

Vlny



VLNĚNÍ

- zvláštní druh pohybu, při kterém se přenášejí kmity.

Prostředím postupuje pouze rozruch a spolu s ním **energie** kmitů.

Částice prostředí zůstávají na místě a pouze **kmitají** kolem svých rovnovážných poloh.

Kmity - periodicky se opakující změny stavu

Šíření kmitů od místa svého vzniku do okolí - vzniká děj nazvaný **vlnění**

Vlnění je děj závislý na čase, jehož podstatou je **šíření periodických změn fyzikálních veličin**

(např. mechanických výchylek, nebo změn vektorů intenzity elektrické nebo magnetické složky elektromagnetického pole, apod.)

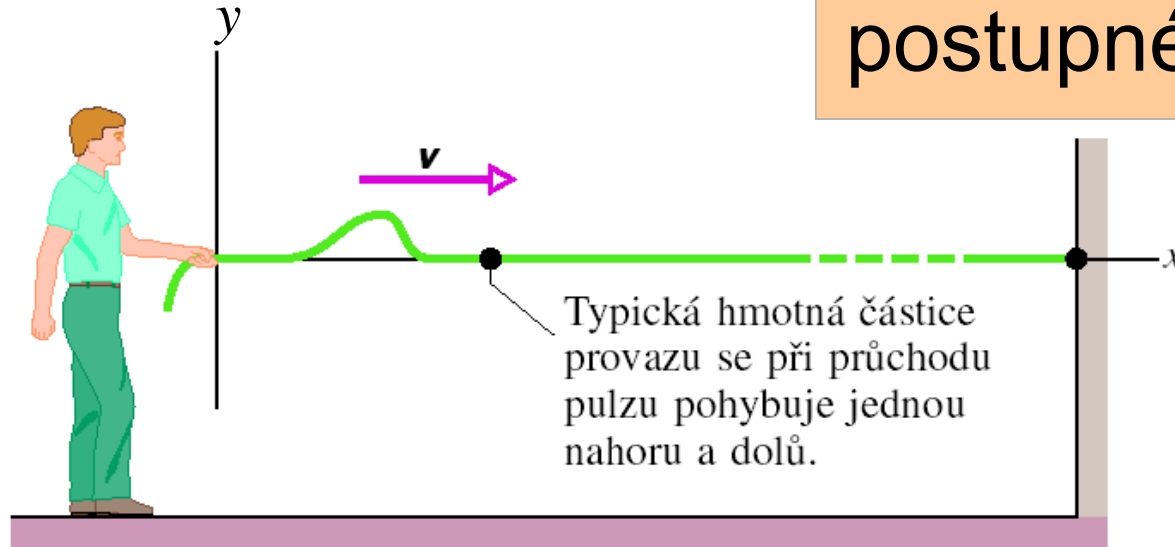
Vlny – základní popis

postupné, příčné

Pulz:

Východisko:

napnuté vlákno;
krajním bodem
pohnu nahoru a poté
zpět do rovnovážné
polohy



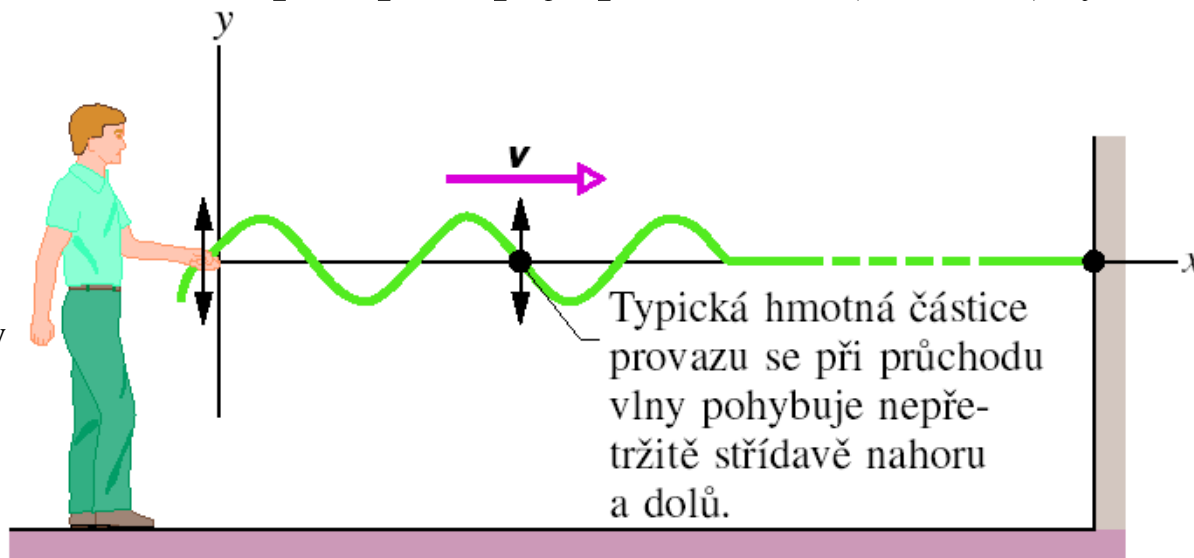
Typická hmotná částice
provazu se při průchodu
pulzu pohybuje jednou
nahoru a dolů.

Vlna/pulz postupuje prostředím (fázovou) rychlostí \vec{v}

Vlna:

Východisko:

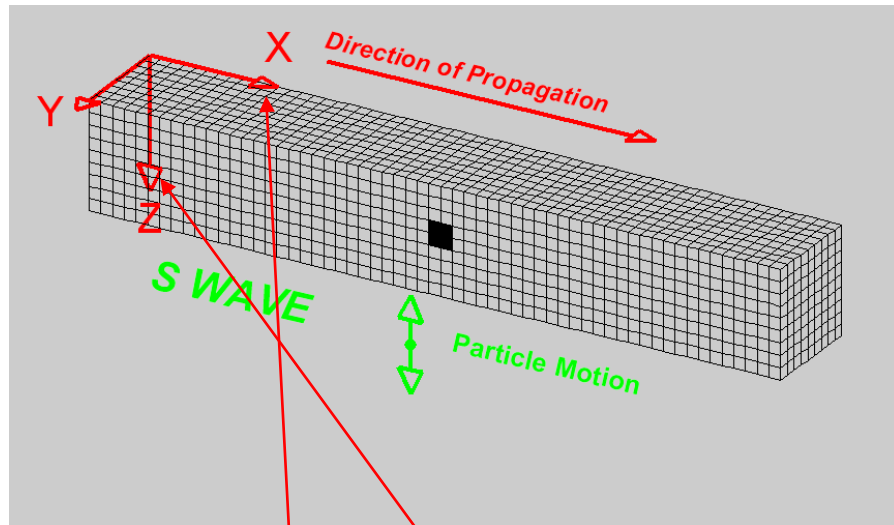
napnuté vlákno;
krajním bodem
pohybují harmonicky
nahoru a dolů, vždy
o stejnou vzdálenost
od rovnovážné
polohy



Typická hmotná částice
provazu se při průchodu
vlny pohybuje nepřetržitě
střídavě nahoru
a dolů.

Vlny – základní popis

postupné, příčné



Př.: Šíření podél osy $x \rightarrow$ okamžitá výchylka bodu z rovnovážné polohy ve směru osy z je funkcí souřadnice x a času $t \rightarrow$ výchylku označíme $z(x,t)$ [nebo $y(x,t)$, případně obecným výrazem $u(x,t)$]

Proč **POSTUPNÁ** ?

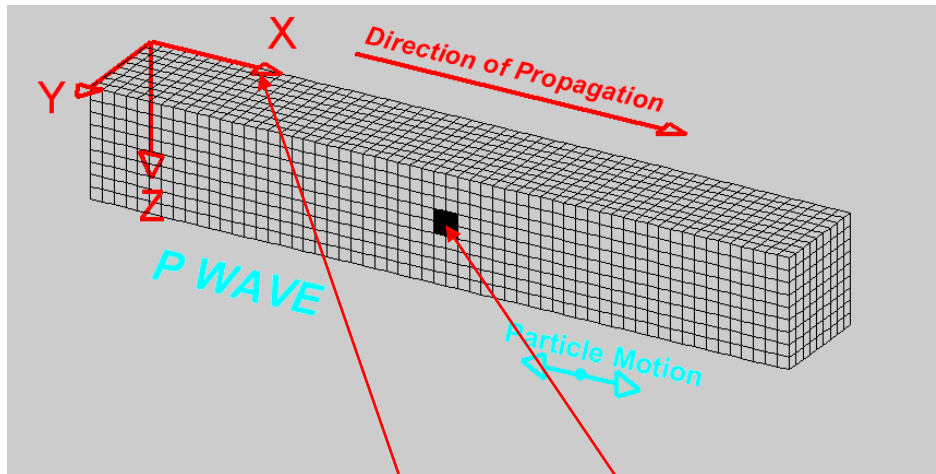
Rozruch (pulz/vlna)
postupuje prostředím od
místa vybuzení
„do nekonečna“

Proč **PŘÍČNÁ** ?

Částice prostředí
kmitá kolmo, tj.
příčně
na směr šíření.

Vlny – základní popis

postupná podélná

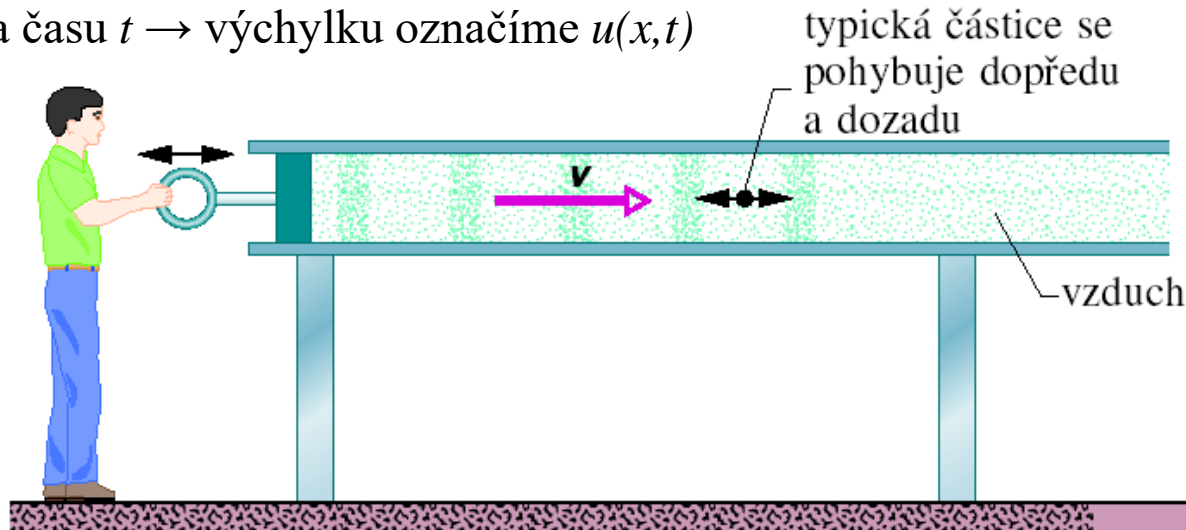


Proč **PODÉLNÁ** ?

Částice prostředí
kmitá rovnoběžně se
směrem šíření, tj.

podél
směru šíření.

Př.: Šíření podél osy $x \rightarrow$ okamžitá výchylka bodu
z rovnovážné polohy ve směru osy x je funkcí
souřadnice x a času $t \rightarrow$ výchylku označíme $u(x,t)$



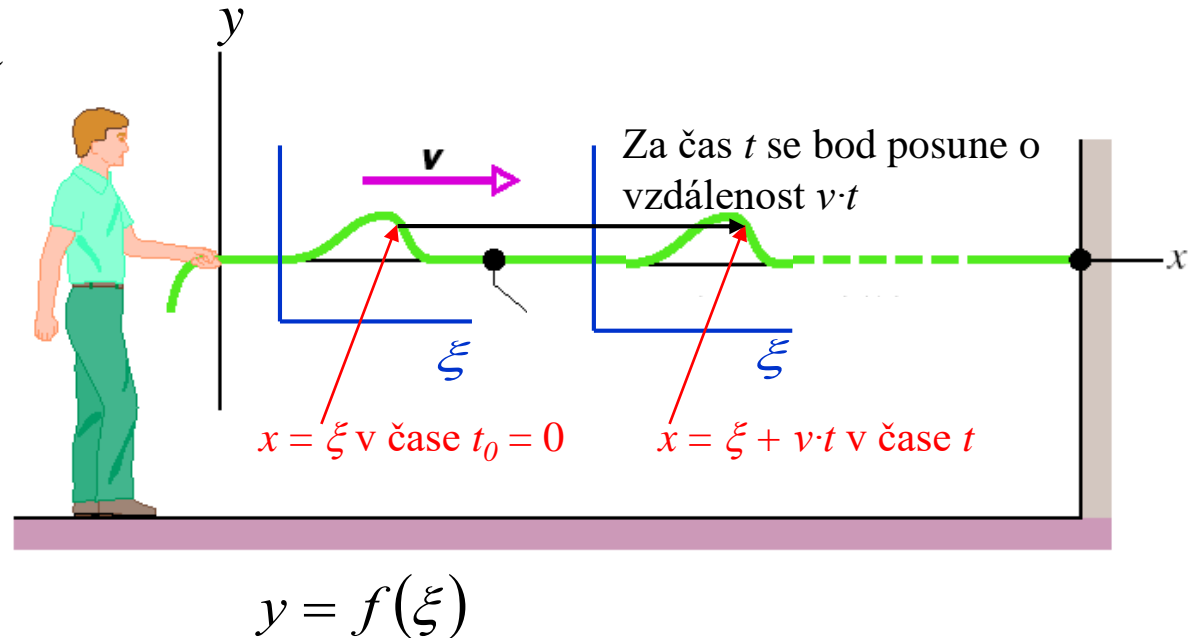
Pulz – popis výchylky

Na vlákně se šíří pulz, zajímá nás výchylka (souřadnice y) jednotlivých částic vlákna (souřadnice x) v čase t , tj. $y(x, t)$

Zvolíme pomocnou souřadnou soustavu $[\xi; y]$, ve které popíšeme tvar pulzu pomocí (nějaké/vhodné) funkce f v čase $t_0 = 0$:
 $y(\xi) = f(\xi)$

Předpoklad: souřadná soustava $[\xi; y]$ se pohybuje podél vlákna stejnou rychlostí v , jakou se šíří pulz;
tj. popis výchylky v soustavě $[\xi; y]$ se nemění.

Výchylka y jednotlivých částic vlákna (souřadnice x) v čase t je potom popsána pomocí této funkce $f(x - vt)$



Vyjádříme souřadnici x :
 $x = \xi + v \cdot t \rightarrow \xi = x - v \cdot t$

$$\begin{aligned} y(\xi) &= f(\xi) \\ y(x, t) &= f(x - vt) \end{aligned}$$

Vlnová rovnice

Okamžitou výchylku postupné vlny lze obecně popsat rovnicí: $u(x, t) = f(x - vt)$

Provedeme druhou derivaci a) podle času a b) podle prostorové souřadnice →

Vlnová rovnice:
$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

Řešení:

$$u(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

vlna postupující zleva doprava

vlna postupující zprava doleva

v - **fázová rychlost šíření vlny**

Harmonická postupná vlna

Harmonická vlna: jednotlivé body vlákn (prostoru) harmonicky kmitají, tj. jejich výchylku z rovnovážného stavu popíšeme pomocí funkce sinus (nebo cosinus)

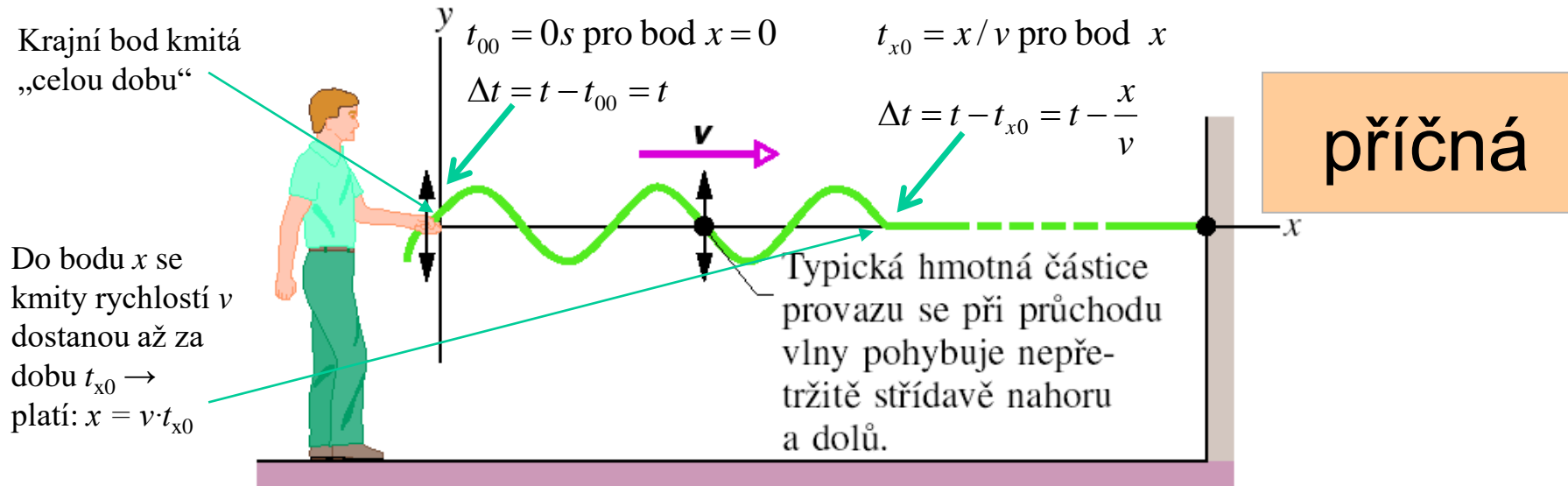
$$y(x, t) = y_m \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi \right] = y_m \sin(\omega t - kx + \varphi)$$

POZOR! $k = \frac{\omega}{v}$
Toto k není tuhost

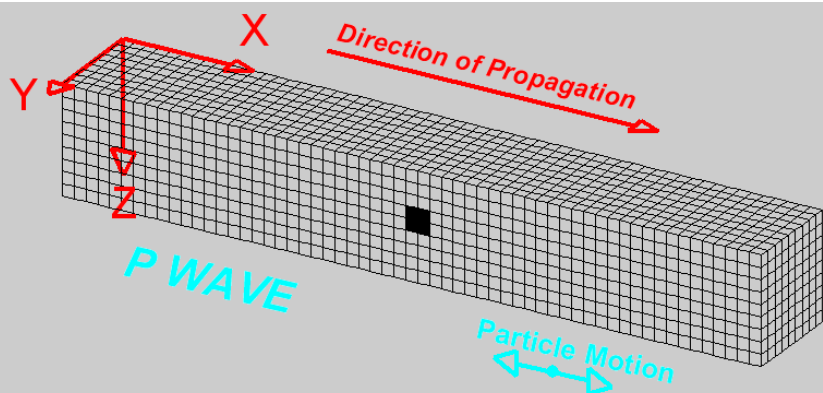
Výchylku z rovnovážné polohy bodu se souřadnicí x lze popsat:

$$y(t) = y_m \sin(\omega \Delta t + \varphi) = y_m \sin(\omega(t - t_{x0}) + \varphi)$$

Výraz $\Delta t = t - t_{x0}$ zahrnuje zpoždění, se kterým se vlnění rychlostí v rozšíří do bodu se souřadnicí x



Harmonická postupná vlna

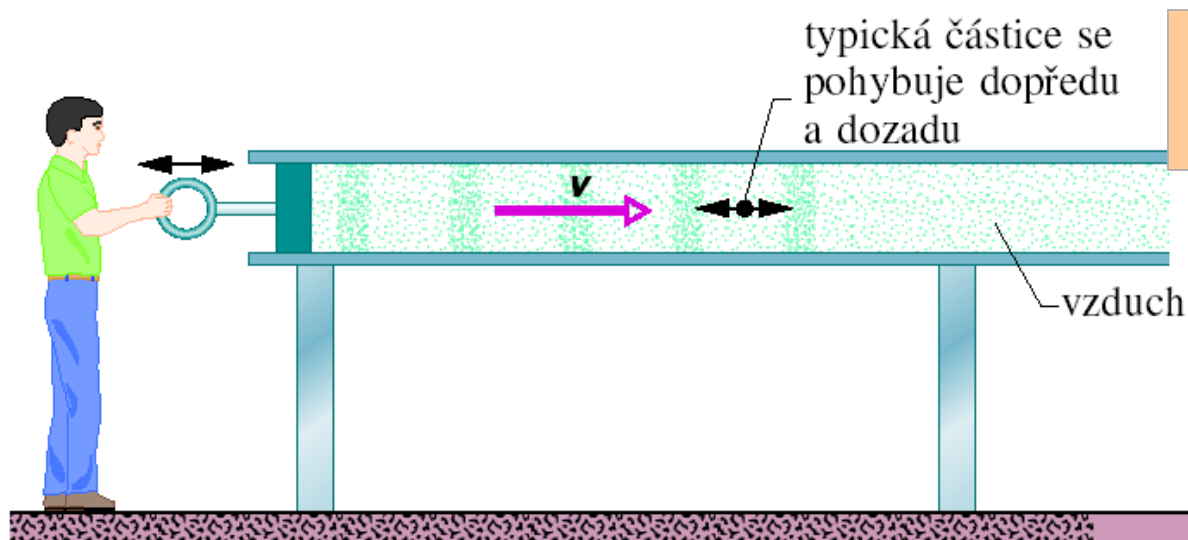


$$u(x, t) = u_m \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi \right] =$$
$$= u_m \sin(\omega t - kx + \varphi)$$

$$k = \frac{\omega}{v}$$

Obdobně pro podélnou vlnu: výchylku z rovnovážné polohy bodu se souřadnicí x lze popsat:

$$u(t) = u_m \sin(\omega \Delta t + \varphi)$$



podélná

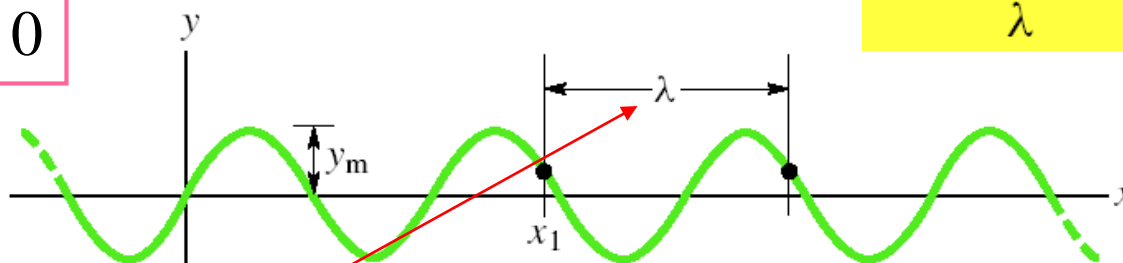
Harmonická postupná vlna

$$y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

Výchylka závisí na dvou proměnných – prostorové souřadnici a času. Pro zobrazení průchodu vlny prostředím tak máme dvě možnosti:

1. Zobrazení výchylky v prostoru v jednom časovém okamžiku

$$t = 0$$

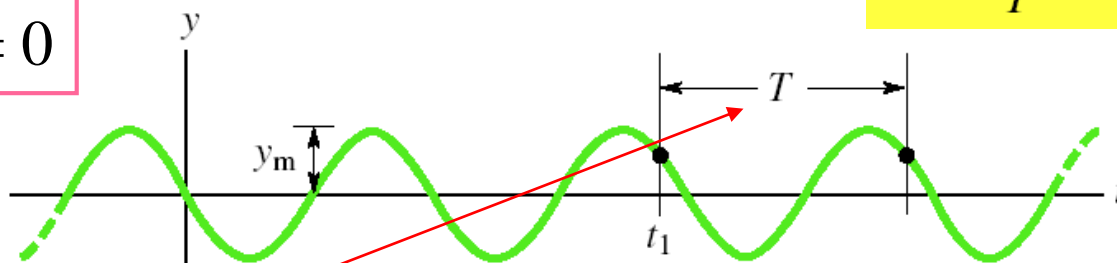


$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (\text{úhlový vlnočet})$$

λ .. vlnová délka = nejkratší vzdálenost, mezi dvěma body se stejnou výchylkou v libovolném čase

2. Zobrazení výchylky jednoho bodu prostředí v čase

$$x = 0$$



$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (\text{úhlová frekvence})$$

T .. perioda = nejkratší čas, za který se výchylka daného bodu (stav systému) začne opakovat

Harmonická postupná vlna

$$y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

Odvození vztahu pro úhlový vlnčet: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

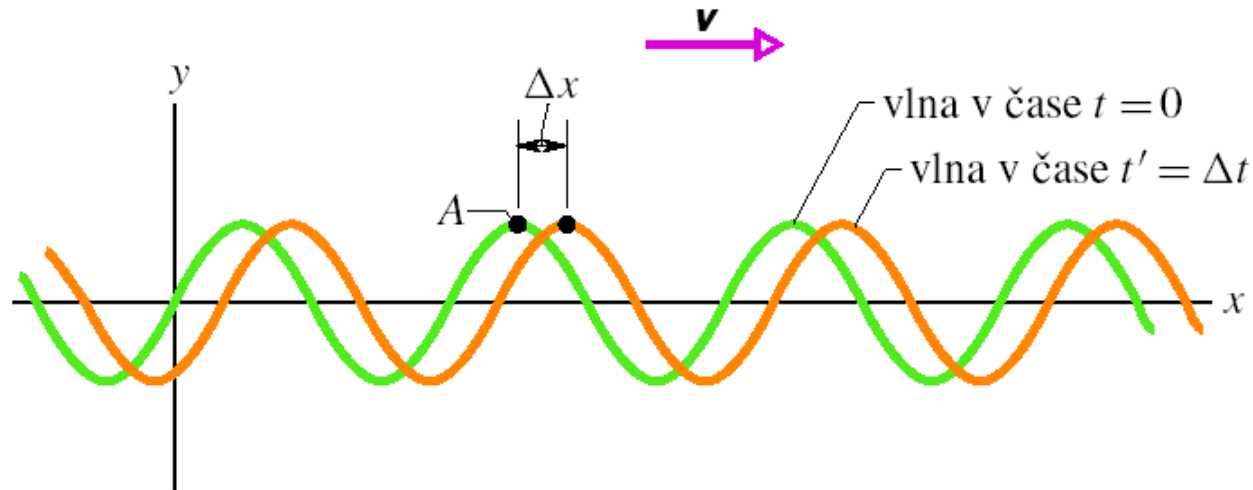
$$\begin{aligned} y(x, t) &= y_m \sin(kx - \omega t + \varphi) = y_m \sin(k(x + \lambda) - \omega t + \varphi) \\ \sin(kx - \omega t + \varphi) &= \sin(k(x + \lambda) - \omega t + \varphi) \\ \cancel{kx} - \cancel{\omega t} + \varphi + 2\pi &= \cancel{kx} + k\lambda - \cancel{\omega t} + \varphi \\ 2\pi &= k\lambda \rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} \end{aligned}$$

Odvození vztahu mezi úhlovou frekvencí a periodou vlnění: $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\begin{aligned} y(x, t) &= y_m \sin(kx - \omega t + \varphi) = y_m \sin(kx - \omega(t + T) + \varphi) \\ \sin(kx - \omega t + \varphi) &= \sin(kx - \omega(t + T) + \varphi) \\ \cancel{kx} - \cancel{\omega t} + \varphi - 2\pi &= \cancel{kx} - \cancel{\omega t} - \omega T + \varphi \\ 2\pi &= \omega T \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \end{aligned}$$

Harmonická postupná vlna

$$y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t + \varphi)$$



Obr. 17.5 Dva snímky postupné vlny popsané v rov. (17.2) s $\varphi = 0$. První snímek zachycuje vlnu v čase $t = 0$, druhý v pozdějším čase $t' = \Delta t$. Během časového intervalu Δt se celá křivka posunula o vzdálenost Δx doprava.

Harmonická postupná vlna

Fyzikální význam veličin:

$$y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

$$u(x, t) = u_m \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

y, u - **okamžitá výchylka** z rovnovážné polohy bodu v prostoru, v němž se šíří vlnění; jednotky $[y] = [u] = \text{m}$

y_m, u_m - **amplituda** výchylky; jednotky $[y_m] = [u_m] = \text{m}$

$kx - \omega t + \varphi$ - **okamžitá fáze** vlny; φ - počáteční fáze. $[kx - \omega t + \varphi] = [\varphi] = \text{rad}$

ω - úhlová frekvence kmitavého pohybu zdroje i všech bodů prostředí, v němž se vlnění šíří – **úhlová frekvence vlnění**; jednotky $[\omega] = \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$

f - **frekvence vlnění**; jednotky $[f] = \text{Hz} = \text{s}^{-1}$ $\omega = 2\pi f$

$\frac{1}{f} = T$ - **perioda**; jednotky $[T] = \text{s}$

$v_p(x, t) = \frac{\partial y(x, t)}{\partial t}$ **Příčná rychlost vlnění** – jak rychle se mění velikost výchylky daného bodu.

Pro: $y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t) \rightarrow v_p(x, t) = -\omega \cdot y_m \cos(kx - \omega t)$

Harmonická postupná vlna

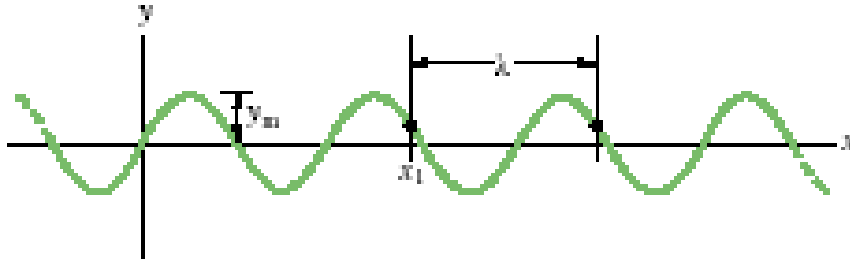
Vzdálenost, kterou urazí vlnění za dobu jedné periody – **vlnová délka**

$$\lambda = vT = \frac{v}{f}$$

λ - **vlnová délka**, jednotky $[\lambda] = \text{m}$

v - **fázová rychlost šíření vlnění**, jednotky $[v] = \text{ms}^{-1}$

(**vlnová délka** = nejmenší vzdálenost dvou bodů, které kmitají ve stejné fázi)



Snímek struny, kterou se šíří sinusová vlna, v daném okamžiku t

$\frac{1}{\lambda}$ - **prostý vlnočet**, který určuje, kolik vln se vytvoří na úseku dlouhém 1 metr.

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ - **úhlový vlnočet**, určuje, o kolik radiánů se změní fáze vlny na délce 1 m ve směru šíření vlny, jednotky $[k] = \text{rad} \cdot \text{m}^{-1}$

$$v = \frac{\omega}{k} \quad \text{- **disperzní vztah**}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{\lambda f} = \frac{\omega}{v}$$

Rychlost šíření vln na struně a v plynu

Napětí struny – charakterizuje pružnost systému

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \quad (\text{rychlost vlny na struně}),$$

$$[\tau] = \text{N}$$

$$[\mu] = \text{kg m}^{-1}$$

Lineární hustota $\mu = m/L$ – charakterizuje setrvačnost systému

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (\text{rychlost zvuku})$$

$$K = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V} \quad (\text{definice } K) \quad [K] = \text{Pa}$$

modul objemové pružnosti

ρ ..objemová hustota; $[\rho] = \text{kg m}^{-3}$

Tabulka 18.1 Rychlost zvuku

| PROSTŘEDÍ | $\frac{v}{\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$ | PROSTŘEDÍ | $\frac{v}{\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$ | PROSTŘEDÍ | $\frac{v}{\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$ |
|--------------------------|--|--------------------------------|--|-----------------------------|--|
| <i>Plyny^a</i> | | <i>Pevné látky^a</i> | | <i>Kapaliny^a</i> | |
| Vzduch (0 °C) | 331 | Hliník | 6 420 | Voda (0 °C) | 1 402 |
| Vzduch (20 °C) | 343 | Ocel | 5 941 | Voda (20 °C) | 1 482 |
| Helium | 965 | Žula | 6 000 | Mořská voda ^b | 1 522 |
| Vodík | 1 284 | | | | |

HRW 17.7

7C. Ukažte, že vlnu $y = y_m \sin(kx - \omega t)$ lze zapsat v následujících ekvivalentních tvarech:

$$y = y_m \sin [k(x - vt)],$$

$$y = y_m \sin \left[\omega \left(\frac{x}{v} - t \right) \right],$$

$$y = y_m \sin \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - ft \right) \right],$$

$$y = y_m \sin \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right].$$



KONTROLA 2: Uvažte tři vlny, popsané rovnicemi
(1) $y(x, t) = 2 \sin(4x - 2t)$, (2) $y(x, t) = \sin(3x - 4t)$
a (3) $y(x, t) = 2 \sin(3x - 3t)$. Uspořádejte tyto vlny
sestupně (a) podle rychlosti vlny, (b) podle největší
příčné rychlosti kmitajících částic.

Příčná rychlost: $v_p(x, t) = \frac{\partial y(x, t)}{\partial t}$

HRW 17.13Ú

(a) Napište rovnici příčné postupné sinusové vlny, šířící se ve vlákně ve směru $+x$, má-li tato vlna vlnovou délku 10 cm, frekvenci 400 Hz a amplitudu 2,0 cm. (b) jaká je největší příčná rychlost částic vlákna? (c) Jaká je rychlost vlny?

$$\text{a) } y(x, t) = 0.02 \sin(800\pi \cdot t - 20\pi \cdot x)$$

$$\text{b) } v_p(x, t) = \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \quad v_{p\max} = 16\pi \text{ ms}^{-1} = 50,3 \text{ ms}^{-1}$$

$$\text{c) } v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f = 40 \text{ ms}^{-1}$$

Příklad 1.

- a) Napište rovnici příčné postupné harmonické vlny šířící se proti směru osy x .
- b) Pro vlnu o amplitudě 4 mm, vlnové délce 0,5 m a frekvenci 6 Hz zapište vztah pro příčnou rychlost částic struny v závislosti na x a t a určete maximální hodnotu příčné rychlosti.

$$b) v(t,x) = 0,15 \cos(4\pi x + 12\pi t), v_{max} = 0,15 \text{ m.s}^{-1}$$