



Literatura

- [1] J. Herman, R. Kučera a J. Šimša. *Metody řešení matematických úloh I*. MU Brno, druhé vydání, 2001.
- [2] K. Ireland a M. Rosen. *A Classical Introduction to Modern Number Theory*. Číslo 84 v Graduate Texts in Mathematics. Springer, druhé vydání, 1998.
- [3] I. M. Vinogradov. *Základy teorie čísel*. Nakladatelství ČSAV, 1953.

Home Page

Title Page

Contents



Page 2 of 51

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Algebra 2 — Teorie čísel

Michal Bulant

KATEDRA MATEMATIKY, PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA, MASARYKOVA UNI-
VERZITA, JANÁČKOVO NÁM. 2A, 662 95 BRNO

E-mail address: bulant@math.muni.cz

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[Contents](#)



Page 3 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

ABSTRAKT. Na této přednášce se budeme zabývat úlohami o celých číslech. Pře-
važně v nich půjde o dělitelnost celých čísel, popřípadě o řešení rovnic v oboru
celých nebo přirozených čísel. Ačkoli jsou přirozená a konec konců i celá čísla
v jistém smyslu nejjednodušší matematickou strukturou, zkoumání jejich vlast-
ností postavilo před generace matematiků celou řadu velice obtížných problémů.
Často jsou to problémy, které je možno snadno formulovat, přesto však dodnes
neznáme jejich řešení. Uvedme některé z nejznámějších: *problém prvočíselných*
dvojčat (rozhodnout, zda existuje nekonečně mnoho prvočísel p takových, že i
 $p + 2$ je prvočíslo), *Goldbachovu hypotézu* (rozhodnout, zda každé sudé číslo
větší než 2 je možno psát jako součet dvou prvočísel), nebo klenot mezi pro-
blémy teorie čísel - *velkou Fermatovu větu* (rozhodnout, zda existují přirozená
čísla n, x, y, z tak, že $n > 2$ a platí $x^n + y^n = z^n$).

Tento text výrazně čerpá z knih [1] a [3], pro zájemce o bližší seznámení s
n kterými tématy doporučujeme knihu [2], dostupnou v knihovně PřF MU.

V mnoha problémech je výhodné vyzkoušet chování algoritmů na reálných
příkladech. K tomu lze využít SW nainstalovaný na počítačích sekce matema-
tika. Doporučujeme zejména:

- PARI-GP : specializovaný SW na teorii čísel, při výpočtech s většími čísly
obvykle výrazně efektivnější než obecně orientované balíky. Spouští se pří-
kazem `gp`. Nejdůležitější příkazy: `\q` – ukončení, `?` – help, `??` – kompletní
uživatelský manuál, `?? tutorial` – tutoriál pro úvodní seznámení. Viz
také pari.math.u-bordeaux.fr.
- Maple: vhodný zejména kvůli existenci mnoha výukových pracovních listů
(worksheets, i pro teorii čísel), např. na www.mapleapps.com.

Home Page

Title Page

Contents



Page 4 of 51

Go Back

Full Screen

Close

Quit

[Home Page](#)[Title Page](#)[Contents](#)[Page 5 of 51](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

Obsah

Literatura	1
1. Základní pojmy	6
1.1. Dělitelnost	6
1.2. Největší společný dělitel a nejmenší společný násobek	9
1.3. Dělitelé a násobky mnoha čísel	14
1.4. Nesoudělnost	15
2. Prvočísla	18
3. Kongruence	31
3.1. Základní vlastnosti kongruencí	32
3.2. Aritmetické funkce	38
3.3. Eulerova funkce φ	41
3.4. Malá Fermatova věta, Eulerova věta	44



1. Základní pojmy

1.1. Dělitelnost.

DEFINICE. Řekneme, že celé číslo a dělí celé číslo b (neboli číslo b je dělitelné číslem a , též b je násobek a), právě když existuje celé číslo c tak, že platí $a \cdot c = b$. Píšeme pak $a \mid b$.

Přímo z definice plyne několik jednoduchých tvrzení, jejichž důkaz přenecháváme čtenáři jako cvičení s návodem v [1, §12]: Číslo nula je dělitelné každým celým číslem; jediné celé číslo, které je dělitelné nulou, je nula; pro libovolné číslo a platí $a \mid a$; pro libovolná čísla a, b, c platí tyto čtyři implikace:

$$a \mid b \wedge b \mid c \implies a \mid c \quad (1)$$

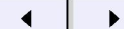
$$a \mid b \wedge a \mid c \implies a \mid b + c \wedge a \mid b - c \quad (2)$$

$$c \neq 0 \implies (a \mid b \iff ac \mid bc) \quad (3)$$

$$a \mid b \wedge b > 0 \implies a \leq b \quad (4)$$

PŘÍKLAD. Zjistěte, pro která přirozená čísla n je číslo $n^2 + 1$ dělitelné číslem $n + 1$.

ŘEŠENÍ. Platí $n^2 - 1 = (n + 1)(n - 1)$, a tedy číslo $n + 1$ dělí číslo $n^2 - 1$. Předpokládejme, že $n + 1$ dělí i číslo $n^2 + 1$. Pak ovšem musí dělit i rozdíl $(n^2 +$



$1) - (n^2 - 1) = 2$. Protože $n \in \mathbb{N}$, platí $n + 1 \geq 2$, a tedy z $n + 1 \mid 2$ plyne $n + 1 = 2$, proto $n = 1$. Uvedenou vlastnost má tedy jediné přirozené číslo 1. \square

VĚTA 1. (*Věta o dělení celých čísel se zbytkem*) Pro libovolně zvolená čísla $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ existují jednoznačně určená čísla $q \in \mathbb{Z}$, $r \in \{0, 1, \dots, m - 1\}$ tak, že $a = qm + r$.

DŮKAZ. Dokažme nejprve existenci čísel q, r . Předpokládejme, že přirozené číslo m je dáno pevně a dokažme úlohu pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$. Nejprve budeme předpokládat, že $a \in \mathbb{N}_0$ a existenci čísel q, r dokážeme indukcí:

Je-li $0 \leq a < m$, stačí volit $q = 0$, $r = a$ a rovnost $a = qm + r$ platí.

Předpokládejme nyní, že $a \geq m$ a že jsme existenci čísel q, r dokázali pro všechna $a' \in \{0, 1, 2, \dots, a - 1\}$. Speciálně pro $a' = a - m$ tedy existují q', r' tak, že $a' = q'm + r'$ a přitom $r' \in \{0, 1, \dots, m - 1\}$. Zvolíme-li $q = q' + 1$, $r = r'$, platí $a = a' + m = (q' + 1)m + r' = qm + r$, což jsme chtěli dokázat.

Existenci čísel q, r jsme tedy dokázali pro libovolné $a \geq 0$. Je-li naopak $a < 0$, pak ke kladnému číslu $-a$ podle výše dokázaného existují $q' \in \mathbb{Z}$, $r' \in \{0, 1, \dots, m - 1\}$ tak, že $-a = q'm + r'$, tedy $a = -q'm - r'$. Je-li $r' = 0$, položíme $r = 0$, $q = -q'$; je-li $r > 0$, položíme $r = m - r'$, $q = -q' - 1$. V obou případech $a = q \cdot m + r$, a tedy čísla q, r s požadovanými vlastnostmi existují pro každé $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$.

Nyní dokážeme jednoznačnost. Předpokládejme, že pro některá čísla $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$; $r_1, r_2 \in \{0, 1, \dots, m - 1\}$ platí $a = q_1m + r_1 = q_2m + r_2$. Úpravou dostaneme $r_1 - r_2 = (q_2 - q_1)m$, a tedy $m \mid r_1 - r_2$. Ovšem z $0 \leq r_1 < m$, $0 \leq r_2 < m$ plyne



$-m < r_1 - r_2 < m$, odkud podle (4) platí $r_1 - r_2 = 0$. Pak ale i $(q_2 - q_1)m = 0$, a proto $q_1 = q_2$, $r_1 = r_2$. Čísla q, r jsou tedy určena jednoznačně. Tím je důkaz ukončen. \square

Číslo q , resp. r z věty se nazývá (*neúplný*) *podíl*, resp. *zbytek* při dělení čísla a číslem m se zbytkem. Vhodnost obou názvů je zřejmá, přepíšeme-li rovnost $a = mq + r$ do tvaru

$$\frac{a}{m} = q + \frac{r}{m}, \quad \text{přitom} \quad 0 \leq \frac{r}{m} < 1.$$

Je vhodné též si uvědomit, že z věty 1 plyne, že číslo m dělí číslo a , právě když zbytek r je roven nule.

PŘÍKLAD. Dokažte, že jsou-li zbytky po dělení čísel $a, b \in \mathbb{Z}$ číslem $m \in \mathbb{N}$ jedna, je jedna i zbytek po dělení čísla ab číslem m .

ŘEŠENÍ. Podle věty 1 existují $s, t \in \mathbb{Z}$ tak, že $a = sm + 1$, $b = tm + 1$. Vynásobením dostaneme vyjádření

$$ab = (sm + 1)(tm + 1) = (stm + s + t)m + 1 = qm + r,$$

kde $q = stm + s + t$, $r = 1$, které je podle věty 1 jednoznačné, a tedy zbytek po dělení čísla ab číslem m je jedna. \square

POUŽITÍ V PARI-GP. Vydělením čísla 1234567890 číslem 321 se zbytkem dostáváme 3846005, zbytek 285 - jak vidíme v PARI:



```
? divrem(1234567890,321)
%2 = [3846005, 285]~
```

nebo i jinak:

```
? 1234567890\321
%3 = 3846005
? 1234567890%321
%4 = 285
```

1.2. Největší společný dělitel a nejmenší společný násobek.

DEFINICE. Mějme celá čísla a_1, a_2 . Libovolné celé číslo m takové, že $m \mid a_1$, $m \mid a_2$ (resp. $a_1 \mid m$, $a_2 \mid m$) se nazývá *společný dělitel* (resp. *společný násobek*) čísel a_1, a_2 . Společný dělitel (resp. násobek) $m \geq 0$ čísel a_1, a_2 , který je dělitelný libovolným společným dělitelem (resp. dělí libovolný společný násobek) čísel a_1, a_2 , se nazývá *největší společný dělitel* (resp. *nejmenší společný násobek*) čísel a_1, a_2 a značí se (a_1, a_2) (resp. $[a_1, a_2]$).

POZNÁMKA. Přímo z definice plyne, že pro libovolné $a, b \in \mathbb{Z}$ platí $(a, b) = (b, a)$, $[a, b] = [b, a]$, $(a, 1) = 1$, $[a, 1] = |a|$, $(a, 0) = |a|$, $[a, 0] = 0$. Ještě však není jasné, zda pro každou dvojici $a, b \in \mathbb{Z}$ čísla (a, b) a $[a, b]$ vůbec existují. Pokud však existují, jsou určena jednoznačně: Pro každá dvě čísla $m_1, m_2 \in \mathbb{N}_0$ totiž podle (4) platí, že pokud $m_1 \mid m_2$ a zároveň $m_2 \mid m_1$, je nutně $m_1 = m_2$. Důkaz existence



čísla (a, b) podáme (spolu s algoritmem jeho nalezení) ve větě 2, důkaz existence čísla $[a, b]$ a způsob jeho určení pak popíšeme ve větě 4.

VĚTA 2. (*Euklidův algoritmus*) *Nechť a_1, a_2 jsou přirozená čísla. Pro každé $n \geq 3$, pro které $a_{n-1} \neq 0$, označme a_n zbytek po dělení čísla a_{n-2} číslem a_{n-1} . Pak po konečném počtu kroků dostaneme $a_k = 0$ a platí $a_{k-1} = (a_1, a_2)$.*

DŮKAZ. Podle věty 1 platí $a_2 > a_3 > a_4 > \dots$. Protože jde o nezáporná celá čísla, je každé následující alespoň o 1 menší než předchozí, a proto po určitém konečném počtu kroků dostáváme $a_k = 0$, přičemž $a_{k-1} \neq 0$. Z definice čísel a_n plyne, že existují celá čísla q_1, q_2, \dots, q_{k-2} tak, že

$$\begin{aligned}
 a_1 &= q_1 \cdot a_2 + a_3, \\
 a_2 &= q_2 \cdot a_3 + a_4, \\
 &\vdots \\
 a_{k-3} &= q_{k-3} \cdot a_{k-2} + a_{k-1} \\
 a_{k-2} &= q_{k-2} \cdot a_{k-1}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Z poslední rovnosti plyne, že $a_{k-1} \mid a_{k-2}$, z předposlední, že $a_{k-1} \mid a_{k-3}$, atd., až nakonec ze druhé $a_{k-1} \mid a_2$ a z první dostaneme $a_{k-1} \mid a_1$. Je tedy a_{k-1} společný dělitel čísel a_1, a_2 . Naopak jejich libovolný společný dělitel dělí i číslo $a_3 = a_1 - q_1 a_2$,



proto i $a_4 = a_2 - q_2 a_3, \dots$, a proto i $a_{k-1} = a_{k-3} - q_{k-3} a_{k-2}$. Dokázali jsme, že a_{k-1} je největší dělitel čísel a_1, a_2 . \square

POZNÁMKA. Z poznámky za definicí, z věty 2 a z toho, že pro libovolná $a, b \in \mathbb{Z}$ platí $(a, b) = (a, -b) = (-a, b) = (-a, -b)$ plyne, že existuje největší společný dělitel libovolných dvou celých čísel.

VĚTA 3. (Bezoutova) Pro libovolná celá čísla a_1, a_2 existuje jejich největší společný dělitel (a_1, a_2) , přitom existují celá čísla k_1, k_2 tak, že $(a_1, a_2) = k_1 a_1 + k_2 a_2$.

DŮKAZ. Jistě stačí větu dokázat pro $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$. Všimněme si, že jestliže je možné nějaká čísla $r, s \in \mathbb{Z}$ vyjádřit ve tvaru $r = r_1 a_1 + r_2 a_2$, $s = s_1 a_1 + s_2 a_2$, kde $r_1, r_2, s_1, s_2 \in \mathbb{Z}$, můžeme tak vyjádřit i

$$r + s = (r_1 + s_1)a_1 + (r_2 + s_2)a_2$$

a také

$$c \cdot r = (c \cdot r_1)a_1 + (c \cdot r_2)a_2$$

pro libovolné $c \in \mathbb{Z}$. Protože $a_1 = 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2$, $a_2 = 0 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2$, plyne z (5), že takto můžeme vyjádřit i $a_3 = a_1 - q_1 a_2$, $a_4 = a_2 - q_2 a_3, \dots$, $a_{k-1} = a_{k-3} - q_{k-3} a_{k-2}$, což je ovšem (a_1, a_2) . \square

POUŽITÍ V PARI-GP. Výpočet největšího společného dělitele pomocí Euklidova algoritmu je s využitím výpočetní techniky i pro relativně velká čísla poměrně



a_1, a_2 , jsou $a_1/(a_1, a_2)$ i $a_2/(a_1, a_2)$ celá čísla, a proto

$$q = \frac{a_1 a_2}{(a_1, a_2)} = \frac{a_1}{(a_1, a_2)} \cdot a_2 = \frac{a_2}{(a_1, a_2)} \cdot a_1$$

je společný násobek čísel a_1, a_2 . Podle věty 3 existují $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tak, že $(a_1, a_2) = k_1 a_1 + k_2 a_2$. Předpokládejme, že $n \in \mathbb{Z}$ je libovolný společný násobek čísel a_1, a_2 a ukážeme, že je dělitelný číslem q . Je tedy $n/a_1, n/a_2 \in \mathbb{Z}$, a proto je i celé číslo

$$\frac{n}{a_2} \cdot k_1 + \frac{n}{a_1} \cdot k_2 = \frac{n(k_1 a_1 + k_2 a_2)}{a_1 a_2} = \frac{n(a_1, a_2)}{a_1 a_2} = \frac{n}{q}.$$

To ovšem znamená, že $q \mid n$, což jsme chtěli dokázat. \square

1.3. Dělitelé a násobky mnoha čísel.

DEFINICE. Největší společný dělitel a nejmenší společný násobek n čísel $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ definujeme analogicky jako v 1.2. Libovolné $m \in \mathbb{Z}$ takové, že $m \mid a_1, m \mid a_2, \dots, m \mid a_n$ (resp. $a_1 \mid m, a_2 \mid m, \dots, a_n \mid m$) se nazývá *společný dělitel* (resp. *společný násobek*) čísel a_1, a_2, \dots, a_n . Společný dělitel (resp. násobek) $m \geq 0$ čísel a_1, a_2, \dots, a_n , který je dělitelný libovolným společným dělitelem (resp. dělí libovolný společný násobek) těchto čísel, se nazývá *největší společný dělitel* (resp. *nejmenší společný násobek*) čísel a_1, a_2, \dots, a_n a značí se (a_1, a_2, \dots, a_n) (resp. $[a_1, a_2, \dots, a_n]$).



Snadno se přesvědčíme, že platí

$$(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n) = ((a_1, \dots, a_{n-1}), a_n), \quad (6)$$

$$[a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] = [[a_1, \dots, a_{n-1}], a_n]. \quad (7)$$

Největší společný dělitel (a_1, \dots, a_n) totiž dělí všechna čísla a_1, \dots, a_n , a tedy je společným dělitelem čísel a_1, \dots, a_{n-1} , a proto dělí i největšího společného dělitele (a_1, \dots, a_{n-1}) , tj. $(a_1, \dots, a_n) \mid ((a_1, \dots, a_{n-1}), a_n)$. Naopak největší společný dělitel čísel $(a_1, \dots, a_{n-1}), a_n$ musí kromě čísla a_n dělit i všechna čísla a_1, \dots, a_{n-1} , protože dělí jejich největšího společného dělitele, a proto $((a_1, \dots, a_{n-1}), a_n) \mid (a_1, \dots, a_n)$. Dohromady dostáváme rovnost (6) a zcela analogicky se dokáže (7).

Pomocí (6) a (7) snadno dokážeme existenci největšího společného dělitele i nejmenšího společného násobku libovolných n čísel indukcí vzhledem k n : pro $n = 2$ je jejich existence dána větami 2 a 4, jestliže pro některé $n > 2$ víme, že existuje největší společný dělitel i nejmenší společný násobek libovolných $n - 1$ čísel, podle (6) a (7) existuje i pro libovolných n čísel.

1.4. Nesoudělnost.

DEFINICE. Čísla $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ se nazývají *nesoudělná*, jestliže platí $(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$. Čísla $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ se nazývají *po dvou nesoudělná*, jestliže pro každé i, j takové, že $1 \leq i < j \leq n$, platí $(a_i, a_j) = 1$.



POZNÁMKA. V případě $n = 2$ oba pojmy splývají, pro $n > 2$ plyne z nesoudělnosti po dvou nesoudělnost, ne však naopak: například čísla 6, 10, 15 jsou nesoudělná, ale nejsou nesoudělná po dvou, neboť dokonce žádná dvojice z nich vybraná nesoudělná není: $(6, 10) = 2$, $(6, 15) = 3$, $(10, 15) = 5$.

PŘÍKLAD. Nalezněte největší společný dělitel čísel $2^{63} - 1$ a $2^{91} - 1$.

ŘEŠENÍ. Užijeme Euklidův algoritmus. Platí

$$2^{91} - 1 = 2^{28}(2^{63} - 1) + 2^{28} - 1,$$

$$2^{63} - 1 = (2^{35} + 2^7)(2^{28} - 1) + 2^7 - 1,$$

$$2^{28} - 1 = (2^{21} + 2^{14} + 2^7 + 1)(2^7 - 1).$$

Hledaný největší společný dělitel je tedy $2^7 - 1 = 127$. □

VĚTA 5. Pro libovolná přirozená čísla a, b, c platí

(1) $(ac, bc) = (a, b) \cdot c$,

(2) jestliže $(a, b) = 1$ a $a \mid bc$, pak $a \mid c$,

(3) $d = (a, b)$ právě tehdy, když existují $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$ tak, že $a = dq_1$, $b = dq_2$ a $(q_1, q_2) = 1$.

DŮKAZ. ad 1. Protože (a, b) je společný dělitel čísel a, b , je $(a, b) \cdot c$ společný dělitel čísel ac, bc , proto $(a, b) \cdot c \mid (ac, bc)$. Podle věty 3 existují $k, l \in \mathbb{Z}$ tak, že $(a, b) = ka + lb$. Protože (ac, bc) je společný dělitel čísel ac, bc , dělí i číslo

$kac + lbc = (a, b) \cdot c$. Dokázali jsme, že $(a, b) \cdot c$ a (ac, bc) jsou dvě přirozená čísla, která dělí jedno druhé, proto se podle (4) rovnají.

ad 2. Předpokládejme, že $(a, b) = 1$ a $a \mid bc$. Podle Bezoutovy věty (věta 3) existují $k, l \in \mathbb{Z}$ tak, že $ka + lb = 1$, odkud plyne, že $c = c(ka + lb) = kca + lbc$. Protože $a \mid bc$, plyne odsud, že i $a \mid c$.

ad 3. Nechť $d = (a, b)$, pak existují $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$ tak, že $a = dq_1$, $b = dq_2$. Pak podle části (1) platí $d = (a, b) = (dq_1, dq_2) = d \cdot (q_1, q_2)$, a tedy $(q_1, q_2) = 1$. Naopak, je-li $a = dq_1$, $b = dq_2$ a $(q_1, q_2) = 1$, pak $(a, b) = (dq_1, dq_2) = d(q_1, q_2) = d \cdot 1 = d$ (opět užitím 1. části tohoto tvrzení). \square

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[Contents](#)



Page 17 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



2. Prvočísla

Prvočíslo je jeden z nejdůležitějších pojmů elementární teorie čísel. Jeho důležitost je dána především větou o jednoznačném rozkladu libovolného přirozeného čísla na součin prvočísel, která je silným a účinným nástrojem při řešení celé řady úloh z teorie čísel.

DEFINICE. Každé přirozené číslo $n \geq 2$ má aspoň dva kladné dělitele: 1 a n . Pokud kromě těchto dvou jiné kladné dělitele nemá, nazývá se *prvočíslo*. V opačném případě hovoříme o *složeném čísle*.

V dalším textu budeme zpravidla prvočíslo značit písmenem p . Nejmenší prvočísla jsou 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, \dots . Prvočísel je, jak brzy dokážeme, nekonečně mnoho, máme ovšem poměrně limitované výpočetní prostředky na zjištění, zda je dané číslo prvočíslem (největší známé prvočíslo $2^{30\,402\,457} - 1$ má pouze 9 152 052 cifer).

VĚTA 6. *Přirozené číslo $p \geq 2$ je prvočíslo, právě když platí: pro každá celá čísla a, b z $p \mid ab$ plyne $p \mid a$ nebo $p \mid b$.*

DŮKAZ. „ \Rightarrow “ Předpokládejme, že p je prvočíslo a $p \mid ab$, kde $a, b \in \mathbb{Z}$. Protože (p, a) je kladný dělitel p , platí $(p, a) = p$ nebo $(p, a) = 1$. V prvním případě $p \mid a$, ve druhém $p \mid b$ podle věty 5.



„ \Leftarrow “ Jestliže p není prvočíslo, musí existovat jeho kladný dělitel různý od 1 a p . Označíme jej a ; pak ovšem $b = \frac{p}{a} \in \mathbb{N}$ a platí $p = ab$, odkud $1 < a < p$, $1 < b < p$. Našli jsme tedy celá čísla a, b tak, že $p \mid ab$ a přitom p nedělí ani a , ani b . \square

PŘÍKLAD. Nalezněte všechna čísla $k \in \mathbb{N}_0$, pro která je mezi deseti po sobě jdoucími čísly $k + 1, k + 2, \dots, k + 10$ nejvíce prvočísel.

ŘEŠENÍ. Pro $k = 1$ je mezi našimi čísly pět prvočísel: 2, 3, 5, 7, 11. Pro $k = 0$ a $k = 2$ pouze čtyři prvočísla. Jestliže $k \geq 3$, není mezi zkoumanými čísly číslo 3. Mezi deseti po sobě jdoucími celými čísly pět sudých a pět lichých čísel, mezi kterými je zase aspoň jedno dělitelné třemi. Našli jsme tedy mezi čísly $k + 1, k + 2, \dots, k + 10$ aspoň šest složených, jsou tedy mezi nimi nejvýše čtyři prvočísla. Zadáni proto vyhovuje jedině číslo $k = 1$. \square

PŘÍKLAD. Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo n existuje n po sobě jdoucích přirozených čísel, z nichž žádné není prvočíslo.

ŘEŠENÍ. Zkoumejme čísla $(n + 1)! + 2, (n + 1)! + 3, \dots, (n + 1)! + (n + 1)$. Mezi těmito n po sobě jdoucími čísly není žádné prvočíslo, protože pro libovolné $k \in \{2, 3, \dots, n + 1\}$ platí $k \mid (n + 1)!$, a tedy $k \mid (n + 1)! + k$, a proto $(n + 1)! + k$ nemůže být prvočíslo. \square

PŘÍKLAD. Dokažte, že pro libovolné prvočíslo p a libovolné $k \in \mathbb{N}$, $k < p$, je kombinační číslo $\binom{p}{k}$ dělitelné p .



ŘEŠENÍ. Podle definice kombinačního čísla

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{p \cdot (p-1) \cdots (p-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} \in \mathbb{N},$$

a tedy $k! \mid p \cdot a$, kde jsme označili $a = (p-1) \cdots (p-k+1)$. Protože $k < p$, není žádné z čísel $1, 2, \dots, k$ dělitelné prvočíslem p , a tedy podle věty 6 není ani $k!$ dělitelné prvočíslem p , odkud $(k!, p) = 1$. Podle věty 5 platí $k! \mid a$, a tedy $b = \frac{a}{k!}$ je celé číslo. Protože $\binom{p}{k} = \frac{pa}{k!} = pb$, je číslo $\binom{p}{k}$ dělitelné číslem p . \square

VĚTA 7. *Libovolné přirozené číslo $n \geq 2$ je možné vyjádřit jako součin prvočísel, přičemž je toto vyjádření jediné, nebereme-li v úvahu pořadí činitelů. (Je-li n prvočíslo, pak jde o „součin“ jednoho prvočísla.)*

POZNÁMKA. Dělitelnost je možné obdobným způsobem jako v 1.1 definovat v libovolném oboru integrity (zkuste si rozmyslet, proč se omezujeme na obory integrity). V některých oborech integrity přitom žádné prvky s vlastností prvočísla (říkáme jim *ireducibilní*) neexistují (např. \mathbb{Q}), v jiných sice ireducibilní prvky existují, ale zase tam neplatí věta o jednoznačném rozkladu (např. v $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$ máme následující rozklady: $6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5}) \cdot (1 - \sqrt{-5})$; zkuste si rozmyslet, že všichni uvedení činitelé jsou skutečně v $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$ ireducibilní).

DŮKAZ. Nejprve dokážeme indukci, že každé $n \geq 2$ je možné vyjádřit jako součin prvočísel.



Je-li $n = 2$, je n součin jediného prvočísla 2.

Předpokládejme nyní, že $n > 2$ a že jsme již dokázali, že libovolné n' , $2 \leq n' < n$, je možné rozložit na součin prvočísel. Jestliže n je prvočísla, je součinem jediného prvočísla. Jestliže n prvočísla není, pak existuje jeho dělitel d , $1 < d < n$. Označíme-li $c = \frac{n}{d}$, platí také $1 < c < n$. Z indukčního předpokladu plyne, že c i d je možné vyjádřit jako součin prvočísel, a proto je takto možné vyjádřit i jejich součin $c \cdot d = n$.

Nyní dokážeme jednoznačnost. Předpokládejme, že platí rovnost součinů $p_1 \cdot p_2 \cdots p_m = q_1 \cdot q_2 \cdots q_s$, kde $p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_s$ jsou prvočísla a navíc platí $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_m$, $q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_s$ a $1 \leq m \leq s$. Indukcí vzhledem k m dokážeme, že $m = s$, $p_1 = q_1, \dots, p_m = q_m$.

Je-li $m = 1$, je $p_1 = q_1 \cdots q_s$ prvočísla. Kdyby $s > 1$, mělo by číslo p_1 dělitele q_1 takového, že $1 < q_1 < p_1$ (neboť $q_2 q_3 \dots q_s > 1$), což není možné. Je tedy $s = 1$ a platí $p_1 = q_1$.

Předpokládejme, že $m \geq 2$ a že tvrzení platí pro $m - 1$. Protože $p_1 \cdot p_2 \cdots p_m = q_1 \cdot q_2 \cdots q_s$, dělí p_m součin $q_1 \cdots q_s$, což je podle věty 6 možné jen tehdy, jestliže p_m dělí nějaké q_i pro vhodné $i \in \{1, 2, \dots, s\}$. Protože q_i je prvočísla, plyne odtud $p_m = q_i$ (neboť $p_m > 1$). Zcela analogicky se dokáže, že $q_s = p_j$ pro vhodné $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Odtud plyne

$$q_s = p_j \leq p_m = q_i \leq q_s,$$



takže $p_m = q_s$. Vydělením dostaneme $p_1 \cdot p_2 \cdots p_{m-1} = q_1 \cdot q_2 \cdots q_{s-1}$, a tedy z indukčního předpokladu $m - 1 = s - 1$, $p_1 = q_1, \dots, p_{m-1} = q_{m-1}$. Celkem tedy $m = s$ a $p_1 = q_1, \dots, p_{m-1} = q_{m-1}, p_m = q_m$. Jednoznačnost, a proto i celá věta 7 je dokázána. \square

POZNÁMKA. Již jsme se zmínili, že je složité o velkých číslech s jistotou rozhodnout, jde-li o prvočíslo (na druhou stranu je o naprosté většině složených čísel snadné prokázat, že jsou skutečně složená). Přesto se v roce 2002 podařilo indickým matematikům (Agrawal, Saxena, Kayal: http://www.cse.iitk.ac.in/users/manindra/primality_v6.pdf) dokázat, že problém prvočíselnosti je možné rozhodnout algoritmem s časovou složitostí polynomiálně závislou na počtu cifer vstupního čísla. Nic podobného se zatím nepodařilo v otázce rozkladu čísla na prvočísla (třebaže se obecně nevěří, že je to možné, exaktní důkaz zatím nebyl podán).

Že je problém rozkladu přirozeného čísla na prvočísla výpočetně složitý, o tom svědčí i výzva učiněná firmou RSA Security (viz <http://www.rsasecurity.com/rsalabs/node.asp?id=2093>). Pokud se vám podaří rozložit čísla označená podle počtu cifer jako RSA-704, RSA-768, ..., RSA-2048, obdržíte 30 000, 50 000, ..., resp. 200 000 dolarů (čísla RSA-576 a RSA-640 již byla rozložena v roce 2003, resp. 2005; byla-li vyplacena slíbená odměna, mi není známo).



DŮSLEDEK. (1) Jsou-li p_1, \dots, p_k navzájem různá prvočísla a $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}_0$, je každý kladný dělitel čísla $a = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$ tvaru $p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$, kde $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}_0$ a $m_1 \leq n_1, m_2 \leq n_2, \dots, m_k \leq n_k$. Číslo a má tedy právě

$$\tau(a) = (n_1 + 1)(n_2 + 1) \cdots (n_k + 1)$$

kladných dělitelů, jejichž součet je

$$\sigma(a) = \frac{p_1^{n_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdots \frac{p_k^{n_k+1} - 1}{p_k - 1}.$$

(2) Jsou-li p_1, \dots, p_k navzájem různá prvočísla a $n_1, \dots, n_k, m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}_0$ a označíme-li $r_i = \min\{n_i, m_i\}$, $t_i = \max\{n_i, m_i\}$ pro každé $i = 1, 2, \dots, k$, platí

$$(p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}, p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}) = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k},$$

$$[p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}, p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}] = p_1^{t_1} \cdots p_k^{t_k}.$$

POZNÁMKA. S pojmem *součet všech kladných dělitelů čísla a* souvisí pojem tzv. *dokonalého čísla a* , které splňuje podmínku $\sigma(a) = 2a$, resp. slovně: „součet všech kladných dělitelů čísla a menších než a samotné je roven číslu a “.

Takovými čísly jsou např. $6 = 1 + 2 + 3$, $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$, $496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$ a 8128 (jde o všechna dokonalá čísla menší než 10 000).



Lze ukázat, že sudá dokonalá čísla jsou v úzkém vztahu s tzv. *Mersenneho prvočíslly*. Platí totiž: *a je sudé dokonalé číslo, právě když je tvaru $a = 2^{q-1} \cdot (2^q - 1)$, kde $2^q - 1$ je prvočíslo*. Mersenneho prvočísla jsou právě prvočísla tvaru $2^k - 1$. Bez zajímavosti není ani to, že právě Mersenneho prvočísla jsou mezi všemi prvočíslly nejlépe „vidět“ – obecně je pro velká čísla, u kterých se nedaří nalézt netriviálního dělitele, obtížné prokázat, že jsou prvočísla. Pro Mersenneho prvočísla existuje poměrně jednoduchý a rychlý postup. Proto není náhodou, že největší známá prvočísla jsou obvykle tvaru $2^k - 1$ (viz např. <http://www.utm.edu/research/primes/largest.html>).

Na druhou stranu popsát lichá dokonalá čísla se dodnes nepodařilo, resp. **dodnes se neví, jestli vůbec nějaké liché dokonalé číslo existuje**

PŘÍKLAD. Dokažte, že pro každé celé $n > 2$ existuje mezi čísly n a $n!$ alespoň jedno prvočíslo.

ŘEŠENÍ. Označme p libovolné prvočíslo dělící číslo $n! - 1$ (takové existuje podle věty 7, protože $n! - 1 > 1$). Kdyby $p \leq n$, muselo by p dělit číslo $n!$ a nedělilo by $n! - 1$. Je tedy $n < p$. Protože $p \mid (n! - 1)$, platí $p \leq n! - 1$, tedy $p < n!$. Prvočíslo p splňuje podmínky úlohy. \square

Nyní uvedeme několik důkazů toho, že existuje nekonečně mnoho prvočísel (i když tvrzení v podstatě vyplývá už z předchozího příkladu).

VĚTA 8. *Mezi přirozenými čísly existuje nekonečně mnoho prvočísel.*



DŮKAZ. (Eukleides) Předpokládejme, že prvočísel je konečně mnoho a označme je p_1, p_2, \dots, p_n . Položme $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$. Toto číslo je buď samo prvočíslem nebo je dělitelné nějakým prvočíslem různým od p_1, \dots, p_n (čísla p_1, \dots, p_n totiž dělí číslo $N - 1$), což je spor.

(Kummer, 1878): Předpokládejme, že prvočísel je konečně mnoho a označme je $p_1 < p_2 < \dots < p_n$. Položme $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n > 2$. Číslo $N - 1$ je podle věty 7 dělitelné některým prvočíslem p_i , které dělí zároveň číslo N a tedy i $N - (N - 1) = 1$. Spor.

(Fürstenberg, 1955):

V této poznámce uvedeme elementární „topologický“ důkaz existence nekonečně mnoha prvočísel. Zavedeme topologii prostoru celých čísel pomocí báze tvořené aritmetickými posloupnostmi (od $-\infty$ do $+\infty$). Lze snadno ověřit, že jde skutečně o topologický prostor, navíc lze ukázat, že je normální a tedy metrizovatelný. Každá aritmetická posloupnost je uzavřená i otevřená množina (její komplement je sjednocení ostatních aritmetických posloupností se stejnou diferencí). Dostáváme, že sjednocení konečného počtu aritmetických posloupností je uzavřená množina. Uvažme množinu $A = \cup A_p$, kde A_p je tvořena všemi násobky p a p probíhá všechna prvočísla. Jediná celá čísla nepatřící do A jsou -1 a 1 a protože množina $\{-1, 1\}$ zřejmě není otevřená, množina A nemůže být uzavřená. A tedy není



konečným sjednocením uzavřených množin, což znamená, že musí existovat nekonečně mnoho prvočísel.

□

PŘÍKLAD. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel tvaru $3k + 2$, kde $k \in \mathbb{N}_0$.

ŘEŠENÍ. Předpokládejme naopak, že existuje pouze konečně mnoho prvočísel tohoto tvaru a označme je $p_1 = 2, p_2 = 5, p_3 = 11, \dots, p_n$. Položme $N = 3p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n + 2$. Rozložíme-li N na součin prvočísel podle věty 7, musí v tomto rozkladu vystupovat aspoň jedno prvočíslo p tvaru $3k + 2$, neboť v opačném případě by bylo N součinem prvočísel tvaru $3k + 1$ (uvažte, že N není dělitelné třemi), a tedy podle příkladu na str. 8 by bylo i N tvaru $3k + 1$, což neplatí. Prvočíslo p ovšem nemůže být žádné z prvočísel p_1, p_2, \dots, p_n , jak plyne z tvaru čísla N , a to je spor. □

Předchozí příklady je možné značně zobecnit. Platí totiž tvrzení, které bývá nazýváno Bertrandovým postulátem nebo Čebyševovou větou:

VĚTA 9. (Čebyševova)

(1) *libovolné přirozené číslo $n > 5$ existují mezi čísly n a $2n$ alespoň dvě prvočísla.*



(2) Pro každé číslo $n > 3$ existuje mezi čísly n a $2n-2$ alespoň jedno prvočíslo.

DŮKAZ. Důkaz lze provést elementárními prostředky, je však poměrně dlouhý, proto zde není uveden. Viz např. <http://matholymp.com/TUTORIALS/Bertrand.pdf> □

Z tvrzení uvedených v této kapitole je možné si udělat hrubou představu o tom, jak „husté“ se mezi přirozenými čísla prvočísla vyskytují. Přesněji (i když „pouze“ asymptoticky) to popisuje tzv. „prime number theorem“:

VĚTA 10. (o hustotě prvočísel) Necht' $\pi(x)$ udává počet prvočísel menších nebo rovných číslu $x \in \mathbb{R}$. Pak

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x},$$

tj. podíl funkcí $\pi(x)$ a $x/\ln x$ se pro $x \rightarrow \infty$ limitně blíží k nule.

POZNÁMKA. To, jak jsou prvočísla hustě rozmístěna v množině přirozených čísel, rovněž udává Eulerův výsledek

$$\sum_{p \text{ prvočíslo}} \frac{1}{p} = \infty.$$

Přitom např.

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$



což znamená, že prvočísla jsou v \mathbb{N} rozmístěna „hustěji“ než druhé mozniny.

POUŽITÍ V PARI-GP. O tom, jak odpovídá asymptotický odhad $\pi(x) \sim x/\ln(x)$, v některých konkrétních příkladech vypovídá následující tabulka (získána s využitím funkce `primepi(x)` v Pari-GP.

```
? v=[100,1000,10000,100000,500000];
? for(k=1,5,print(v[k], "&", primepi(v[k]), "&", \
v[k]/log(v[k]), "&", \
(primepi(v[k])-v[k]/log(v[k]))/primepi(v[k]))))
```

x	$\pi(x)$	$x/\ln(x)$	relativní chyba
100	25	21.71	0.13
1000	168	144.76	0.13
10000	1229	1085.73	0.11
100000	9592	8685.88	0.09
500000	41538	38102.89	0.08

Poslední příklad (o nekonečnosti počtu prvočísel tvaru $3k + 2$) zobecňuje *Dirichletova věta o aritmetické posloupnosti*:

VĚTA 11. (*Dirichletova*) Jsou-li a, m nesoudělná přirozená čísla, existuje nekonečně mnoho přirozených čísel k tak, že $mk + a$ je prvočíslo. Jinými slovy, mezi čísla $1 \cdot m + a, 2 \cdot m + a, 3 \cdot m + a, \dots$ existuje nekonečně mnoho prvočísel.



DŮKAZ. Jde o hlubokou větu teorie čísel, k jejímuž důkazu je zapotřebí aparát značně přesahující její elementární část. Viz např. [2, kap. ???] \square

OZNAČENÍ. Pro libovolné prvočíslo p a libovolné přirozené číslo n je podle věty 7 jednoznačně určen exponent, se kterým vystupuje p v rozkladu čísla n na prvočinitele (pokud p nedělí číslo n , považujeme tento exponent za nulový). Budeme jej označovat symbolem $v_p(n)$. Pro záporné celé číslo n klademe $v_p(n) = v_p(-n)$.

Podle důsledku 2 můžeme právě zavedené označení $v_p(n)$ charakterizovat tím, že $p^{v_p(n)}$ je nejvyšší mocninou prvočísla p , která dělí číslo n , nebo tím, že $n = p^{v_p(n)} \cdot m$, kde m je celé číslo, které není dělitelné číslem p . Odtud snadno plyne, že pro libovolná nenulová celá čísla a, b platí

$$v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b) \quad (8)$$

$$v_p(a) \leq v_p(b) \wedge a + b \neq 0 \implies v_p(a + b) \geq v_p(a) \quad (9)$$

$$v_p(a) < v_p(b) \implies v_p(a + b) = v_p(a) \quad (10)$$

$$v_p(a) \leq v_p(b) \implies v_p((a, b)) = v_p(a) \wedge v_p([a, b]) = v_p(b) \quad (11)$$

Na následujícím příkladu demonstrujeme užitečnost zavedeného označení.



PŘÍKLAD. Dokažte, že pro libovolná přirozená čísla a, b, c platí

$$([a, b], [a, c], [b, c]) = [(a, b), (a, c), (b, c)]$$

ŘEŠENÍ. Podle věty 7 budeme hotovi, ukážeme-li, že $v_p(L) = v_p(P)$ pro libovolné prvočíslo p , kde L , resp. P značí výraz na levé, resp. pravé straně. Nechť je tedy p libovolné prvočíslo. Vzhledem k symetrii obou výrazů můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $v_p(a) \leq v_p(b) \leq v_p(c)$. Podle (11) platí $v_p([a, b]) = v_p(b)$, $v_p([a, c]) = v_p([b, c]) = v_p(c)$; $v_p((a, b)) = v_p((a, c)) = v_p(a)$, $v_p((b, c)) = v_p(b)$, odkud $v_p(L) = v_p(b) = v_p(P)$, což jsme měli dokázat. \square



3. Kongruence

Pojem kongruence byl zaveden Gaussem. Ačkoliv je to pojem velice jednoduchý, jeho důležitost a užitečnost v teorii čísel je nedocentitelná; projevuje se zejména ve stručných a přehledných zápisech některých i velmi komplikovaných úvah.

DEFINICE. Jestliže dvě celá čísla a, b mají při dělení přirozeným číslem m týž zbytek r , kde $0 \leq r < m$, nazývají se a, b kongruentní modulo m (též kongruentní podle modulu m), což zapisujeme takto:

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

V opačném případě řekneme, že a, b nejsou kongruentní modulo m , a píšeme

$$a \not\equiv b \pmod{m}.$$

LEMMA. Pro libovolná $a, b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

- (1) $a \equiv b \pmod{m}$,
- (2) $a = b + mt$ pro vhodné $t \in \mathbb{Z}$,
- (3) $m \mid a - b$.

DŮKAZ. „(1) \Rightarrow (3)“ Jestliže $a = q_1m + r$, $b = q_2m + r$, pak $a - b = (q_1 - q_2)m$.

„(3) \Rightarrow (2)“ Jestliže $m \mid a - b$, pak existuje $t \in \mathbb{Z}$ tak, že $m \cdot t = a - b$, tj. $a = b + mt$.



„(2) \Rightarrow (1)“ Jestliže $a = b + mt$, pak z vyjádření $b = mq + r$ plyne $a = m(q + t) + r$, tedy a i b mají při dělení číslem m týž zbytek r , tj. $a \equiv b \pmod{m}$. \square

3.1. Základní vlastnosti kongruencí. Přímou z definice plyne, že kongruence podle modulu m je reflexivní (tj. $a \equiv a \pmod{m}$ platí pro každé $a \in \mathbb{Z}$), symetrická (tj. pro každé $a, b \in \mathbb{Z}$ z $a \equiv b \pmod{m}$ plyne $b \equiv a \pmod{m}$) a tranzitivní (tj. pro každé $a, b, c \in \mathbb{Z}$ z $a \equiv b \pmod{m}$ a $b \equiv c \pmod{m}$ plyne $a \equiv c \pmod{m}$) relace, jde tedy o *ekvivalenci*. Dokážeme nyní další vlastnosti:

VĚTA 12. (*Základní vlastnosti kongruencí*)

- (1) **Kongruence podle téhož modulu můžeme sčítat.** *Libovolný sčítanec můžeme přenést s opačným znaménkem z jedné strany kongruence na druhou. Na libovolnou stranu kongruence můžeme přičíst jakýkoliv násobek modulu.*

DŮKAZ. Je-li $a_1 \equiv b_1 \pmod{m}$ a $a_2 \equiv b_2 \pmod{m}$, existují podle lemmatu $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$ tak, že $a_1 = b_1 + mt_1$, $a_2 = b_2 + mt_2$. Pak ovšem $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 + m(t_1 + t_2)$ a opět podle lemmatu $a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 \pmod{m}$. Sečteme-li kongruenci $a + b \equiv c \pmod{m}$ s kongruencí $-b \equiv -b \pmod{m}$, která zřejmě platí, dostaneme $a \equiv c - b \pmod{m}$. Sečteme-li kongruenci $a \equiv b \pmod{m}$ s kongruencí $mk \equiv 0 \pmod{m}$, jejíž platnost je zřejmá, dostaneme $a + mk \equiv b \pmod{m}$. \square



- (2) **Kongruence podle téhož modulu můžeme násobit.** Obě strany kongruence je možné **umocnit na totéž přirozené číslo**. Obě strany kongruence je možné **vynásobit stejným celým číslem**.

DŮKAZ. Je-li $a_1 \equiv b_1 \pmod{m}$ a $a_2 \equiv b_2 \pmod{m}$, existují podle $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$ tak, že $a_1 = b_1 + mt_1$, $a_2 = b_2 + mt_2$. Pak ovšem

$$a_1 a_2 = (b_1 + mt_1)(b_2 + mt_2) = b_1 b_2 + m(t_1 b_2 + b_1 t_2 + mt_1 t_2),$$

odkud podle dostáváme $a_1 a_2 \equiv b_1 b_2 \pmod{m}$.

Je-li $a \equiv b \pmod{m}$, dokážeme indukcí vzhledem k přirozenému číslu n , že platí $a^n \equiv b^n \pmod{m}$. Pro $n = 1$ není co dokazovat. Platí-li $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ pro nějaké pevně zvolené n , vynásobením této kongruence a kongruence $a \equiv b \pmod{m}$ dostáváme $a^n \cdot a \equiv b^n \cdot b \pmod{m}$, tedy $a^{n+1} \equiv b^{n+1} \pmod{m}$, což je tvrzení pro $n + 1$. Důkaz indukcí je hotov.

Jestliže vynásobíme kongruenci $a \equiv b \pmod{m}$ a kongruenci $c \equiv c \pmod{m}$, dostaneme $ac \equiv bc \pmod{m}$. \square

- (3) **Obě strany kongruence můžeme vydělit jejich společným dělitelem, jestliže je tento dělitel nesoudělný s modulem.**

DŮKAZ. Předpokládejme, že $a \equiv b \pmod{m}$, $a = a_1 \cdot d$, $b = b_1 \cdot d$ a $(m, d) = 1$. Podle lemmatu je rozdíl $a - b = (a_1 - b_1) \cdot d$ dělitelný číslem



m . Protože $(m, d) = 1$, je podle věty 5 číslo $a_1 - b_1$ také dělitelné číslem m , odtud podle lemmatu plyne $a_1 \equiv b_1 \pmod{m}$. \square

- (4) *Obě strany kongruence i její modul můžeme současně vynásobit tímtéž přirozeným číslem.*

DŮKAZ. Je-li $a \equiv b \pmod{m}$, existuje podle lemmatu celé číslo t tak, že $a = b + mt$, odkud pro $c \in \mathbb{N}$ platí $ac = bc + mc \cdot t$, odkud opět podle lemmatu plyne $ac \equiv bc \pmod{mc}$. \square

- (5) *Obě strany kongruence i její modul můžeme vydělit jejich společným kladným dělitelem.*

DŮKAZ. Předpokládejme, že $a \equiv b \pmod{m}$, $a = a_1 \cdot d$, $b = b_1 \cdot d$, $m = m_1 \cdot d$, kde $d \in \mathbb{N}$. Podle lemmatu existuje $t \in \mathbb{Z}$ tak, že $a = b + mt$, tj. $a_1 \cdot d = b_1 \cdot d + m_1 dt$, odkud $a_1 = b_1 + m_1 t$, což podle lemmatu znamená, že $a_1 \equiv b_1 \pmod{m_1}$. \square

- (6) ***Jestliže kongruence $a \equiv b$ platí podle různých modulů m_1, \dots, m_k , platí i podle modulu, kterým je nejmenší společný násobek $[m_1, \dots, m_k]$ těchto čísel.***

DŮKAZ. Jestliže $a \equiv b \pmod{m_1}$, $a \equiv b \pmod{m_2}, \dots, a \equiv b \pmod{m_k}$, podle lemmatu je rozdíl $a - b$ společný násobek čísel m_1, m_2, \dots, m_k a



tedy je dělitelný jejich nejmenším společným násobkem $[m_1, m_2, \dots, m_k]$, odkud plyne $a \equiv b \pmod{[m_1, \dots, m_k]}$. \square

- (7) *Jestliže kongruence platí podle modulu m , platí podle libovolného modulu d , který je dělitelem čísla m .*

DŮKAZ. Jestliže $a \equiv b \pmod{m}$, je $a - b$ dělitelné m , a proto také dělitelem d čísla m , odkud $a \equiv b \pmod{d}$. \square

- (8) *Jestliže je jedna strana kongruence a modul dělitelný nějakým celým číslem, musí být tímto číslem dělitelná i druhá strana kongruence.*

DŮKAZ. Předpokládejme, že $a \equiv b \pmod{m}$, $b = b_1d$, $m = m_1d$. Pak podle lemmatu existuje $t \in \mathbb{Z}$ tak, že $a = b + mt = b_1d + m_1dt = (b_1 + m_1t)d$, a tedy $d \mid a$. \square

POZNÁMKA. Některé vlastnosti kongruencí jsme již používali, aniž bychom si toho povšimli – například příklad ze strany 8 lze přeformulovat do tvaru „jestliže $a \equiv 1 \pmod{m}$, $b \equiv 1 \pmod{m}$, pak také $ab \equiv 1 \pmod{m}$ “, což je speciální případ tvrzení věty 12 (2). Nejde o náhodu. Libovolné tvrzení používající kongruence můžeme snadno přepsat pomocí dělitelnosti. Užitečnost kongruencí tedy netkví v tom, že bychom pomocí nich mohli řešit úlohy, které bez nich řešit nejsme



schopni, ale v tom, že jde o velmi vhodný způsob zápisu. Osvojíme-li si ho, výrazně tím zjednodušíme jak vyjadřování, tak i některé úvahy. Je to typický jev: v matematice hraje vhodná symbolika velmi závažnou úlohu.

PŘÍKLAD. Nalezněte zbytek po dělení čísla 5^{20} číslem 26.

ŘEŠENÍ. Protože $5^2 = 25 \equiv -1 \pmod{26}$, platí podle věty 12 (2)

$$5^{20} \equiv (-1)^{10} = 1 \pmod{26},$$

a tedy zbytek po dělení čísla 5^{20} číslem 26 je jedna. □

PŘÍKLAD. Dokažte, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ je $37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n$ dělitelné sedmi.

ŘEŠENÍ. Platí $37 \equiv 16 \equiv 23 \equiv 2 \pmod{7}$, a tedy podle 12 (2) a (1) platí

$$37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n \equiv 2^{n+2} + 2^{n+1} + 2^n = 2^n(4+2+1) = 2^n \cdot 7 \equiv 0 \pmod{7},$$

což jsme chtěli dokázat. □

PŘÍKLAD. Dokažte, že číslo $n = (835^5 + 6)^{18} - 1$ je dělitelné číslem 112.

ŘEŠENÍ. Rozložíme $112 = 7 \cdot 16$. Protože $(7, 16) = 1$, stačí ukázat, že $7 \mid n$ a $16 \mid n$. Platí $835 \equiv 2 \pmod{7}$, a tedy podle 12

$$n \equiv (2^5 + 6)^{18} - 1 = 38^{18} - 1 \equiv 3^{18} - 1 = 27^6 - 1 \equiv (-1)^6 - 1 = 0 \pmod{7},$$



proto $7 \mid n$. Podobně $835 \equiv 3 \pmod{16}$, a tedy

$$\begin{aligned} n &\equiv (3^5 + 6)^{18} - 1 = (3 \cdot 81 + 6)^{18} - 1 \equiv (3 \cdot 1 + 6)^{18} - 1 = \\ &= 9^{18} - 1 = 81^9 - 1 \equiv 1^9 - 1 = 0 \pmod{16}, \end{aligned}$$

proto $16 \mid n$. Celkem tedy $112 \mid n$, což jsme měli dokázat. \square

PŘÍKLAD. Dokažte, že pro libovolné prvočíslo p a libovolná $a, b \in \mathbb{Z}$ platí

$$a^p + b^p \equiv (a + b)^p \pmod{p}.$$

ŘEŠENÍ. Podle binomické věty platí

$$(a + b)^p = a^p + \binom{p}{1}a^{p-1}b + \binom{p}{2}a^{p-2}b^2 + \cdots + \binom{p}{p-1}ab^{p-1} + b^p.$$

Podle příkladu za větou 6 pro libovolné $k \in \{1, \dots, p-1\}$ platí $\binom{p}{k} \equiv 0 \pmod{p}$, odkud plyne tvrzení. \square

Následující tvrzení je další užitečnou vlastností kongruencí:

LEMMA. Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo m a libovolná $a, b \in \mathbb{Z}$ taková, že $a \equiv b \pmod{m^n}$, kde $n \in \mathbb{N}$, platí, že $a^m \equiv b^m \pmod{m^{n+1}}$.

DŮKAZ. Platí

$$a^m - b^m = (a - b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + \cdots + ab^{m-2} + b^{m-1}) \quad (12)$$



a protože $m \mid m^n$, tak podle 12 (7) platí i $a \equiv b \pmod{m}$. Jsou tedy všechny sčítance ve druhé závorce v (12) kongruentní s a^{m-1} modulo m , a tedy

$$a^{m-1} + a^{m-2}b + \dots + ab^{m-2} + b^{m-1} \equiv m \cdot a^{m-1} \equiv 0 \pmod{m},$$

proto je $a^{m-1} + a^{m-2} + \dots + ab^{m-2} + b^{m-1}$ dělitelné m . Z $a \equiv b \pmod{m^n}$ plyne, že m^n dělí $a - b$, a tedy m^{n+1} dělí jejich součin, což vzhledem k (12) vede k závěru, že $a^m \equiv b^m \pmod{m^{n+1}}$. \square

3.2. Aritmetické funkce. Aritmetickou funkcí zde rozumíme funkci, jejímž definičním oborem je množina přirozených čísel.

DEFINICE. Rozložme přirozené číslo n na prvočísla: $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$. Hodnotu Möbiovy funkce $\mu(n)$ definujeme rovnu 0, pokud pro některé i platí $\alpha_i > 1$ a rovnu $(-1)^k$ v opačném případě. Dále definujeme $\mu(1) = 1$.

PŘÍKLAD. $\mu(4) = \mu(2^2) = 0$, $\mu(6) = \mu(2 \cdot 3) = (-1)^2$, $\mu(2) = \mu(3) = -1$.

Dokážeme nyní několik důležitých vlastností Möbiovy funkce, zejména tzv. Möbiovu inverzní formuli.

LEMMA. Pro $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ platí

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 0.$$

DŮKAZ. Zapišeme-li n ve tvaru $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, pak všechny dělitele d čísla n jsou tvaru $d = p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k}$, kde $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ pro všechna $i \in \{1, \dots, k\}$. Proto

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d) &= \sum_{\substack{(\beta_1, \dots, \beta_k) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^k \\ 0 \leq \beta_i \leq \alpha_i}} \mu(p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k}) = \\ &= \sum_{(\beta_1, \dots, \beta_k) \in \{0, 1\}^k} \mu(p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k}) \\ &= \binom{k}{0} + \binom{k}{1} \cdot (-1) + \binom{k}{2} \cdot (-1)^2 + \cdots + \binom{k}{k} \cdot (-1)^k \\ &= (1 + (-1))^k = 0. \end{aligned}$$

□

S Möbiovou funkcí úzce souvisí pojem *Dirichletův součin*:

DEFINICE. Buďte f, g aritmetické funkce. Jejich *Dirichletův součin* je definován předpisem

$$(f \circ g)(n) = \sum_{d|n} f(d) \cdot g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d_1 d_2 = n} f(d_1) \cdot g(d_2).$$

LEMMA. *Dirichletův součin je asociativní.*



DŮKAZ.

$$((f \circ g) \circ h)(n) = \sum_{d_1 d_2 d_3 = n} f(d_1) \cdot g(d_2) \cdot h(d_3) = (f \circ (g \circ h))(n)$$

□

PŘÍKLAD. Definujme dvě pomocné funkce \mathbb{I} a I předpisem $\mathbb{I}(1) = 1$, $\mathbb{I}(n) = 0$ pro všechna $n > 1$, resp. $I(n) = 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak pro každou aritmetickou funkci f platí:

$$f \circ \mathbb{I} = \mathbb{I} \circ f = f$$

a

$$(I \circ f)(n) = (f \circ I)(n) = \sum_{d|n} f(d).$$

Dále platí $I \circ \mu = \mu \circ I = \mathbb{I}$, neboť

$$\begin{aligned} (I \circ \mu)(n) &= \sum_{d|n} I(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} I\left(\frac{n}{d}\right) \mu(d) = \\ &= \sum_{d|n} \mu(d) = 0 \quad \text{pro všechna } n > 1 \end{aligned}$$

podle lemmatu za definicí Möbiovy funkce (pro $n = 1$ je tvrzení zřejmé).



VĚTA 13. (Möbiova inverzní formule) Nechť je aritmetická funkce F definovaná pomocí aritmetické funkce f předpisem $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$. Pak lze funkci f vyjádřit ve tvaru

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \cdot F(d).$$

DŮKAZ. Vztah $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$ lze jiným způsobem zapsat jako $F = f \circ I$. Proto $F \circ \mu = (f \circ I) \circ \mu = f \circ (I \circ \mu) = f \circ \mathbb{I} = f$, což je tvrzení věty. \square

DEFINICE. Multiplikativní funkcí přirozených čísel rozumíme takovou aritmetickou funkci, která splňuje, že pro všechny dvojice nesoudělných čísel $a, b \in \mathbb{N}$ platí

$$f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b).$$

PŘÍKLAD. Multiplikativními funkcemi jsou např. funkce $f(n) = \sigma(n)$, $f(n) = \tau(n)$, či $f(n) = \mu(n)$ nebo, jak brzy dokážeme i tzv. Eulerova funkce $f(n) = \varphi(n)$.

3.3. Eulerova funkce φ .

DEFINICE. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Definujme Eulerovu funkci φ předpisem

$$\varphi(n) = |\{a \in \mathbb{N} \mid 0 < a \leq n, (a, n) = 1\}|$$

PŘÍKLAD. $\varphi(1) = 1, \varphi(5) = 4, \varphi(6) = 2$, je-li p prvočíslo, je zřejmě $\varphi(p) = p - 1$.



Nyní dokážeme několik důležitých tvrzení o funkci φ :

LEMMA. *Necht $n \in \mathbb{N}$. Pak $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.*

DŮKAZ. Uvažme n zlomků

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}.$$

Zkrátíme-li zlomky na základní tvar a seskupíme podle jmenovatelů, snadno dostaneme právě uvedené tvrzení. \square

VĚTA 14. *Necht $n \in \mathbb{N}$, jehož rozklad je tvaru $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$. Pak*

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

DŮKAZ. S využitím předchozího lemmatu a Möbiovy inverzní formule dostáváme

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} = n - \frac{n}{p_1} - \cdots - \frac{n}{p_k} + \cdots + (-1)^k \frac{n}{p_1 \cdots p_k} = \\ &= n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right). \end{aligned} \tag{13}$$

\square



POZNÁMKA. Předchozí výsledek lze obdržet i bez použití Möbiovy inverzní formule pomocí principu inkluze a exkluze na základě zjištění počtu čísel soudělných s n .

DŮSLEDEK. *Nechť $a, b \in \mathbb{N}$, $(a, b) = 1$. Pak*

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b).$$

DŮKAZ. Zřejmý. □

POZNÁMKA. Rovněž toto tvrzení lze odvodit nezávisle na základě poznatku $(n, ab) = 1 \iff (n, a) = 1 \wedge (n, b) = 1$. Spolu se snadno odvoditelným výsledkem

$$\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = (p - 1) \cdot p^{\alpha-1} \quad (14)$$

pak lze odvodit vztah (13) již třetím způsobem.

PŘÍKLAD. Vypočtěte $\varphi(72)$.

ŘEŠENÍ. $72 = 2^3 \cdot 3^2 \implies \varphi(72) = 72 \cdot (1 - \frac{1}{2}) \cdot (1 - \frac{1}{3}) = 24$, alternativně $\varphi(72) = \varphi(8) \cdot \varphi(9) = 4 \cdot 6 = 24$. □

PŘÍKLAD. Dokažte, že $\forall n \in \mathbb{N} : \varphi(4n + 2) = \varphi(2n + 1)$.

ŘEŠENÍ. $\varphi(4n + 2) = \varphi(2 \cdot (2n + 1)) = \varphi(2) \cdot \varphi(2n + 1) = \varphi(2n + 1)$. □



3.4. Malá Fermatova věta, Eulerova věta. Tvrzení v tomto odstavci patří mezi nejdůležitější výsledky teorie čísel.

VĚTA 15 (Fermatova, Malá Fermatova). *Nechť $a \in \mathbb{Z}$, p prvočíslo, $p \nmid a$. Pak*

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}. \quad (15)$$

DŮKAZ. Tvrzení vyplyne jako snadný důsledek Eulerovy věty 16. \square

DŮSLEDEK. *Nechť $a \in \mathbb{Z}$, p prvočíslo. Pak*

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

DŮKAZ. Pokud $p \mid a$, pak jsou obě strany kongruentní s $0 \pmod{p}$, jinak tvrzení snadno plyne vynásobením obou stran kongruence (15) číslem a . \square

DEFINICE. *Úplná soustava zbytků modulo m* je libovolná m -tice čísel po dvou nekongruentních modulo m (nejčastěji $0, 1, \dots, m-1$).

Redukovaná soustava zbytků modulo m je libovolná $\varphi(m)$ -tice čísel nesoudělných s m a po dvou nekongruentních modulo m .

POZNÁMKA. Snadno lze vidět, že jsou-li $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \equiv b \pmod{m}$, a $(a, m) = 1$, pak i $(b, m) = 1$.

LEMMA. *Nechť $x_1, x_2, \dots, x_{\varphi(m)}$ tvoří redukovanou soustavu zbytků modulo m . Je-li $a \in \mathbb{Z}$, $(a, m) = 1$ pak i čísla $a \cdot x_1, \dots, a \cdot x_{\varphi(m)}$ tvoří redukovanou soustavu zbytků modulo m .*

DŮKAZ. Protože $(a, m) = 1$ a $(x_i, m) = 1$, platí $(a \cdot x_i, m) = 1$. Kdyby pro nějaká i, j platilo $a \cdot x_i \equiv a \cdot x_j \pmod{m}$, po vydělení obou stran kongruence číslem a nesoudělným s m dostaneme $x_i \equiv x_j \pmod{m}$. \square

VĚTA 16 (Eulerova). *Nechť $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $(a, m) = 1$. Pak*

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}. \quad (16)$$

DŮKAZ. Bud' $x_1, x_2, \dots, x_{\varphi(m)}$ libovolná redukovaná soustava zbytků modulo m . Podle předchozího lemmatu je i $a \cdot x_1, \dots, a \cdot x_{\varphi(m)}$ redukovaná soustava zbytků modulo m . Platí tedy, že pro každé i existuje j (oba indexy jsou z množiny $\{1, 2, \dots, \varphi(m)\}$) tak, že $a \cdot x_i \equiv x_j \pmod{m}$. Vynásobením čísel obou redukovaných soustav zbytků dostáváme

$$(a \cdot x_1) \cdot (a \cdot x_2) \cdots (a \cdot x_{\varphi(m)}) \equiv x_1 \cdot x_2 \cdots x_{\varphi(m)} \pmod{m}.$$

Po úpravě

$$a^{\varphi(m)} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdots x_{\varphi(m)} \equiv x_1 \cdot x_2 \cdots x_{\varphi(m)} \pmod{m}$$

a protože $(x_1 \cdot x_2 \cdots x_{\varphi(m)}, m) = 1$, můžeme obě strany kongruence vydělit číslem $x_1 \cdot x_2 \cdots x_{\varphi(m)}$ a dostaneme $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$. \square



POZNÁMKA. Eulerova věta je rovněž důsledkem Lagrangeovy věty uplatněným na grupu $(\mathbb{Z}_m^\times, \cdot)$.

PŘÍKLAD. Nalezněte všechna prvočísla p , pro která $5^{p^2} + 1 \equiv 0 \pmod{p^2}$.

ŘEŠENÍ. Snadno se přesvědčíme, že $p = 5$ úloze nevyhovuje. Pro $p \neq 5$ platí $(p, 5) = 1$, a tedy podle Fermatovy věty $5^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Umocněním na $p + 1$ dostaneme $5^{p^2-1} \equiv 1 \pmod{p}$, odkud $5^{p^2} \equiv 5 \pmod{p}$. Z podmínky $5^{p^2} + 1 \equiv 0 \pmod{p^2}$ plyne $5^{p^2} \equiv -1 \pmod{p}$, celkem tedy $5 \equiv -1 \pmod{p}$, a proto $p \mid 6$. Je tedy buď $p = 2$, nebo $p = 3$. Pro $p = 2$ však $5^4 + 1 \equiv 1^4 + 1 = 2 \not\equiv 0 \pmod{4}$. Pro $p = 3$ dostáváme $5^9 + 1 = 5^6 \cdot 5^3 + 1 \equiv 5^3 + 1 = 126 \equiv 0 \pmod{9}$, kde jsme užili důsledek Eulerovy věty $5^6 \equiv 1 \pmod{9}$. Jediným prvočíslem, vyhovujícím úloze je tedy $p = 3$. \square

PŘÍKLAD. Pro liché číslo $m > 1$ nalezněte zbytek po dělení čísla $2^{\varphi(m)-1}$ číslem m .

ŘEŠENÍ. Z Eulerovy věty plyne $2^{\varphi(m)} \equiv 1 \equiv 1 + m = 2r \pmod{m}$, kde $r = \frac{1+m}{2}$ je přirozené číslo, $0 < r < m$. Podle 12 (3) platí $2^{\varphi(m)-1} \equiv r \pmod{m}$, a tedy hledaný zbytek po dělení je $r = \frac{1+m}{2}$. \square

TVRZENÍ 3.1. Je-li p prvočíslo, $p \equiv 3 \pmod{4}$, pak pro libovolná celá čísla a, b z kongruence $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{p}$ plyne $a \equiv b \equiv 0 \pmod{p}$.



DŮKAZ. Předpokládejme, že pro $a, b \in \mathbb{Z}$ platí $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{p}$. Jestliže $p \mid a$, platí $a \equiv 0 \pmod{p}$, proto $b^2 \equiv 0 \pmod{p}$, tedy $p \mid b^2$, odkud vzhledem k tomu, že p je prvočíslo, dostáváme $p \mid b$, a proto $a \equiv b \equiv 0 \pmod{p}$, což jsme chtěli dokázat.

Zbývá prošetřit případ, kdy a není dělitelné prvočíslem p . Odtud dostáváme, že p nedělí ani b (kdyby $p \mid b$, dostali bychom $p \mid a^2$). Vynásobíme-li obě strany kongruence $a^2 \equiv -b^2 \pmod{p}$ číslem b^{p-3} , dostaneme podle Fermatovy věty

$$a^2 b^{p-3} \equiv -b^{p-1} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Protože $p \equiv 3 \pmod{4}$, je $p - 3$ sudé číslo, a proto $\frac{p-3}{2} \in \mathbb{N}_0$. Označme

$$c = ab^{\frac{p-3}{2}}.$$

Pak c není dělitelné p a platí $c^2 = a^2 b^{p-3} \equiv -1 \pmod{p}$. Umocníme-li poslední kongruenci na $\frac{p-1}{2} \in \mathbb{N}$, dostaneme

$$c^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

Protože $p \equiv 3 \pmod{4}$, existuje celé číslo t tak, že $p = 3 + 4t$. Pak ovšem $\frac{p-1}{2} = 1 + 2t$, což je číslo liché a proto $(-1)^{(p-1)/2} = -1$. Podle Fermatovy věty naopak platí $c^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, odkud $1 \equiv -1 \pmod{p}$ a $p \mid 2$, spor. \square



S Eulerovou funkcí a Eulerovou větou úzce souvisí důležitý pojem *řád čísla modulo m* - jde přitom pouze o jinak nazvaný řád prvku v grupě invertibilních zbytkových tříd modulo m :

DEFINICE. Nechť $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ $(a, m) = 1$. Řádem čísla a modulo m rozumíme nejmenší přirozené číslo n splňující

$$a^n \equiv 1 \pmod{m}.$$

PŘÍKLAD. Pro libovolné $m \in \mathbb{N}$ má číslo 1 modulo m řád 1. Číslo -1 má řád

- 1 pro $m = 1$ nebo $m = 2$
- 2 pro $m > 2$

PŘÍKLAD. Určete řád čísla 2 modulo 7.

ŘEŠENÍ.

$$2^1 = 2 \not\equiv 1 \pmod{7}$$

$$2^2 = 4 \not\equiv 1 \pmod{7}$$

$$2^3 = 8 \equiv 1 \pmod{7}$$

Řád čísla 2 modulo 7 je tedy roven 3. □



Uvedme nyní několik zásadních tvrzení udávajících možné hodnoty řádu čísla modulo m :

LEMMA. *Nechť $m \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $(a, m) = (b, m) = 1$. Jestliže $a \equiv b \pmod{m}$, pak obě čísla a, b mají stejný řád modulo m .*

DŮKAZ. Umocněním kongruence $a \equiv b \pmod{m}$ na n -tou dostaneme $a^n \equiv b^n \pmod{m}$, tedy $a^n \equiv 1 \pmod{m} \iff b^n \equiv 1 \pmod{m}$. \square

LEMMA. *Nechť $m \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$, $(a, m) = 1$. Je-li řád čísla a modulo m roven $r \cdot s$, (kde $r, s \in \mathbb{N}$), pak řád čísla a^r modulo m je roven s .*

DŮKAZ. Protože žádné z čísel $a, a^2, a^3, \dots, a^{rs-1}$ není kongruentní s 1 modulo m , není ani žádné z čísel $a^r, a^{2r}, a^{3r}, \dots, a^{(s-1)r}$ kongruentní s 1. Platí ale $(a^r)^s \equiv 1 \pmod{m}$, proto je řád a^r modulo m roven s . \square

POZNÁMKA. Opak obecně neplatí – z toho, že řád čísla a^r modulo m je roven s ještě neplyne, že řád čísla a modulo m je $r \cdot s$.

Př: $m = 13$

$a = 3$, $a^2 = 9 \pmod{13}$, $a^3 = 27 \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow 3$ má řád 3 mod 13.

$b = -4$, $b^2 = 16 \not\equiv 1 \pmod{13}$, $b^3 = -64 \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow -4$ má řád 3 modulo 13.

Přitom $(-4)^2 = 16 \equiv 3 \pmod{13}$ má stejný řád 3 jako číslo 3, ale číslo -4 nemá řád $2 \cdot 3$.

Přesný popis závislosti řádu na exponentu dávají následující 2 věty:



VĚTA 17. *Nechť $m \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$, $(a, m) = 1$. Označme r řád čísla a modulo m . Pak pro libovolná $t, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí*

$$a^t \equiv a^s \pmod{m} \iff t \equiv s \pmod{r}.$$

DŮKAZ. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $t \geq s$. Vydělíme-li číslo $t - s$ číslem r se zbytkem, dostaneme $t - s = q \cdot r + z$, kde $q, z \in \mathbb{N}_0, 0 \leq z < r$.

„ \Leftarrow “ Protože $t \equiv s \pmod{r}$, máme $z = 0$, a tedy $a^{t-s} = a^{qr} = (a^r)^q \equiv 1^q \pmod{m}$. Vynásobením obou stran kongruence číslem a^s dostaneme tvrzení.

„ \Rightarrow “ Z $a^t \equiv a^s \pmod{m}$ plyne $a^s \cdot a^{qr+z} \equiv a^s \pmod{m}$. Protože je $a^r \equiv 1 \pmod{m}$, je rovněž $a^{qr+z} \equiv a^z \pmod{m}$. Celkem po vydělení obou stran kongruence číslem a^s (které je nesoudělné s modulem), dostáváme $a^z \equiv 1 \pmod{m}$. Protože $z < r$, plyne z definice řádu, že $z = 0$, a tedy $r \mid t - s$. \square

Zřejmým důsledkem předchozí věty a Eulerovy věty je následující tvrzení (jehož druhá část je přeformulováním Lagrangeovy věty z Algebry pro naši situaci):

DŮSLEDEK. *Nechť $m \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$, $(a, m) = 1$. Označme r řád čísla a modulo m .*

(1) *Pro libovolné $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí*

$$a^n \equiv 1 \pmod{m} \iff r \mid n.$$

(2) $r \mid \varphi(m)$



DŮKAZ.

- (1) stačí v předchozí větě volit $t = n$, $s = r$.
- (2) zřejmé z (1) díky Eulerově větě volbou $n = \varphi(m)$.

□

Následující věta je zobecněním předchozího Lemmatu.

VĚTA 18. *Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$, $(a, m) = 1$. Je-li řád čísla a modulo m roven $r \in \mathbb{N}$, je řád čísla a^n modulo m roven $\frac{r}{(n,r)}$.*

DŮKAZ. Protože $\frac{r \cdot n}{(r,n)} = [r, n]$, což je zřejmě násobek r , máme

$$(a^n)^{\frac{r}{(n,r)}} = a^{[r,n]} \equiv 1 \pmod{m}$$

(plyne z předchozího Důsledku neboť $r \mid [r, n]$). Na druhou stranu, je-li $k \in \mathbb{N}$ libovolné takové, že $(a^n)^k = a^{n \cdot k} \equiv 1 \pmod{m}$, dostáváme (r je řád a), že $r \mid n \cdot k$ a dále z Věty 5 plyne, že $\frac{r}{(n,r)} \mid \frac{n}{(n,r)} \cdot k$ a díky nesoudělnosti čísel $\frac{r}{(n,r)}$ a $\frac{n}{(n,r)}$ dostáváme $\frac{r}{(n,r)} \mid k$. Proto je $\frac{r}{(n,r)}$ řádem čísla a^n modulo m . □