Částice o hmotnosti m = 2 g se pohybuje v prostoru. Souřadnice její rychlosti v závislosti na čase jsou $v_x = 2\,t^2$ m.s^{-3}, $v_y = t$ m.s^{-2}, $v_z = 3$ m.s^{-1}. V čase 0 se nachází v počátku souřadné soustavy.

Určete:

a) vektor rychlosti částice a jeho velikost v libovolném čase a v čase 3 s.
b) polohový vektor částice a jeho velikost v libovolném čase a v čase 3 s.
c) vektor zrychlení částice a jeho velikost v libovolném čase a v čase 3 s.
d) vektor síly působící na částici a jeho velikost v libovolném čase a v čase 3 s.

[a) 18,49 m.s^{-1}, b) 20,62 m, c) 12,04 m.s^{-2}, d) 24,08·10^{-3} N]

$m = 2g = 2\cdot 10^{-3}\,kg \quad v_x = 2t^2, \quad v_y = t, \quad v_z = 3 \quad t=0 \quad \vec{r}_0 = (0,0,0)$

a) $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} = 2t^2\vec{i} + t\vec{j} + 3\vec{k}$

$\vec{v}(t=3s) = 2\cdot 3^2 \vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k} = 18\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$

$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{18^2 + 3^2 + 3^2} = 18{,}49\ m.s^{-1}$

b) $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$x = \int v_x\,dt = \int 2t^2\,dt = 2\frac{t^3}{3} + x_0 \qquad x = \frac{2}{3}t^3 \qquad \vec{r} = \frac{2}{3}t^3\vec{i} + \frac{1}{2}t^2\vec{j} + 3t\vec{k}$

$y = \int v_y\,dt = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + y_0 \qquad y = \frac{t^2}{2} \qquad \vec{r}(t=3s) = 18\vec{i} + \frac{9}{2}\vec{j} + 9\vec{k}$

$z = \int v_z\,dt = \int 3\,dt = 3t + z_0 \qquad z = 3t \qquad |\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} =$

c) $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} = 2\cdot 2t\,\vec{i} + 1\cdot\vec{j} + 0\vec{k} = \underline{4t\vec{i} + \vec{j} + 0\vec{k}}$

$a_x \quad a_y \quad a_z$

$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

d) $\vec{F} = m\vec{a} = 2\cdot 10^{-3}(4t\vec{i} + \vec{j} + 0\vec{k})$

$|\vec{F}| = F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$

Vlak má rychlost 72 km.h^{-1}. Použitím brzd je možno vlak zastavit za 2 min. Určete vzdálenost místa od stanice, kde je třeba začít brzdit. Předpokládejte rovnoměrně zpomalený pohyb.

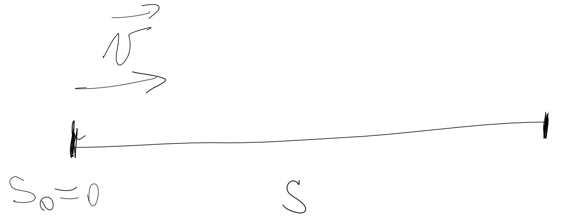
[1200 m]

$v_0 = 72\ km.h^{-1} = \frac{72 \cdot 1000\ m}{3600\ s} = 20\ m.s^{-1}$

$t = 2\ min = 2 \cdot 60\ s = 120\ s$

$v = 0\ m.s^{-1}$

$s - ?$



$s = \overset{=0}{s_0} + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a t^2$

$s = 0 + 20 \cdot 120 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot (120)^2 = \underline{\underline{1200\ m}}$

$a = konst.$

$v = \int a\,dt = a \cdot t + v_0$

$s = \int v\,dt = \int (a \cdot t + v_0)\,dt = \int a t\,dt + \int v_0\,dt =$

$= a \cdot \frac{t^2}{2} + v_0 \cdot t + s_0$

$v = a \cdot t + v_0 = 0$

$a = -\frac{v_0}{t} = -\frac{20}{120} = -\frac{1}{6}\ m.s^{-2}$

Kostku o hmotnosti M, která byla zpočátku v klidu, spouštíme na laně svisle dolů se zrychlením $g/4$.

a) Jaká je při popsaném ději tahová síla lana?

Zaměřme se nyní na okamžik, kdy kostka poklesla o vzdálenost d.

Určete:

b) jakou práci vykonala do tohoto okamžiku tahová síla lana,

c) jakou práci vykonala tíhová síla,

d) jaká je v tomto okamžiku kinetická energie kostky,

e) rychlost kostky.

Nakreslete obrázek znázorňující popsanou situaci. Zakreslete do něj působící síly, znázorněte směr zrychlení a sestavte pohybovou rovnici vektorově i ve složkách. Odpovědi zapište včetně znamének a znaménka zdůvodněte.

[a) $\frac{3}{4}Mg$ N, b) $-\frac{3}{4}Mgd$ J, c) Mgd J, d) $\frac{1}{4}Mgd$ J, e) $\sqrt{\frac{gd}{2}}$ m.s^{-1}]

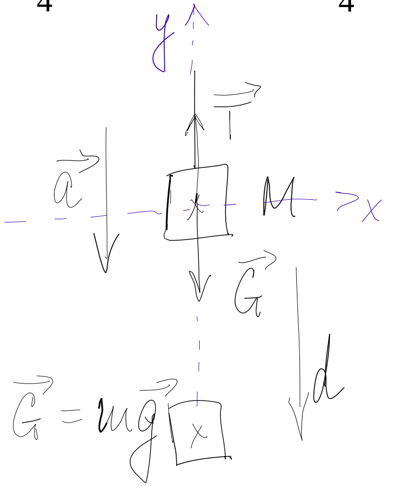
M

$v_0 = 0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

$a = g/4$

d

$g = 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$



$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m\vec{a}$$

$$\vec{T} + \vec{G} = m\vec{a}$$

x: $0 = 0$

y: $T - G = -ma$

$T = G - ma$

$T = mg - ma$

$T = m(g - a)$

$T = m\left(g - \frac{g}{4}\right)$

$T = \frac{3}{4}mg$

a) $\underline{\underline{T = \frac{3}{4}Mg}}$

$$W = \vec{T}\cdot\vec{r} = T\cdot r\cdot\cos\varphi$$

b) $W_T = T\cdot r\cdot \underbrace{\cos 180^\circ}_{-1} = -T\cdot r = \underline{\underline{-\frac{3}{4}M\cdot g\cdot d}}$

c) $W_G = G\cdot r\cdot \underbrace{\cos 0^\circ}_{1} = \underline{\underline{M\cdot g\cdot d}}$

d) $\Delta E_K = W_T + W_G = -\frac{3}{4}Mgd + Mgd =$

$= M\cdot g\cdot d\left(1 - \frac{3}{4}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{4}Mgd}}$

$\Delta E_K = E_{K1} - E_{K0} = \frac{1}{2}mv_1^2 - \underbrace{\frac{1}{2}mv_0^2}_{=0}$

$\frac{1}{2}\cancel{M}v_1^2 = \frac{1}{4}\cancel{M}gd$

$\underline{\underline{v_1 = \sqrt{\frac{1}{2}gd}}}$

e) $a = \text{konst.}$

$v = \int a\,dt = a\cdot t + \overset{=0}{v_0}$

$v = a\cdot t = \frac{g}{4}\cdot t$

$s = \int v\,dt = \int \frac{g}{4}t\,dt = \frac{g}{4}\cdot\frac{t^2}{2} + \overset{=0}{s_0} \Rightarrow s = \frac{g}{8}t^2 = d \Rightarrow t = \sqrt{\frac{8d}{g}}$

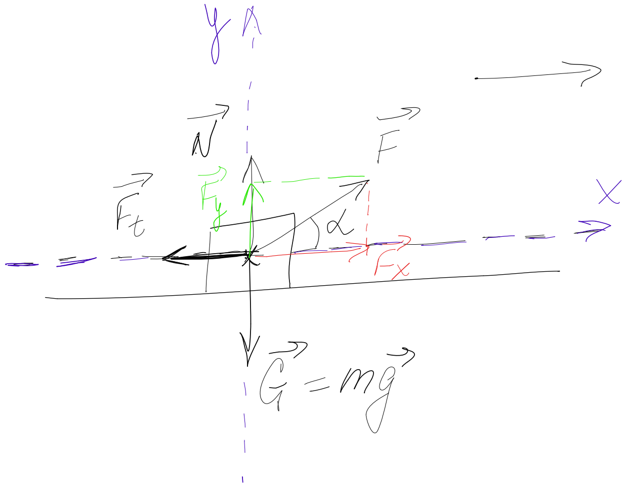
Těleso o hmotnosti 20 kg se nachází v klidu na vodorovné rovině. V čase 0 začne na těleso působit stálá vnější síla o velikosti 90 N směrem šikmo vzhůru, která svírá s vodorovnou rovinou úhel 30°. Touto silou je těleso uvedeno do pohybu. Součinitel smykového tření mezi tělesem a rovinou je 0,3.

Určete:

a) velikost a směr normálové síly, kterou působí rovina na těleso,

b) zrychlení tělesa.

[a) 151,2 N, b) 1,63 m.s^{-2}]



$m = 20\ kg$

$v_0 = 0\ m\,s^{-1}$

$F = 90\,N$

$\alpha = 30°$

$\mu_{sm} = 0{,}3$

$\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = m\vec{a}$

$F_t = \mu \cdot N$

$\vec{N} + \vec{F} + \vec{G} + \vec{F_t} = m\vec{a}$

$x: \ F_x - F_t = m \cdot a_x$

$y: \ N + F_y - G = m \cdot a_y = 0$

$N = G - F_y$

$N = m \cdot g - F \cdot \sin\alpha$

a) $N = 20 \cdot 9{,}81 - 90 \cdot \sin 30° = \underline{\underline{151{,}2\ N}}$

$m a_x = F_x - F_t$

$m \cdot a = F \cdot \cos\alpha - \mu_{sm} \cdot N$

b) $a = \dfrac{90 \cdot \cos 30° - 0{,}3 \cdot 151{,}2}{20} = \underline{\underline{1{,}63\ m.s^{-2}}}$

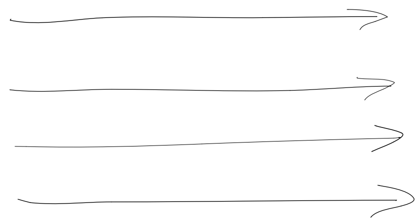
Malá částice, která má hmotnost 1 mg a náboj 0,5 nC, je na začátku v klidu. S jakým zrychlením se bude pohybovat v homogenním elektrickém poli s intenzitou 30 kV.m^{-1}. Jakou dráhu částice urazí za 0,1 s ve vakuu? Tíhovou sílu působící na částici neuvažujeme.

[15 m.s^{-2}, 7,5 cm]

$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$

$\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ F.m^{-1}$

$\varepsilon_r = 1$



$\vec{E} = konst$

$m = 1\,mg = 1\cdot 10^{-3}\,g = 1\cdot 10^{-3}\cdot 10^{-3}\,kg = 1\cdot 10^{-6}\,kg$

$Q = 0{,}5\,nC = 0{,}5\cdot 10^{-9}\,C$

$v_0 = 0\ m.s^{-1}$

$E = 30\,kV.m^{-1} = 30\cdot 10^{3}\,V.m^{-1}$

$t = 0{,}1\,s$

$\varepsilon_r = 1$

$a - ?$

$F = E\cdot Q \qquad F = ma$

$E\cdot Q = ma$

$a = \frac{E\cdot Q}{m} = \frac{30\cdot 10^{3}\cdot 0{,}5\cdot 10^{-9}}{1\cdot 10^{-6}} = \underline{\underline{15\ m.s^{-2}}}$

$a = konst.$

$v = \int a\,dt = a\cdot t + \overset{=0}{v_0} \Rightarrow v = a\cdot t$

$s = \int v\,dt = \int a t\,dt = a\frac{t^2}{2} + \overset{=0}{s_0}$

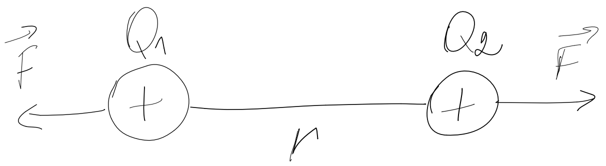
$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\cdot 15\cdot (0{,}1)^2 = 0{,}075\ m = \underline{\underline{7{,}5\ cm}}$

Jak je potřeba změnit vzdálenost dvou kladných bodových nábojů Q_1 a Q_2 ve vakuu, pokud se náboj Q_1 zvětší 4 krát a Coulombova síla se nezmění.

[Zvětšit dvakrát]

$\varepsilon_r = 1$

$r_1 - ?$



$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \cdot \frac{|Q_1| \cdot |Q_2|}{r^2}$$

$$F^* = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \cdot \frac{|4Q_1| \cdot |Q_2|}{r_1^2}$$

$F = F^*$

$$\cancel{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\underbrace{\varepsilon_r}_{=1}}} \cdot \frac{|Q_1| \cdot \cancel{|Q_2|}}{r^2} = \cancel{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\underbrace{\varepsilon_r}_{=1}}} \cdot \frac{|4Q_1| \cdot \cancel{|Q_2|}}{r_1^2}$$

$$\frac{\cancel{Q_1}}{r^2} = \frac{4\cancel{Q_1}}{r_1^2}$$

$$\frac{r^2}{1} = \frac{r_1^2}{4} \Rightarrow 4r^2 = r_1^2$$

$$r_1 = \sqrt{4r^2} = 2 \cdot r \Rightarrow \underline{\underline{r_1 = 2 \cdot r}}$$

Bodový elektrický náboj Q vytváří ve vakuu elektrické pole. Na náboj Q_0 působí elektrická síla. Náboje vložíme do dielektrika. Pokud chceme, aby na náboj Q_0 působila stejně velká síla jako ve vakuu, musíme náboj Q_0 přemístit do poloviční vzdálenosti. Určete relativní permitivitu dielektrika.

[4]

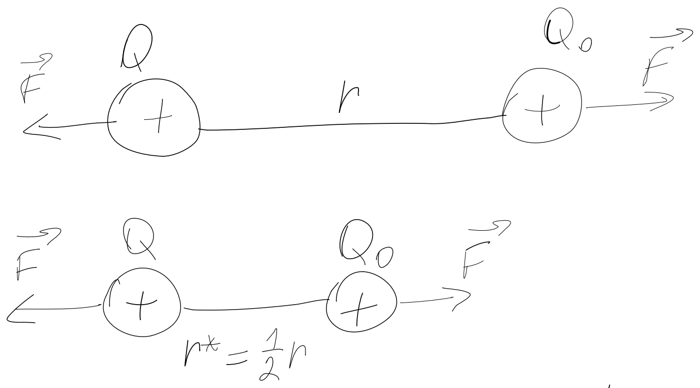
Q

$\varepsilon_r = 1$

Q_0

$\varepsilon_r^* - ?$

$r^* = \frac{1}{2} r$



$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\underbrace{\varepsilon_r}_{=1}} \cdot \frac{|Q|\cdot|Q_0|}{r^2}$$

$$F = F^*$$

$$F^* = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r^*} \cdot \frac{|Q|\cdot|Q_0|}{(r^*)^2}$$

$$\frac{1}{\cancel{4\pi\varepsilon_0}\cdot 1} \cdot \frac{\cancel{|Q|\cdot|Q_0|}}{r^2} = \frac{1}{\cancel{4\pi\varepsilon_0}\cdot\varepsilon_r^*} \cdot \frac{\cancel{|Q|\cdot|Q_0|}}{\left(\frac{1}{2}r\right)^2}$$

$$\frac{1}{\cancel{r^2}} = \frac{1}{\varepsilon_r^*} \cdot \frac{1}{\frac{1}{4}\cdot\cancel{r^2}}$$

$$1 = \frac{1}{\varepsilon_r^*} \cdot \frac{4}{1} \implies 1 = \frac{4}{\varepsilon_r^*}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon_r^* = 4}}$$

Na zdroj stejnosměrného napětí 30 V jsou do série zapojeny dva kondenzátory s kapacitami 12 μF a 24 μF. Určete:

a) výslednou kapacitu,

b) náboje na deskách kondenzátorů,

c) poměr napětí na jednotlivých kondenzátorech,

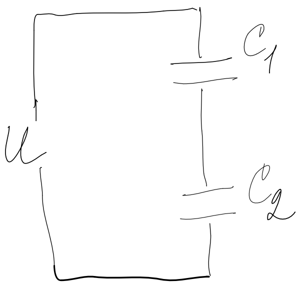
d) energie v poli kondenzátorů.

[a) 8 μF, b) 240 μC, c) 2:1, d) 3,6 mJ]

$U = 30\,V$

$C_1 = 12\,\mu F = 12 \cdot 10^{-6}\,F$

$C_2 = 24\,\mu F = 24 \cdot 10^{-6}\,F$



$$\frac{1}{C_S} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{C_2 + C_1}{C_1 \cdot C_2}$$

$$\frac{C_S}{1} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_2 + C_1}$$

a) $$C_S = \frac{12 \cdot 10^{-6} \cdot 24 \cdot 10^{-6}}{24 \cdot 10^{-6} + 12 \cdot 10^{-6}} = 8 \cdot 10^{-6}\,F = \underline{\underline{8\,\mu F}}$$

b) $$Q = C_S \cdot U = 8 \cdot 10^{-6} \cdot 30 = 240 \cdot 10^{-6}\,C$$

$$\underline{\underline{Q = 240\,\mu C}}$$

c) $$U_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{240 \cdot 10^{-6}}{12 \cdot 10^{-6}} = \underline{\underline{20\,V}}$$

$$U_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{240 \cdot 10^{-6}}{24 \cdot 10^{-6}} = \underline{\underline{10\,V}}$$

$$U_1 : U_2 = 20\,V : 10\,V = 2:1$$

d) $$E_{el} = \frac{1}{2} C_S U^2 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10^{-6} \cdot (30)^2 = \underline{\underline{0{,}0036\,J}}$$

$$E_{el} = 3{,}6 \cdot 10^{-3}\,J = \underline{\underline{3{,}6\,mJ}}$$

Kondenzátory s kapacitou $C_1 = 2\ \mu F$ a $C_2 = 3\ \mu F$ jsou připojeny paralelně. Na kondenzátoru s kapacitou C_1 je náboj $Q_1 = 6\ \mu C$. Určete napětí a náboj na druhém kondenzátoru.

[3 V, 9 μC]

$$C_p = C_1 + C_2 = 2\,10^{-6} + 3\cdot 10^{-6} = 5\cdot 10^{-6} F$$

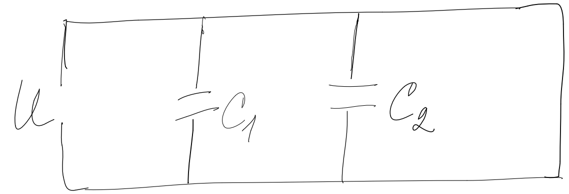
$C_1 = 2\mu F = 2\cdot 10^{-6} F$

$C_2 = 3\mu F = 3\cdot 10^{-6} F$

$Q_1 = 6\mu C = 6\cdot 10^{-6} C$

$U_2 - ?$

$Q_2 - ?$



$$\boxed{Q = C\cdot U}$$

$$Q_1 = C_1 \cdot U_1$$

$$U_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{6\cdot 10^{-6}}{2\,10^{-6}} = \underline{3V} \Rightarrow U_1 = U_2 = \underline{3V}$$

$$Q_2 = C_2 \cdot U_2 = 3\cdot 10^{-6}\cdot 3 = 9\cdot 10^{-6} C = \underline{\underline{9\mu C}}$$

Kondenzátory s kapacitami 6.10^{-6} F a 4.10^{-6} F jsou spojeny sériově a paralelně k nim je připojen kondenzátor s kapacitou 2.10^{-6} F. Určete jejich výslednou kapacitu.

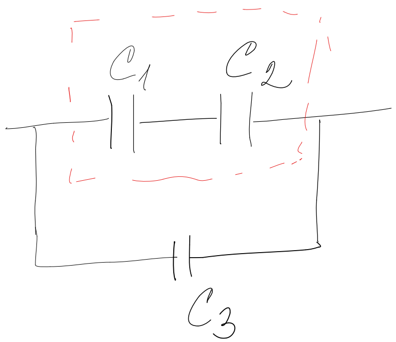
[4,4 μF]

$C_1 = 6 \cdot 10^{-6}\,F$

$C_2 = 4 \cdot 10^{-6}\,F$

$C_3 = 2 \cdot 10^{-6}\,F$

$C - ?$



$$\frac{1}{C_S} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{C_2 + C_1}{C_1 \cdot C_2}$$

$$C_S = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_2 + C_1} = \frac{6 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{-6}}{6 \cdot 10^{-6} + 4 \cdot 10^{-6}} = \underline{2{,}4 \cdot 10^{-6}\,F}$$

$$C_P = C_S + C_3 = 2{,}4 \cdot 10^{-6} + 2 \cdot 10^{-6} = \underline{\underline{4{,}4 \cdot 10^{-6}\,F}}$$

$$C = \underline{\underline{4{,}4\,\mu F}}$$

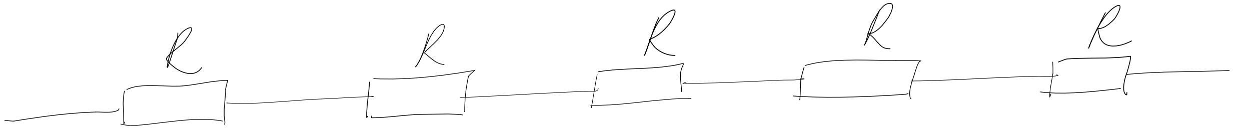
Ke spotřebitelské síti 230 V je připojeno pět sériově spojených stejných žárovek. Určete:

a) jaké napětí naměříme na každé z nich,

b) jaký je celkový odpor žárovek, je-li odpor jedné žárovky 24 Ω,

c) jak velký proud prochází tímto elektrickým obvodem.

[a) 46 V, b) 120 Ω, c) 1,92 A]



$U = 230\,V$

$n = 5$

$R = 24\,\Omega$

a) $U' = \frac{U}{n} = \frac{230}{5} = 46\,V$

b) $R_S = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 = 5 \cdot R = 5 \cdot 24 = \underline{\underline{120\,\Omega}}$

c) $\underline{I} = \frac{U}{R} = \frac{230}{120} = \underline{\underline{1{,}92\,A}}$

Do homogenního magnetického pole s indukcí B = 10 mT vletěl kolmo na indukční čáry elektron s kinetickou energií E_k = 30 keV. Určete:

a) rychlost elektronu,

b) velikost hybnosti částice,

c) po jaké trajektorii se bude pohybovat elektron,

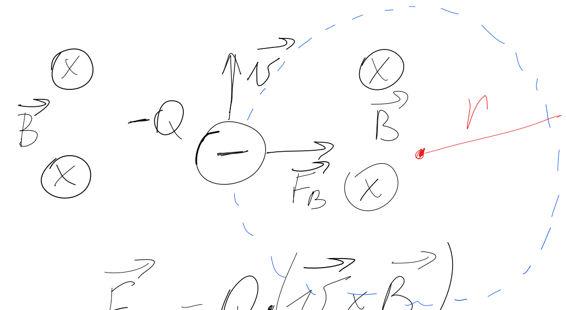
d) poloměr trajektorie r.

[$1{,}03\cdot10^{8}$ m.s^{-1}, $9{,}358\cdot10^{-23}$ kg.m.s^{-1}, 58,4 mm]

$Q_e = 1{,}602\ 10^{-19}\,C$, $m_e = 9{,}11\cdot10^{-31}\,kg$

$\vec{v} \perp \vec{B}$

$\varphi = 90^0$



$$\vec{F_B} = Q\cdot(\vec{v}\times\vec{B})$$

$$F_B = Q\cdot(v\cdot B\cdot\sin\varphi)$$

$$F_B = Q\cdot(v\cdot B\cdot\underbrace{\sin 90^0}_{1})$$

$$F_B = Q\cdot v\cdot B$$

$$F_d = m\cdot\frac{v^2}{r}$$

$$B = 10\,mT = 10\cdot10^{-3}\,T$$

$$E_k = 30\,keV = 30\cdot10^{3}\,eV = 30\cdot10^{-3}\cdot1{,}602\cdot10^{-19} = 4{,}806\cdot10^{-15}\,J$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

a) $$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot4{,}806\cdot10^{-15}}{9{,}11\cdot10^{-31}}} = \underline{\underline{1{,}03\cdot10^{8}\,m.s^{-1}}}$$

b) $$p = m\cdot v = 9{,}11\cdot10^{-31}\cdot1{,}03\cdot10^{8} = \underline{\underline{9{,}358\cdot10^{-23}\,kg.m.s^{-1}}}$$

$$F_B = F_d$$

$$Q\cdot v\cdot B = m\cdot\frac{v^2}{r}$$

$$r = \frac{m\,v^{\cancel{2}}}{Q\cancel{v}B} = \frac{m\cdot v}{Q\cdot B}$$

$$r = \frac{9{,}11\cdot10^{-31}\cdot1{,}03\cdot10^{8}}{1{,}602\ 10^{-19}\cdot10\cdot10^{-3}} = 0{,}0584\,m$$

$$\underline{\underline{r = 58{,}4\,mm}}$$