<u>*Zobecněný lineární regresní model*</u>

Zobecněný lineární regresní (*jednorovnicový*) model je charakterizován následujícími vlastnostmi modelových veličin :

1. ***Centrovanost náhodných složek*** $E\varepsilon = 0$
2. ***Obecnost kovarianční matice náhodných složek :*** $Cov(\varepsilon, \varepsilon') = \Sigma$ ***(obecná, nestochastická matice)***
   2a) heteroskedasticita
   2b) autokorelovanost náhodných složek
3. ***Nekorelovanost náhodných složek s nezávisle proměnnými*** $EX'\varepsilon = 0$ **.**
4. ***Plná hodnost matice vysvětlujících proměnných*** $h(X) = k$

Odtud je zřejmé, že *rozdíl mezi standardním a zobecněným lineárním regresním modelem spočívá v připuštění obecného tvaru kovarianční matice* náhodných složek Σ, která může být libovolná symetrická pozitivně definitní matice, jak je to vyjádřeno podmínkou (2). Zbývající tři podmínky (1), (3), (4) zůstávají beze změn.

Kvantifikace parametrů zobecněného lineárního regresního modelu s uvedenými podmínkami může být provedena obyčejnou metodou nejmenších čtverců, není to však nejlepší postup. Získané parametry budou sice konzistentní a nestranné, nebudou však vydatné.

$$_{OLS}\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$$

A. *Odhad* $_{OLS}\hat{\beta}$ ***je nestranný*** pro libovolnou velikost vzorku T, protože :

$$E(_{OLS}\hat{\beta}) = E(X'X)^{-1}X'y = E(X'X)^{-1}X'(X\beta + \varepsilon) =$$
$$= E(X'X)^{-1}X'X\beta + E(X'X)^{-1}X'\varepsilon) = E\beta + (X'X)^{-1}X'E\varepsilon) = \beta \; + 0 = \varepsilon$$

[Pozměněná vlastnost (2) se při určení střední hodnoty nijak neuplatní, protože v OLS odhadu parametrů β matice Σ vůbec nevystupuje]

B. *Odhad* $_{OLS}\hat{\beta}$ ***je lineární*** (vzhledem k y), $_{OLS}\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$ ze stejných důvody jako ve standardním lineárním regresním modelu.

C. odhad $_{OLS}\hat{\beta}$ **není nejlepší** ve smyslu **minimální kovarianční matice** $Cov(_{OLS}\hat{\beta})$**,**

neboť např. pro kovarianční matici GLS odhadové funkce $_{GLS}\hat{\beta}$ platí :

$$Cov(_{OLS}\hat{\beta}) - Cov(_{GLS}\hat{\beta}) = \Omega$$

kde Ω je pozitivně semidefinitní matice řádu k (rozměrů $k \; x \; k$).

<u>ověření</u> : Bez újmy na obecnosti můžeme matici D libovolné jiné **lineární** odhadové funkce $\tilde{\beta}$ vyjádřit ve tvaru

$$D = (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1} + G'$$

Poznámka **: Vzhledem k požadavku na nestrannost $_{GLS}\hat{\beta}$ musí s ohledem na platnost**

$D'X = (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}X + G'X = I_T$ **, vždy platit** $G'X = 0.$

Pro libovolnou jinou (lineární, nestrannou) odhadovou funkci tedy musí platit

$$Cov(\tilde{\beta}) = E\left[(\tilde{\beta} - E\tilde{\beta}).(\tilde{\beta} - E\tilde{\beta})'\right] = E\left[(\tilde{\beta} - \beta).(\tilde{\beta} - \beta)'\right] =$$

$$= E\,[\,(\,(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1} + G')\,y - \beta]\,.[\,(\,(\,X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1} + G')y' - \beta'\,]$$

$$= E\,[\,(\,(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1} + G')(X\beta + \varepsilon) - \beta]\,.[\,(\,(\,X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1} + G')\,(X\beta + \varepsilon) - \beta]'$$

$$= E\,[\,(\,(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}X\beta + G'X\beta + \varepsilon) + G'\varepsilon - \beta]\,.[\,(\,(\,X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}\,X\beta + G'X\beta + + G'\varepsilon) - \beta]'$$

……………………………………………………………………………………………………

$$= E\,[\,(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}\,\varepsilon + G'\varepsilon]\,.\,[\,(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}\,\varepsilon + G'\varepsilon\,]\,' =$$

$$= E[\,(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}\varepsilon\varepsilon'\,\Sigma^{-1}X(X'\Sigma^{-1}X)^{-1} + G'\varepsilon\varepsilon'\,G + (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}\,\varepsilon\varepsilon'G + G'\varepsilon\varepsilon'\,\Sigma^{-1}X\,(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}]$$

$$=(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}E\varepsilon\varepsilon'\,\Sigma^{-1}X(X'\Sigma^{-1}X)^{-1} + G'E\varepsilon\varepsilon'G + (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}E\varepsilon\,\varepsilon'G + G'E\varepsilon\,\varepsilon'\,\Sigma^{-1}X(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}$$

$$= (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}\Sigma\,\Sigma^{-1}X(X'\Sigma^{-1}X)^{-1} + G'\,\Sigma G + (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}\Sigma\,G + G'\,\Sigma\,\Sigma^{-1}X(X'\Sigma^{-1}X)^{-1} =$$

$$= (X'\Sigma^{-1}X)^{-1} + G'\,\Sigma G + (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\,G + G'\,X(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}$$

$$= \;(X'\Sigma^{-1}X)^{-1} + G'\Sigma G \;=\; Cov(_{GLS}\hat{\beta}) + G'\Sigma G\,,$$

kde $G'\Sigma G$ je zřejmě pozitivně semidefinitní matice. □.