2. Prvočísla

Prvočíslo je jeden z nejdůležitějších pojmů elementární teorie čísel. Jeho důležitost je dána především větou o jednoznačném rozkladu libovolného přirozeného čísla na součin prvočísel, která je silným a účinným nástrojem při řešení celé řady úloh z teorie čísel.

Definice. Každé přirozené číslo $n \geq 2$ má aspoň dva kladné dělitele: 1 a n. Pokud kromě těchto dvou jiné kladné dělitele nemá, nazývá se *prvočíslo*. V opačném případě hovoříme o *složeném čísle*.

V dalším textu budeme zpravidla prvočíslo značit písmenem p. Nejmenší prvočísla jsou 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, $\dots$. Prvočísel je, jak brzy dokážeme, nekonečně mnoho, máme ovšem poměrně limitované výpočetní prostředky na zjištění, zda je dané číslo prvočíslem (největší známé prvočíslo $2^{30\,402\,457} - 1$ má pouze 9 152 052 cifer).

Věta 6. *Přirozené číslo $p \geq 2$ je prvočíslo, právě když platí: pro každá celá čísla a, b z $p \mid ab$ plyne $p \mid a$ nebo $p \mid b$.*

Důkaz. „$\Rightarrow$“ Předpokládejme, že p je prvočíslo a $p \mid ab$, kde $a, b \in \mathbb{Z}$. Protože (p, a) je kladný dělitel p, platí $(p, a) = p$ nebo $(p, a) = 1$. V prvním případě $p \mid a$, ve druhém $p \mid b$ podle věty 5.

„$\Leftarrow$“ Jestliže p není prvočíslo, musí existovat jeho kladný dělitel různý od 1 a p. Označíme jej a; pak ovšem $b = \frac{p}{a} \in \mathbb{N}$ a platí $p = ab$, odkud $1 < a < p$, $1 < b < p$. Našli jsme tedy celá čísla a, b tak, že $p \mid ab$ a přitom p nedělí ani a, ani b. $\square$

Příklad. Nalezněte všechna čísla $k \in \mathbb{N}_0$, pro která je mezi deseti po sobě jdoucími čísly $k+1, k+2, \dots, k+10$ nejvíce prvočísel.

Řešení. Pro $k = 1$ je mezi našimi čísly pět prvočísel: 2, 3, 5, 7, 11. Pro $k = 0$ a $k = 2$ pouze čtyři prvočísla. Jestliže $k \geq 3$, není mezi zkoumanými čísly číslo 3. Mezi deseti po sobě jdoucími celými čísly pět sudých a pět lichých čísel, mezi kterými je zase aspoň jedno dělitelné třemi. Našli jsme tedy mezi čísly $k+1$, $k+2$, $\dots$, $k+10$ aspoň šest složených, jsou tedy mezi nimi nejvýše čtyři prvočísla. Zadání proto vyhovuje jediné číslo $k = 1$. $\square$

Příklad. Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo n existuje n po sobě jdoucích přirozených čísel, z nichž žádné není prvočíslo.

Řešení. Zkoumejme čísla $(n+1)! + 2, (n+1)! + 3, \dots, (n+1)! + (n+1)$. Mezi těmito n po sobě jdoucími čísly není žádné prvočíslo, protože pro libovolné $k \in \{2, 3, \dots, n+1\}$ platí $k \mid (n+1)!$, a tedy $k \mid (n+1)! + k$, a proto $(n+1)! + k$ nemůže být prvočíslo. $\square$

Příklad. Dokažte, že pro libovolné prvočíslo p a libovolné $k \in \mathbb{N}$, $k < p$, je kombinační číslo $\binom{p}{k}$ dělitelné p.

Řešení. Podle definice kombinačního čísla

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{p \cdot (p-1) \cdot \dots \cdot (p-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} \in \mathbb{N},$$

a tedy $k! \mid p \cdot a$, kde jsme označili $a = (p-1) \cdot \dots \cdot (p-k+1)$. Protože $k < p$, není žádné z čísel $1, 2, \dots, k$ dělitelné prvočíslem p, a tedy podle věty 6 není ani $k!$ dělitelné prvočíslem p, odkud $(k!, p) = 1$. Podle věty 5 platí $k! \mid a$, a tedy $b = \frac{a}{k!}$ je celé číslo. Protože $\binom{p}{k} = \frac{pa}{k!} = pb$, je číslo $\binom{p}{k}$ dělitelné číslem p. □

Věta 7. *Libovolné přirozené číslo $n \geq 2$ je možné vyjádřit jako součin prvočísel, přičemž je toto vyjádření jediné, nebereme-li v úvahu pořadí činitelů. (Je-li n prvočíslo, pak jde o „součin“ jednoho prvočísla.)*

Poznámka. Dělitelnost je možné obdobným způsobem jako v 1.1 definovat v libovolném oboru integrity (zkuste si rozmyslet, proč se omezujeme na obory integrity). V některých oborech integrity přitom žádné prvky s vlastností prvočísla (říkáme jim *ireducibilní*) neexistují (např. $\mathbb{Q}$), v jiných sice ireducibilní prvky existují, ale zase tam neplatí věta o jednoznačném rozkladu (např. v $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$ máme následující rozklady: $6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5}) \cdot (1 - \sqrt{-5})$; zkuste si rozmyslet, že všichni uvedení činitelé jsou skutečně v $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$ ireducibilní).

Důkaz. Nejprve dokážeme indukcí, že každé $n \geq 2$ je možné vyjádřit jako součin prvočísel.

Je-li $n = 2$, je n součin jediného prvočísla 2.

Předpokládejme nyní, že $n > 2$ a že jsme již dokázali, že libovolné n', $2 \leq n' < n$, je možné rozložit na součin prvočísel. Jestliže n je prvočíslo, je součinem jediného prvočísla. Jestliže n prvočíslo není, pak existuje jeho dělitel d, $1 < d < n$. Označíme-li $c = \frac{n}{d}$, platí také $1 < c < n$. Z indukčního předpokladu plyne, že c i d je možné vyjádřit jako součin prvočísel, a proto je takto možné vyjádřit i jejich součin $c \cdot d = n$.

Nyní dokážeme jednoznačnost. Předpokládejme, že platí rovnost součinů $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_m = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_s$, kde $p_1, \dots, p_m$, $q_1, \dots, q_s$ jsou prvočísla a navíc platí $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_m$, $q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_s$ a $1 \leq m \leq s$. Indukcí vzhledem k m dokážeme, že $m = s$, $p_1 = q_1, \dots, p_m = q_m$.

Je-li $m = 1$, je $p_1 = q_1 \cdot \dots \cdot q_s$ prvočíslo. Kdyby $s > 1$, mělo by číslo p_1 dělitele q_1 takového, že $1 < q_1 < p_1$ (neboť $q_2 q_3 \dots q_s > 1$), což není možné. Je tedy $s = 1$ a platí $p_1 = q_1$.

Předpokládejme, že $m \geq 2$ a že tvrzení platí pro $m - 1$. Protože $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_m = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_s$, dělí p_m součin $q_1 \cdot \dots \cdot q_s$, což je podle věty 6 možné jen tehdy, jestliže p_m dělí nějaké q_i pro vhodné $i \in \{1, 2, \dots, s\}$. Protože q_i je prvočíslo, plyne odtud $p_m = q_i$ (neboť $p_m > 1$). Zcela analogicky se dokáže, že $q_s = p_j$ pro vhodné $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Odtud

plyne
$$q_s = p_j \le p_m = q_i \le q_s,$$
takže $p_m = q_s$. Vydělením dostaneme $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{m-1} = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_{s-1}$, a tedy z indukčního předpokladu $m - 1 = s - 1$, $p_1 = q_1, \dots, p_{m-1} = q_{m-1}$. Celkem tedy $m = s$ a $p_1 = q_1, \dots, p_{m-1} = q_{m-1}$, $p_m = q_m$. Jednoznačnost, a proto i celá věta 7 je dokázána. □

Poznámka. Již jsme se zmínili, že je složité o velkých číslech s jistotou rozhodnout, jde-li o prvočíslo (na druhou stranu je o naprosté většině složených čísel snadné prokázat, že jsou skutečně složená). Přesto se v roce 2002 podařilo indickým matematikům (Agrawal, Saxena, Kayal: `http://www.cse.iitk.ac.in/users/manindra/primality_v6.pdf`) dokázat, že problém prvočíselnosti je možné rozhodnout algoritmem s časovou složitostí polynomiálně závislou na počtu cifer vstupního čísla. Nic podobného se zatím nepodařilo v otázce rozkladu čísla na prvočísla (třebaže se obecně nevěří, že je to možné, exaktní důkaz zatím nebyl podán).

Že je problém rozkladu přirozeného čísla na prvočísla výpočetně složitý, o tom svědčí i výzva učiněná firmou RSA Security (viz `http://www.rsasecurity.com/rsalabs/node.asp?id=2093`). Pokud se vám podaří rozložit čísla označená podle počtu cifer jako RSA-704, RSA-768, …, RSA-2048, obdržíte 30 000, 50 000, …, resp. 200 000 dolarů (čísla RSA-576 a RSA-640 již byla rozložena v roce 2003, resp. 2005; byla-li vyplacena slíbená odměna, mi není známo).

Důsledek. (1) *Jsou-li $p_1, \dots, p_k$ navzájem různá prvočísla a $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}_0$, je každý kladný dělitel čísla $a = p_1^{n_1} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k}$ tvaru $p_1^{m_1} \cdot \dots \cdot p_k^{m_k}$, kde $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}_0$ a $m_1 \le n_1$, $m_2 \le n_2$, …, $m_k \le n_k$.*
Číslo a má tedy právě
$$\tau(a) = (n_1 + 1)(n_2 + 1) \cdot \dots \cdot (n_k + 1)$$
kladných dělitelů, jejichž součet je
$$\sigma(a) = \frac{p_1^{n_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdots \frac{p_k^{n_k+1} - 1}{p_k - 1}.$$

(2) *Jsou-li $p_1, \dots, p_k$ navzájem různá prvočísla a $n_1, \dots, n_k, m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}_0$ a označíme-li $r_i = \min\{n_i, m_i\}$, $t_i = \max\{n_i, m_i\}$ pro každé $i = 1, 2, \dots, k$, platí*
$$(p_1^{n_1} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k}, p_1^{m_1} \cdot \dots \cdot p_k^{m_k}) = p_1^{r_1} \cdot \dots \cdot p_k^{r_k},$$
$$[p_1^{n_1} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k}, p_1^{m_1} \cdot \dots \cdot p_k^{m_k}] = p_1^{t_1} \cdot \dots \cdot p_k^{t_k}.$$

Poznámka. S pojmem *součet všech kladných dělitelů čísla a* souvisí pojem tzv. *dokonalého čísla a*, které splňuje podmínku $\sigma(a) = 2a$, resp. slovně: „součet všech kladných dělitelů čísla a menších než a samotné je roven číslu a“.

Takovými čísly jsou např. $6 = 1 + 2 + 3$, $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$, $496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$ a 8128 (jde o všechna dokonalá čísla menší než 10 000).

Lze ukázat, že sudá dokonalá čísla jsou v úzkém vztahu s tzv. *Mersenneho prvočísly.* Platí totiž: *a je sudé dokonalé číslo, právě když je tvaru* $a = 2^{q-1} \cdot (2^q - 1)$, *kde* $2^q - 1$ *je prvočíslo.* Mersenneho prvočísla jsou právě prvočísla tvaru $2^k - 1$. Bez zajímavosti není ani to, že právě Mersenneho prvočísla jsou mezi všemi prvočísly nejlépe „vidět" – obecně je pro velká čísla, u kterých se nedaří nalézt netriviálního dělitele, obtížné prokázat, že jsou prvočísla. Pro Mersenneho prvočísla existuje poměrně jednoduchý a rychlý postup. Proto není náhodou, že největší známá prvočísla jsou obvykle tvaru $2^k - 1$ (viz např. `http://www.utm.edu/research/primes/largest.html`).

Na druhou stranu popsat lichá dokonalá čísla se dodnes nepodařilo, resp. **dodnes se neví, jestli vůbec nějaké liché dokonalé číslo existuje**

Příklad. Dokažte, že pro každé celé $n > 2$ existuje mezi čísly n a $n!$ alespoň jedno prvočíslo.

Řešení. Označme p libovolné prvočíslo dělící číslo $n! - 1$ (takové existuje podle věty 7, protože $n! - 1 > 1$). Kdyby $p \leq n$, muselo by p dělit číslo $n!$ a nedělilo by $n! - 1$. Je tedy $n < p$. Protože $p \mid (n! - 1)$, platí $p \leq n! - 1$, tedy $p < n!$. Prvočíslo p splňuje podmínky úlohy. $\square$

Nyní uvedeme několik důkazů toho, že existuje nekonečně mnoho prvočísel (i když tvrzení v podstatě vyplývá už z předchozího příkladu).

Věta 8. *Mezi přirozenými čísly existuje nekonečně mnoho prvočísel.*

Důkaz. (Eukleides) Předpokládejme, že prvočísel je konečně mnoho a označme je $p_1, p_2, \dots, p_n$. Položme $N = p_1 \cdot p_2 \dots p_n + 1$. Toto číslo je buď samo prvočíslem nebo je dělitelné nějakým prvočíslem různým od $p_1, \dots, p_n$ (čísla $p_1, \dots, p_n$ totiž dělí číslo $N - 1$), což je spor.

(Kummer, 1878): Předpokládejme, že prvočísel je konečně mnoho a označme je $p_1 < p_2 < \dots < p_n$. Položme $N = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n > 2$. Číslo $N - 1$ je podle věty 7 dělitelné některým prvočíslem p_i, které dělí zároveň číslo N a tedy i $N - (N - 1) = 1$. Spor.

(Fürstenberg, 1955):

> *V této poznámce uvedeme elementární „topologický" důkaz existence nekonečně mnoha prvočísel. Zavedeme topologii prostoru celých čísel pomocí báze tvořené aritmetickými posloupnostmi (od $-\infty$ do $+\infty$). Lze snadno ověřit, že jde skutečně o topologický prostor, navíc lze ukázat, že je normální a tedy metrizovatelný. Každá aritmetická posloupnost je uzavřená i otevřená množina (její*

komplement je sjednocení ostatních aritmetických posloupností se stejnou diferencí). Dostáváme, že sjednocení konečného počtu aritmetických posloupností je uzavřená množina. Uvažme množinu $A = \cup A_p$, kde A_p je tvořena všemi násobky p a p probíhá všechna prvočísla. Jediná celá čísla nepatřící do A jsou -1 a 1 a protože množina $\{-1, 1\}$ zřejmě není otevřená, množina A nemůže být uzavřená. A tedy není konečným sjednocením uzavřených množin, což znamená, že musí existovat nekonečně mnoho prvočísel.

□

PŘÍKLAD. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel tvaru $3k + 2$, kde $k \in \mathbb{N}_0$.

ŘEŠENÍ. Předpokládejme naopak, že existuje pouze konečně mnoho prvočísel tohoto tvaru a označme je $p_1 = 2$, $p_2 = 5$, $p_3 = 11$, $\dots$, p_n. Položme $N = 3p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n + 2$. Rozložíme-li N na součin prvočísel podle věty 7, musí v tomto rozkladu vystupovat aspoň jedno prvočíslo p tvaru $3k+2$, neboť v opačném případě by bylo N součinem prvočísel tvaru $3k + 1$ (uvažte, že N není dělitelné třemi), a tedy podle příkladu na str. 7 by bylo i N tvaru $3k+1$, což neplatí. Prvočíslo p ovšem nemůže být žádné z prvočísel $p_1, p_2, \dots, p_n$, jak plyne z tvaru čísla N, a to je spor. □

Předchozí příklady je možné značně zobecnit. Platí totiž tvrzení, které bývá nazýváno Bertrandovým postulátem nebo Čebyševovou větou:

VĚTA 9. *(Čebyševova)*

1. *libovolné přirozené číslo $n > 5$ existují mezi čísly n a $2n$ alespoň dvě prvočísla.*
2. *Pro každé číslo $n > 3$ existuje mezi čísly n a $2n - 2$ alespoň jedno prvočíslo.*

DŮKAZ. Důkaz lze provést elementárními prostředky, je však poměrně dlouhý, proto zde není uveden. Viz např. `http://matholymp.com/TUTORIALS/Bertrand.pdf` □

Z tvrzení uvedených v této kapitole je možné si udělat hrubou představu o tom, jak „hustě“ se mezi přirozenými čísla prvočísla vyskytují. Přesněji (i když „pouze“ asymptoticky) to popisuje tzv. „prime number theorem“:

VĚTA 10. *(o hustotě prvočísel) Nechť $\pi(x)$ udává počet prvočísel menších nebo rovných číslu $x \in \mathbb{R}$. Pak*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x},$$

tj. podíl funkcí $\pi(x)$ a $x/\ln x$ se pro $x \to \infty$ limitně blíží k nule.

POZNÁMKA. To, jak jsou prvočísla hustě rozmístěna v množině přirozených čísel, rovněž udává Eulerův výsledek

$$\sum_{p \text{ prvočíslo}} \frac{1}{p} = \infty.$$

Přitom např.

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

což znamená, že prvočísla jsou v $\mathbb{N}$ rozmístěna „hustěji“ než druhé mozniny.

POUŽITÍ V PARI-GP. O tom, jak odpovídá asymptotický odhad $\pi(x) \sim x/\ln(x)$, v některých konkrétních příkladech vypovídá následující tabulka (získáná s využitím funkce `primepi(x)` v Pari-GP.

```
? v=[100,1000,10000,100000,500000];
? for(k=1,5,print(v[k],„&",primepi(v[k]),„&",\
  v[k]/log(v[k]),„&",\
  (primepi(v[k])-v[k]/log(v[k]))/primepi(v[k])))
```

x	$\pi(x)$	$x/\ln(x)$	relativní chyba
100	25	21.71	0.13
1000	168	144.76	0.13
10000	1229	1085.73	0.11
100000	9592	8685.88	0.09
500000	41538	38102.89	0.08

Poslední příklad (o nekonečnosti počtu prvočísel tvaru $3k+2$) zobecňuje *Dirichletova věta o aritmetické posloupnosti*:

VĚTA 11. *(Dirichletova) Jsou-li a, m nesoudělná přirozená čísla, existuje nekonečně mnoho přirozených čísel k tak, že $mk + a$ je prvočíslo. Jinými slovy, mezi čísly $1 \cdot m + a, 2 \cdot m + a, 3 \cdot m + a, \dots$ existuje nekonečně mnoho prvočísel.*

DŮKAZ. Jde o hlubokou větu teorie čísel, k jejímuž důkazu je zapotřebí aparát značně přesahující její elementární část. Viz např. [**2**, kap. ???] $\square$

OZNAČENÍ. Pro libovolné prvočíslo p a libovolné přirozené číslo n je podle věty 7 jednoznačně určen exponent, se kterým vystupuje p v rozkladu čísla n na prvočinitele (pokud p nedělí číslo n, považujeme tento exponent za nulový). Budeme jej označovat symbolem $v_p(n)$. Pro záporné celé číslo n klademe $v_p(n) = v_p(-n)$.

Podle důsledku 2 můžeme právě zavedené označení $v_p(n)$ charakterizovat tím, že $p^{v_p(n)}$ je nejvyšší mocninou prvočísla p, která dělí číslo n, nebo tím, že $n = p^{v_p(n)} \cdot m$, kde m je celé číslo, které není dělitelné číslem p. Odtud snadno plyne, že pro libovolná nenulová celá čísla a, b platí

$$v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b) \tag{8}$$

$$v_p(a) \leq v_p(b) \ \wedge \ a + b \neq 0 \implies v_p(a+b) \geq v_p(a) \tag{9}$$

$$v_p(a) < v_p(b) \implies v_p(a+b) = v_p(a) \tag{10}$$

$$v_p(a) \leq v_p(b) \implies v_p((a,b)) = v_p(a) \ \wedge \ v_p([a,b]) = v_p(b) \tag{11}$$

Na následujícím příkladu demonstrujme užitečnost zavedeného označení.

Příklad. Dokažte, že pro libovolná přirozená čísla a, b, c platí

$$([a,b],[a,c],[b,c]) = [(a,b),(a,c),(b,c)]$$

Řešení. Podle věty 7 budeme hotovi, ukážeme-li, že $v_p(L) = v_p(P)$ pro libovolné prvočíslo p, kde L, resp. P značí výraz na levé, resp. pravé straně. Nechť je tedy p libovolné prvočíslo. Vzhledem k symetrii obou výrazů můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $v_p(a) \leq v_p(b) \leq v_p(c)$. Podle (11) platí $v_p([a,b]) = v_p(b)$, $v_p([a,c]) = v_p([b,c]) = v_p(c)$; $v_p((a,b)) = v_p((a,c)) = v_p(a)$, $v_p((b,c)) = v_p(b)$, odkud $v_p(L) = v_p(b) = v_p(P)$, což jsme měli dokázat. $\square$