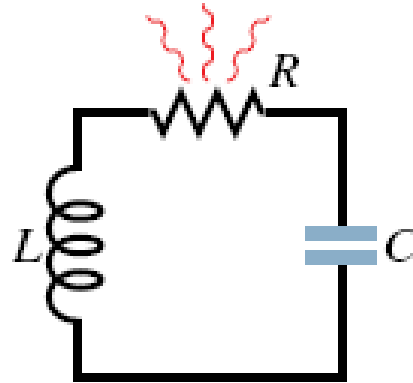
$$x'_m(t) = x_m e^{-bt/(2m)}$$

$$E \approx \frac{1}{2} k x_m^2 e^{-bt/m}$$

Amplituda a energie a klesá exponenciálně s přibývajícím časem

# Tlumené kmity - elektromagnetické

Tlumené elektrické kmity v sériovém obvodu s R, L, C.



Podle 2. Kirchhoffova zákona

$$u_L + u_R + u_C = 0 \quad , \text{ tj.} \quad L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = 0$$

Protože  $i = \frac{dq}{dt}$  upravíme rovnici

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0 \quad \text{tj.} \quad \boxed{\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0.}$$

diferenciální “pohybová” rovnice tlumených elektrických kmitů v obvodu

# Tlumené kmity - elektromagnetické

## Srovnáním

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

⇒ **úhlová frekvence vlastních kmitů** elektrického obvodu

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

konstanta útlumu  $\delta = \frac{R}{2L}$

**Úhlová frekvence tlumených kmitů**

$$\omega_{tl} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

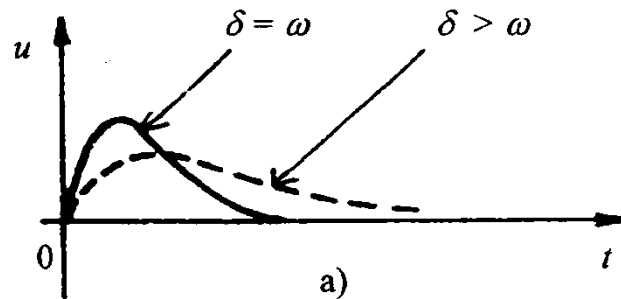
**Doba kmitu**

$$T_{tl} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}$$

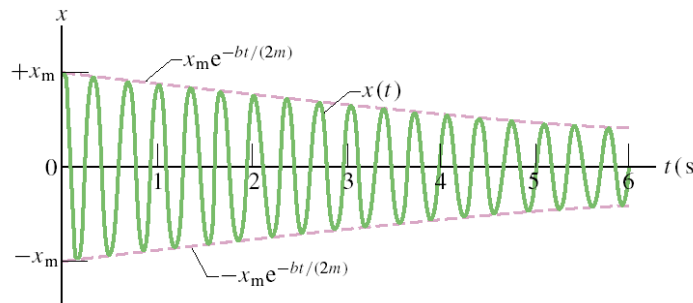
# Tlumené kmity - elektromagnetické

V sériovém obvodu s R, L, C může nastat **jeden ze dvou dějů**:

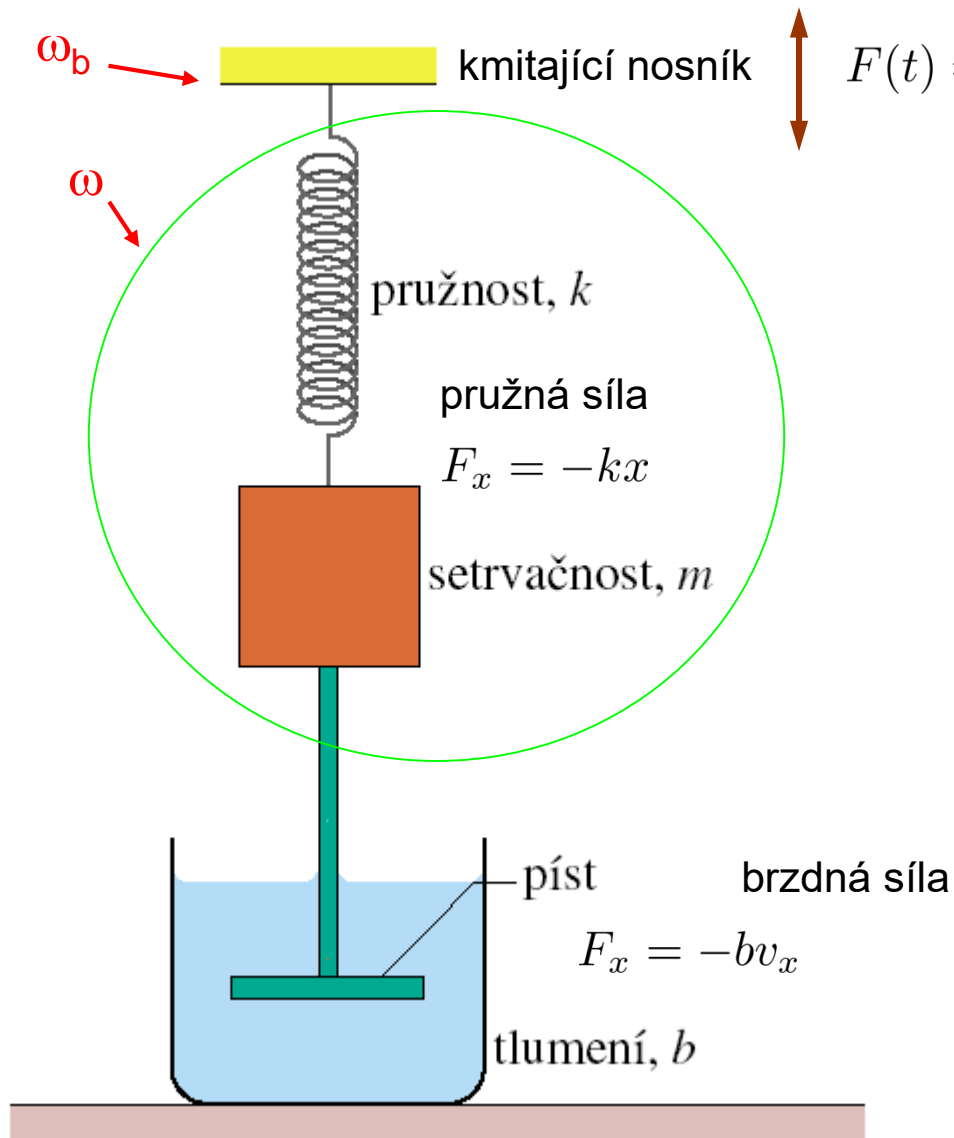
$$\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} \leq 0 \quad - \text{doba kmitu je nereálná nebo nulová – kmity nenastanou, nabitý kondenzátor se pouze vybije přes cívku}$$



$$\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} > 0 \quad - \text{doba kmitu je reálná, v obvodu mohou probíhat tlumené elektrické kmity.}$$



# Nucené kmity - mechanické



$$x(t) = x_m \cos(\omega_b t + \varphi)$$

pohybová rovnice

$$ma_x = -kx - bv_x + F_m \cos(\omega_b t)$$

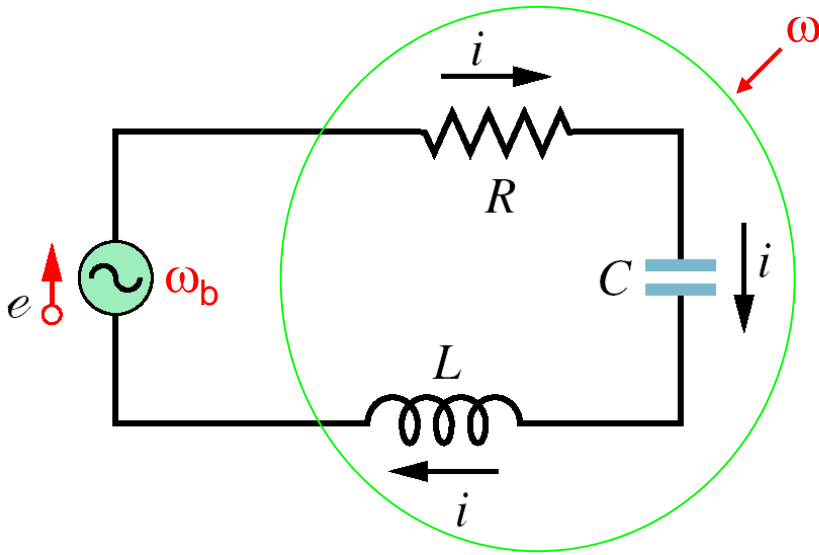
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_m}{m} \cos(\omega_b t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = f_m \cos(\omega_b t)$$

$$\delta = \frac{b}{2m}, \quad \omega^2 = \frac{k}{m}, \quad f_m = \frac{F_m}{m}$$



# Nucené kmity - elektromagnetické



V obvodu máme zdroj harmonického napětí  
 $e(t) = \mathcal{E} \cos(\omega_b t)$

Okamžitý proud je roven časové změně náboje  
 $i = \frac{dq}{dt}$

## 2. Kirchhoffův zákon

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = \mathcal{E} \cos(\omega_b t)$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{\mathcal{E}}{L} \cos(\omega_b t)$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\delta \frac{dq}{dt} + \omega^2 q = f_m \cos(\omega_b t)$$

$$\delta = \frac{R}{2L}, \quad \omega^2 = \frac{1}{LC}, \quad f_m = \frac{\mathcal{E}}{L}$$

**Amplituda nucených kmitů:**

$$x(t)_{stac} = \frac{f_m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_b^2)^2 + 4\delta^2 \omega_b^2}} \cos(\omega_b t - \Psi)$$

**Podmínka amplitudové resonance:**

$$(\omega_b)_{rez} = \sqrt{\omega^2 - 2\delta^2}$$

**Žádoucí rezonance:  
rezonanční elektrické obvody**