Standardní ***Normální lineární regresní model***

K dříve vysloveným předpokladům o veličinách standardního lineárního regresního modelu připojíme další předpoklad :

(e) T-rozměrný vektor náhodných složek má vícerozměrné normální rozdělení opět s nulovým vektorem středních hodnot a s diagonální kovarianční maticí , **tzn.**

$$\sum = \sigma^2 I_T \text{ , } \quad \text{stručněji zapsáno} \quad \boldsymbol{\varepsilon} \approx N\left(0\,;\sigma^2 I_T\right)$$

Jak známo, sdružená hustota T-rozměrného normálního rozdělení má v případě nezávislých náhodných veličin tvar :

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{(2\pi)^{T/2}\sigma^T}\exp\left(-\frac{\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon}}{2\sigma^2}\right)$$

Věta 2 (pro standardní **normální** lineární regresní model)

Za podmínek věty 1 (Gauss-Markovovy) a dále za dodatečného předpokladu o T-rozměrném rozdělení vektoru náhodných složek $\varepsilon \approx N\left(\boldsymbol{0},\sigma^2 \boldsymbol{I}_T\right)$ **lze ukázat, že :**

(2A) Odhadová funkce $_{OLS}\boldsymbol{b} = \left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}'\,\boldsymbol{y}$ **je** také **normálně rozdělena s vektorem středních hodnot** (rovným skut. parametrům) $\boldsymbol{\beta}$ **a s kovarianční maticí** $\boldsymbol{\sigma}^2\,(X'X)^{-1}$ **.**

(2B) Náhodná veličina $\frac{e'e}{\sigma^2}$ **resp.** (jinak zapsaná jako $\frac{(T-k)s^2}{\sigma^2}$ **) má** χ^2 **-rozdělení o** $(T-k)$ **stupních volnosti. Počet stupňů volnosti je určen rozdílem mezi počtem pozorování T a počtem vysvětlujících proměnných k .**

(2C) Náhodné veličiny $\frac{(T-k)s^2}{\sigma^2}$ **a** $_{OLS}b - \beta$ **jsou vzájemně nezávislé.**

(2D) Odhady vektoru parametrů β **získané metodou nejmenších čtverců** $_{OLS}$**b a metodou maximální věrohodnosti** $_{ML}$**b jsou identické, platí tedy** $_{OLS}$**b =** $_{ML}$**b**

Výše uvedená tvrzení postupně dokážeme:

Důkaz tvrzení (2A) **Odhadovou funkci** $\mathbf{b}_{\mathbf{OLS}}$ **lze zřejmě vyjádřit ve tvaru**

$$(X'X)^{-1}X'\,y = (X'X)^{-1}X'(X\beta+\varepsilon) = \beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon \text{, kde}$$

na pravé straně je nestochastické povahy pouze vektor náhodných složek ε **. Odhadová funkce** $_{OLS}\boldsymbol{b}$ **je tedy lineární kombinací složek náhodného vektoru** ε**, přičemž tato lineární kombinace má nestochastické prvky (a navíc obsahuje nestochastický vektor** $\boldsymbol{\beta}$ **). Jak známo ze statistické teorie, lineární kombinace složek náhodného vektoru s normálním rozdělením má též normální rozdělení. Zbývá určit střední hodnotu a kovarianční matici tohoto vektoru . Zřejmě platí :**

$$E\left(_{OLS}b\right) = E(X'X)^{-1}X'\,y = E\left[\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon\right] = E\beta + E(X'X)^{-1}X'\varepsilon$$

$$= \beta + (X'X)^{-1}X'E\varepsilon = \beta$$ **neboť dle předpokladu (a)** $E\varepsilon = 0$ **. Podobně**

$$Cov\left({}_{OLS}b\right) = E\left[(b-\beta)\cdot(b-\beta)'\right] = E\left[(X'X)^{-1}X'\varepsilon\varepsilon'X(X'X)^{-1}\right] = (X'X)^{-1}X'E\varepsilon\varepsilon'X(X'X)^{-1}$$

$$= (X'X)^{-1}X'\sigma_\varepsilon^{\ 2}I_T X\cdot(X'X)^{-1} = \sigma_\varepsilon^{\ 2}(X'X)^{-1}.$$

__Poznámka:__ Kovarianční matice $Cov\left({}_{OLS}b\right)$ **není** na rozdíl od kovarianční matice náhodných odchylek **diagonální, složky vektoru** ${}_{OLS}b$ **tedy zpravidla budou vzájemně zkorelovány. Rozptyl každé této složky je dán součinem** σ_ε^2 **a prvku ležícího na j-tém místě hlavní diagonály matice** $(X'X)^{-1}$ **- tento prvek označíme v dalším textu jako** V^{jj} **.**

__Tvrzení (2B)__ Náhodná veličina $\dfrac{e'e}{\sigma^2}$ **resp.** (jinak zapsaná jako $\dfrac{(T-k)s^2}{\sigma^2}$ **) má** χ^2**-rozdělení o** $(T-k)$ **stupních volnosti. Počet stupňů volnosti je dán rozdílem mezi počtem pozorování a počtem vysvětlujících proměnných.**

__Důkaz tvrzení (2B)__

a) Víme, že $\varepsilon'\varepsilon$ **představuje součet druhých mocnin T vzájemně nezávislých (tj.** zde **nekorelovaných a normálně rozdělených) náhodných veličin** (jmenovitě náhodných složek regresní rovnice) **.**

b) Dále víme, že analogický výraz $e'e$ **pro rezidua lze vyjádřit zápisem**

$$e'e = \varepsilon'M'M\varepsilon \text{, kde } M = I_T - X(X'X)^{-1}X' \text{, neboť } e = M\cdot\varepsilon$$

c) Matice M **je symetrická a idempotentní, neboť pro ni platí**

$$M'M = MM = \left(I_T - X(X'X)^{-1}X'\right)\left(I_T - X(X'X)^{-1}X'\right) = I_T - X(X'X)^{-1}X' = M$$

Tedy $e'e$ **je kvadratická forma s hodnosti danou hodností matice** M**. Hodnost idempotentní matice je rovna její stopě. Stopa matice** M **je přitom rovna T-k. Počet stupňů volnosti** χ^2**-rozdělení veličiny** $e'e$ **je určen stopou matice M (je tedy roven T-k). Podle Cochranovy věty má výraz** $\varepsilon'M\varepsilon/\sigma^2$ χ^2**-rozdělení s tolika stupni volnosti, jaká je hodnost matice** M **v kvadratické formě** $\varepsilon'M\varepsilon$**.** (Rozptylem σ^2
dělíme proto, abychom získali součet T nezávislých náhodných veličin s rozdělením N(0,**1**)).

Zřejmě přitom platí

$$Cov\,(\varepsilon'M\varepsilon/\sigma^2) = I_T.$$

d) Konečně je snadné ukázat, že platí

$$\frac{e'e}{\sigma^2} = \frac{(T-k)s^2}{\sigma^2}$$

Výraz $e'e$ **představuje součet čtverců reziduí (též značen** SSE **).** s^2 **je nestranný odhad rozptylu náhodných složek, jehož tvar je právě**

$$\frac{e'e}{T-k} = s^2 \qquad \square.$$

Tvrzení (2C) **Náhodné veličiny** $\frac{(T-k)s^2}{\sigma^2}$ **a** $_{OLS}b-\beta$ **jsou vzájemně nezávislé.**

Důkaz tvrzení (2C)

Součet čtverců náhodných odchylek $\varepsilon'\varepsilon$ **rozložíme následovně :**

$$\varepsilon'\varepsilon = \varepsilon'\,[I_T - X(X'X)^{-1}X']\varepsilon + \varepsilon'\,[X(X'X)^{-1}X']\varepsilon = \varepsilon' M\varepsilon + \varepsilon'' N\varepsilon \quad ,$$

Poznámka: matice M **i** N **jsou idempotentní, s hodnostmi** $h(M)=T-k$ **a** $h(N)=k$ **.**

Podle *Cochranovy věty* mají náhodné veličiny – kvadratické formy $P(\varepsilon)$**,**$Q(\varepsilon)$ **obsahující matice** M **,** N **tato rozdělení:**

- **kvadratická forma** $P(\varepsilon)$ **=** $\varepsilon'M\varepsilon/\sigma^2$ **má rozdělení** χ^2 **o T-k stupních volnosti**
- **kvadratická forma** $Q(\varepsilon)$ **=** $\varepsilon'N\varepsilon/\sigma^2$ **má rozdělení** χ^2 **o k stupních volnosti**

Obě tyto náhodné veličiny jsou vzájemně nezávislé, neboť platí $M.N=0$
(stochastická nezávislost je takto „posuzována" ortogonalitou matic M,N **)**

Dále, výrazy $\varepsilon'M\varepsilon$ **a** $\varepsilon'N\varepsilon$ **lze rozepsat následovně :**

$$\varepsilon'M\varepsilon = \varepsilon'\,[I_T - X(X'X)^{-1}X']\varepsilon = \varepsilon'MM\varepsilon = e'e = (T-k)s^2 \qquad \text{, kde } s^2 = \hat{\sigma}^2$$

$$\varepsilon'N\varepsilon = \varepsilon'\,[X(X'X)^{-1}X']\varepsilon = \varepsilon'[X(X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1}X']\varepsilon = \varepsilon' N'N\varepsilon = (b-\beta)'X'X(b-\beta),$$

neboť $b=\beta+(X'X)^{-1}X'\varepsilon$ **, tzn.** $b-\beta=(X'X)^{-1}X'\varepsilon$

Dále, protože podle předpokladu je $X'X$ (jako momentová matice) **pozitivně definitní** (a symetrická) **matice, existuje regulární matice** P **rozměrů** $[k,k]$ **taková, že platí** $X'X = P.P'$**. Pak lze psát**

$$\varepsilon'N\varepsilon = (b-\beta)'X'X(b-\beta) = (b-\beta)'\,PP'\,(b-\beta) = [P'(b-\beta)]'[P'(b-\beta)] \ .$$

Odtud plyne, že vektor $P'(b-\beta)$ **a tedy též vektor** $(b-\beta)$ **- *protože matice* P *je nestochastická* - nezávislý na skaláru** $s^2(T-k)$ **a též na** s^2 ***(o P totiž předpokládáme, že je nestochastická matice) .*** □.

Tvrzení (2D) **Odhady vektoru parametrů β pořízené metodou nejmenších čtverců a metodou maximální věrohodnosti jsou identické.**

Důkaz tvrzení (2D) **: Již jsme ukázali, že odhad β pořízený metodou OLS má tvar**

$$_{OLS}\boldsymbol{b} = (X'X)^{-1}X'\,y$$

Zbývá tedy ukázat, že odhad pořízený metodou maximální věrohodnosti má stejný tvar . Při tomto ověření vyjdeme ze sdružené hustoty vektoru náhodných složek, která má tvar

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{(2\pi)^{T/2}\sigma^T}\exp\left(-\frac{\varepsilon'\varepsilon}{2\sigma^2}\right) \quad \textbf{pro} \quad \varepsilon \approx N\left(0\,;\sigma^2 I_T\right)$$

Tato sdružená hustota je současně tzv. věrohodnostní funkcí, v jejímž zápisu se projevuje rozdíl v chápání pozic (odhadovaných) parametrů a pozorovaných veličin. Píšeme tedy

$$f(y, X;\ \beta, \sigma^2) = L(\beta, \sigma^2;\ y, X)$$

Zápis sdružené hustoty $f(y, X;\ \beta, \sigma^2)$ (kde se pozorované hodnoty y, X uvádí před středníkem, zatímco parametry β, σ^2 za ním) **pohlíží na tvar *(zde normálního)* rozdělení jako na rozdělení náhodného vektoru s pevně danými (*známými*) určenými parametry** β **a** σ^2. **Na hodnoty** y **zde pohlížíme, jakoby byly „generovány mechanismem" , který se řídí rozdělením náhodných složek** ε **(při dané matici vysvětlujících proměnných** X **).**

V zápise věrohodnostní funkce $L(\beta, \sigma^2;\ y, X)$ (kde oba tyto parametry uvádíme v zápise před středníkem) **se naopak na *hledané parametry* pohlíží jako na *neznámé*, které odhadujeme ze *známých pozorovaných veličin* regresní rovnice** (těmi jsou vektor y a matice X) **.**

Věrohodnostní funkci, jejíž maximum hledáme, zapíšeme ve tvaru, do něhož zahrneme pozorované veličiny (a přirozeně též vektor β **a skalár** σ^2 **) :**

$$L(\beta, \sigma^2; y, X) = \frac{1}{(2\pi)^{T/2}\sigma^T} \exp\left(-\frac{(y - X\beta)'(y - X\beta)}{2\sigma^2} \right)$$

Přímá maximalizace této (nelineární) věrohodnostní funkce je komplikovaná.
Proto ji ekvivalentně **maximalizujeme v logaritmovaném tvaru** (logaritmus je spojitá rostoucí funkce, takže poloha původního maxima – ze statistického hlediska jde o modus – se po této transformací nezmění):

$$L^*(\beta, \sigma^2; y, X) = \ln L(\beta, \sigma^2; y, X) = -T/2\ln(2\pi) - T/2\ln\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}(y - X\beta)'(y - X\beta)$$

Úkolem je maximalizovat $L^*(\beta, \sigma^2; y, X)$ **vzhledem k** β **a** σ^2**. Rovnocenným cílem je minimalizace kladně vzatého výrazu** $L^{**}(\beta, \sigma^2; y, X)$ **(neboť** $\sigma^T = (\sigma^2)^{T/2}$ **)**

$$\textbf{Min}_{\sigma^2, \beta}\ [\ T/2.\ln(2\pi) + T/2.\ln\sigma^2 + \frac{1}{2\sigma^2}(y - X\beta)'(y - X\beta)\ ]$$

Při této minimalizaci postupně dostáváme :

(A1)
$$\frac{\partial L^{**}}{\partial \beta} = \frac{1}{2\sigma^2}.(-2X'y + 2X'X\beta) = 0$$

(B1)
$$\frac{\partial L^{**}}{\partial \sigma^2} = \frac{T}{2\sigma^2} - \frac{1}{2\sigma^4}(y - X\beta)'(y - X\beta) = 0$$

<u>Poznámka</u> : při derivování podle rozptylu σ^2 **zacházíme s touto veličinou jako s jediným** (nedělitelným) **symbolem**

Řešením vztahu (A1) zřejmě dostaneme vektor odhadnutých parametrů ve tvaru

$$_{ML}b = (X'X)^{-1}X'y$$

Následně nyní dosazením tohoto odhadu za β do vztahu (B1) obdržíme [1]

(B1*) $$\frac{\partial L^{**}}{\partial \sigma^2} = \frac{T}{2\sigma^2} - \frac{1}{2\sigma^4}(y - X(X'X)^{-1}X'y)'(y - X(X'X)^{-1}X'y) = 0$$

Po vynásobení dvojnásobkem rozptylu ($2\sigma^2$) dostaneme zjednodušení:

$T - \frac{1}{\sigma^2}e'e = 0$, **odkud plyne** $e'e = \sigma^2.T$ **a následně** ${}_{ML}\hat{\sigma}^2 = \frac{e'e}{T}$ **.**

Odhad reziduálního rozptylu získaný metodou maximální věrohodnosti má tedy tvar

$${}_{ML}\hat{\sigma}^2 = \frac{e'e}{T} = \frac{SSE}{T}$$

<u>Poznámka</u>: Všimněme si, že k odhadu koeficientů ${}_{ML}\beta$ jsme nepotřebovali operovat se σ^2, zatímco následný odhad ${}_{ML}\hat{\sigma}^2$ byl již vázán na předtím pořízený *odhad ${}_{ML}\beta$ (při jinak odhadnutém β bychom mohli získat obecně jiný odhad pro σ^2) .

Měli bychom ještě ukázat, že získaný výraz pro ${}_{ML}\beta$ dává skutečně minimum (nikoliv maximum nebo sedlový bod)**. To dokážeme, pokud druhý diferenciál vztahu pro L^{**} vede k matici, která je pozitivně definitní. Skutečně lze snadno ověřit, že**

(B2) $$\frac{\partial^2 L^{**}}{\partial \beta^2} = \frac{X'X}{\sigma^2} > 0 \qquad ,$$

protože momentová matice $X'X$ je sama (za přijatého předpokladu, že X má plnou hodnost k) **vždy pozitivně definitní.**

K získání Fisherovy informační matice (čtvercové symetrické matice řádu k+1) potřebujeme vypočíst derivace věrohodnostní funkce podle (složek) vektoru β a skaláru σ^2. Vyjdeme-li ze vztahů

(A1) $$\frac{\partial L^{**}}{\partial \beta} = \frac{1}{2\sigma^2}.(-2X'y + 2X'X\beta) = 0$$

(B1) $$\frac{\partial L^{**}}{\partial \sigma^2} = \frac{T}{2\sigma^2} - \frac{1}{2\sigma^4}(y - X\beta)'(y - X\beta) = 0$$

určíme potřebné druhé parciální derivace pro dosazení do matice

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L^{**}(\beta,\sigma^2)}{\partial\beta\partial\beta} & \frac{\partial^2 L^{**}(\beta,\sigma^2)}{\partial\beta\partial\sigma^2} \\ \frac{\partial^2 L^{**}(\beta,\sigma^2)}{\partial\beta\partial\sigma^2} & \frac{\partial^2 L^{**}(\beta,\sigma^2)}{\partial\sigma^2\partial\sigma^2} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L^{*}(\beta,\sigma^2)}{\partial\beta\partial\beta} & \frac{\partial^2 L^{*}(\beta,\sigma^2)}{\partial\beta\partial\sigma^2} \\ \frac{\partial^2 L^{*}(\beta,\sigma^2)}{\partial\beta\partial\sigma^2} & \frac{\partial^2 L^{*}(\beta,\sigma^2)}{\partial\sigma^2\partial\sigma^2} \end{pmatrix}$$

---

[1] Tvaru, kdy po určení některého parametru (zde β) dosadíme získanou hodnotu do původní věrohodnostní funkce, abychom mohli určit další parametry (zde σ^2) se někdy říká *koncentrovaná věrohodnostní funkce*.

Výpočtem jednotlivých derivací dostáváme

(A2) $$\frac{\partial^2 L^{**}}{\partial\beta.\partial\beta}=\frac{X'X}{\sigma^2}$$

(B2) $$\frac{\partial L^{**}}{\partial\sigma^2\,\partial\sigma^2}=-\frac{T}{2\sigma^4}+\frac{2}{2\sigma^6}(y-X\beta)'(y-X\beta)=\frac{1}{\sigma^6}\varepsilon'\varepsilon-\frac{T}{2\sigma^4}$$

(AB2) $$\frac{\partial L^{**}}{\partial\beta\partial\sigma^2}=\frac{-(X'X\beta-X'y)}{\sigma^4}=\frac{X'\varepsilon}{\sigma^4}$$ **a pro kontrolu**

(AB2) $$\frac{\partial L^{**}}{\partial\sigma^2\partial\beta}=-\frac{2(-X')(y-X\beta)}{2\sigma^4}=\frac{X'\varepsilon}{\sigma^4}$$

Matice P tedy nabude tvaru

$$P=\begin{pmatrix}\dfrac{X'X}{\sigma^2} & \dfrac{X'\varepsilon}{\sigma^4}\\ \dfrac{X'\varepsilon}{\sigma^4} & \dfrac{1}{\sigma^6}\varepsilon'\varepsilon-\dfrac{T}{2\sigma^4}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sigma^2}\begin{pmatrix}X'X & \dfrac{X'\varepsilon}{\sigma^2}\\ \dfrac{X'\varepsilon}{\sigma^2} & \dfrac{1}{\sigma^2}\varepsilon'\varepsilon-\dfrac{T}{2\sigma^2}\end{pmatrix}$$

Uplatněním střední hodnoty na P dostaneme

$$EP=\begin{pmatrix}X'X & E\dfrac{X'\varepsilon}{\sigma^2}\\ E\dfrac{X'\varepsilon}{\sigma^2} & E(\dfrac{1}{\sigma^4}\varepsilon'\varepsilon-\dfrac{T}{2\sigma^2})\end{pmatrix}=\frac{1}{\sigma^2}\begin{pmatrix}X'X & 0\\ 0 & \dfrac{T}{2\sigma^2}\end{pmatrix}$$ **, protože**

$E\dfrac{X'\varepsilon}{\sigma^2}=\dfrac{X'}{\sigma^2}E\varepsilon=0$ **s ohledem na nestochastičnost** X' **a centrovanost** ε **a**

$E\left(\dfrac{1}{\sigma^4}\varepsilon'\varepsilon-\dfrac{T}{2\sigma^2}\right)=\dfrac{E\varepsilon'\varepsilon}{\sigma^4}-\dfrac{T}{2\sigma^2}=\dfrac{T}{2\sigma^2}$ **, protože** $E\varepsilon'\varepsilon=T.\sigma^2$

Všimněme si, že tato matice je – s ohledem na pozitivní definitnost momentové matice $X'X$ **- rovněž pozitivně definitní. Tím jsme dokázali, že jde skutečně o minimum (**námi záporně vzaté**) resp.o maximum (**původní**) věrohodnostní funkce.**

Nyní se můžeme přesvědčit, zda jde skutečně o nejlepší odhady, což zjistíme vyčíslením Fisherovy informační matice, jež je inverzní k matici P **.**

$$\left(\frac{\partial^2 L^{**}(\theta)}{\partial\theta\partial\theta'}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{X'X}{\sigma^2} & 0\\ 0 & \dfrac{T}{2\sigma^4}\end{pmatrix}^{-1}=\sigma^2.\begin{pmatrix}X'X & 0\\ 0 & \dfrac{T}{2\sigma^2}\end{pmatrix}^{-1}$$

θ **je užito z důvodu úsporného značení, v našem případě** $\theta=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_k,\sigma^2)$ **.**

<u>Poznámka a současně definice:</u>

Odhadová funkce $\hat{\theta}$ **se nazývá *MVB* (*minimum variance bound*) estimátor, jestliže je nestranná a jestliže její kovarianční matice má velikost danou jako**

$$CovV = -[T.P(\theta))]^{-1} \text{ , kde } P(\theta) = E\left[\frac{\partial^2 \ln f(Zt,\theta)}{\partial\theta\partial\,\theta}\right] ,$$

kde $f(Z_t,\theta)$ **je sdružená hustota (resp. věrohodnostní funkce** $L(\theta,Z_t)$ **) rozdělení náhodného vektoru** Z_t **sdružujícího (**v našem případě**) pozorované hodnoty** y_t, X_t

Odtud můžeme určit kovarianční matici odhadové funkce $\hat{\theta}$**.**

$$CovV = -[T.P(\theta))]^{-1} = -T\left[E.\frac{\partial^2 L^*(\theta)}{\partial\theta\partial\theta'}\right]^{-1} = T.\begin{pmatrix} \frac{X'X}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{T}{2\sigma^4} \end{pmatrix}^{-1} = \sigma^2\begin{pmatrix} \frac{X'X}{T} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sigma^2} \end{pmatrix}^{-1}$$

Odtud je vidět, že dolní hranice velikosti asymptotické kovarianční matice vektoru β **libovolného estimátoru je dána výrazem** $Cov(\hat{\beta}) = \sigma^2.\lim\left(\frac{X'X}{T}\right)^{-1}$

To však přesně odpovídá tvaru asymptotické kovarianční matice $\sqrt{T}(\hat{\beta}-\beta)$.

Současně je vidět, že dolní hranice pro rozptyl $\hat{\sigma}^2$ **(***získaná libovolným estimátorem***) je dána jako**

$$\operatorname{var}\hat{\sigma}^2 = 2\sigma^4$$

<u>Poznámka</u>: Mezi odhady reziduálního rozptylu pořízenými metodou nejmenších čtverců a metodou maximální věrohodnosti platí vztah :

$${}_{ML}\hat{\sigma}^2 = \frac{T-k}{T}\,{}_{OLS}\hat{\sigma}^2$$

<u>Poznámka</u>: Z předchozího je vidět, že odhad reziduálního rozptylu metodou maximální věrohodnosti není nestranný (zůstává však – stejně jako odhad prostou metodou nemenších čtverců OLS **– konzistentní a asymptoticky nestranný)**

Obecněji, ne však zcela univerzálně lze říci, že zatímco OLS-metody inklinují z hlediska svých vlastností k *nestranným odhadům* (které jsou *vydatné* jen za velmi vzácných okolností) , pak ML-techniky poskytují *odhady vydatné* (obvykle na samé mezi možností daných *Cramér-Raovou dolní hranicí*) , avšak *nestrannost* je vlastností, kterou od nich obvykle nelze očekávat. Ve vícerovnicových regresních modelech ovšem ani simultánní OLS odhadové techniky neposkytují *nestranné* odhady (opět nepočítaje výjimky) **, takže tam dvěma aspoň požadovanými statistickými vlastnostmi zůstává** jen ***konzistence a asymptotická normalita*) .**