

ZÁKLADY HYDROGEOLOGIE

VI. PŘEDNÁŠKA

CHEMIZMUS PODZEMNÍCH VOD

přírodní původ

- interakce vody s hominami
- látkové složení srážek
- interakce s organizmy

antropogenní původ

- ovlivnění atmosférických srážek
- kontaminace horninového prostředí
- kontaminace povrchových vod

Látkové složení podzemních vod

- kationty (anorganické látky, méně i organické)
- anionty (anorganické látky, méně i organické)
- rozpuštěné molekuly bez náboje (především organické látky)
- radioaktivní látky

- koloidy

- mikroorganizmy

- plyny

1. makroprvky – hlavní ionty

- koncentrace > 5 mg/L
- kationty – Ca²⁺, Mg²⁺, Na⁺, K⁺
- anionty – HCO₃⁻, SO₄²⁻, Cl⁻, (event. CO₃²⁻)
- význam pro posouzení regionálního oběhu podzemních vod
- význam pro klasifikaci podzemních vod

2. mikroprvky – vedlejší ionty

- koncentrace 0,01 – 10 mg/L
- kationty – Fe, Mn,
- anionty – halogenidové anionty, NO₃⁻, NO₂⁻, (CO₃²⁻)
- význam pro charakterizaci podmínek zvodnění a jejich změn v čase a prostoru

3. stopové prvky

- ostatní prvky v koncentracích pod 0,1 mg/L
- význam pro určení stáří vod (izotopy), ložisková prospekce, detailní problematika

TYPY CHEMICKÝCH ANALÝZ PODZEMNÍCH VOD

- základní fyzikálně chemický rozbor vody
 - základní parametry + běžně se vyskytující složky
 - zaměřeno zejména na anorganické látky
 - jednotlivé kationty jsou stanoveny souborně (vice forem – např. Fe, Mn)
- specializované (účelové) analýzy
 - specifické podle účelu vzorkování
 - stanovení vybraných ukazatelů podle skupin – kontaminační HG

organické látky

 - NEL (neploámě extrahovatelné látky), látky BTX
 - CIU (chlorované uhlovodíky)
 - PAU (polyaromatické uhlovodíky), PCB (polychlorované bifenyly), atd.

anorganické látky

 - stopové kovy
 - vybrané prvky (analýza všech redoxních forem), atd.
- úplný rozbor vody

Vyjádření koncentrací jednotlivých ukazatelů

g/L	jen ojediněle, solanky, synsedimentární vody, minerální vody
mg/L	nejčastěji používaná jednotka
µg/L	jednotka výskytu stopových prvků, organické kontaminanty
mmol/L	přepočítání mezi mg a mmol – dělení atomovou hmotností
meq/L	mmol násobené nábojem iontu
meq %	procentuální zastoupení jednotlivých aniontů a kationtů, klasifikační diagramy - vyjadřuje se zvlášť pro kationty (100%) a anionty (100%)

chyba iontové nevyrovnanosti

$$CBE = \frac{\sum kationty(meq/l) - \sum anionty(meq/l)}{[\sum kationty(meq/l) + \sum anionty(meq/l)]} \times 100$$

přijatelná hodnota je 5%

INTERPRETACE CHEMIZMU VOD

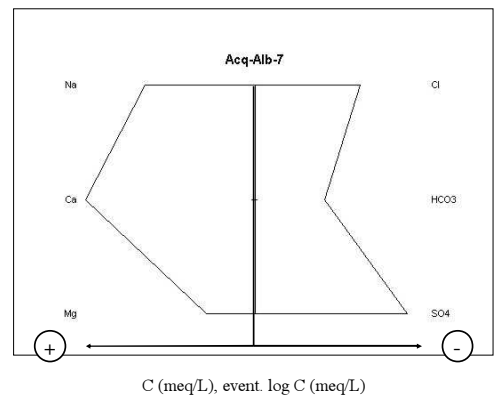
1. verbální

- popis chemizmu
- názvosloví podle převládajících kationtů a aniontů (nad 25% meq/L)
- např. voda Na-Ca-HCO₃ typu

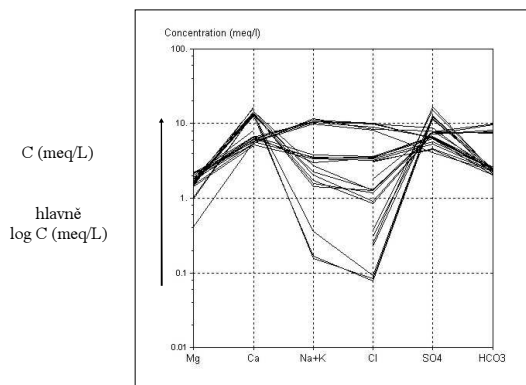
2. grafické

- bodové
 - barevné značky v mapách
 - grafy (v mapách nebo v textu) - koláčové, sloupečkové, Piperův, Stiffův, atd.
- liniové
 - izochemy
 - konstrukce izochem pro sledovaný ukazatel
 - především v kontaminační HG
- plošné
 - plochy barevně nebo šrafově odlišené podle převažujícího typu vod
 - zpravidla základní mapy malých měřítek

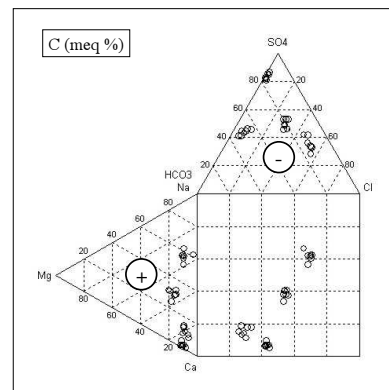
STIFFŮV graf



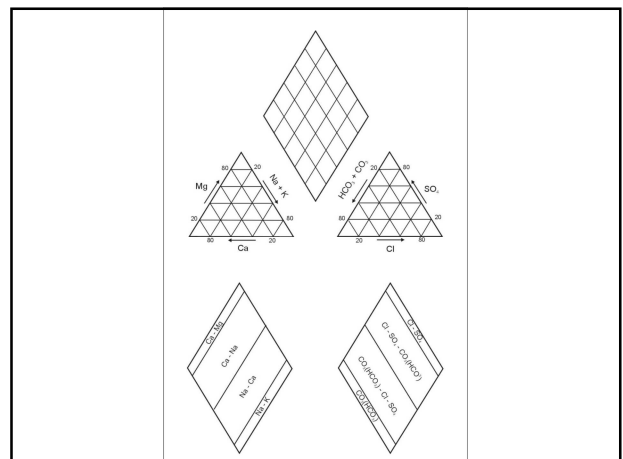
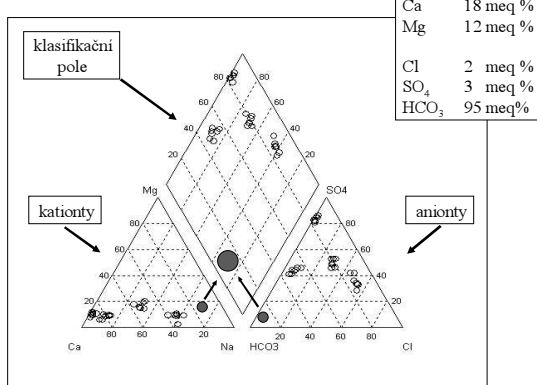
SCHOELLERŮV graf



DUROVŮV graf



PIPERŮV graf



FORMOVÁNÍ CHEMIZMU VOD

Regionální vývoj chemizmu

- v oblastech doplňování je chemický typ vody Ca-HCO_3
- pro pánevní struktury je charakteristický vývoj aniontů od zóny doplňování (postupné vytlačování synsedimentárních vod v pánevních strukturách)
 $\text{HCO}_3^- \rightarrow \text{HCO}_3^- + \text{SO}_4^{2-} \rightarrow \text{SO}_4^{2-} \rightarrow \text{SO}_4^{2-} + \text{Cl}^- \rightarrow \text{Cl}^-$ (Chebotarevova sekvence)
- Ca a Mg obecně převažují v zónách doplňování, Na roste ve směru proudění (neplatí obecně - komplikované iontovou výměnou na povrchu jíly)
- Ca-HCO_3 – lokální oběh a zóny doplňování (*rozpuštění kalcitu*)
- Ca-Mg-HCO_3 – dolomitické terény
- Ca-SO_4 – oblasti s výskytem evaporitů (*vysrážení kalcitu – pokles pH*)
- Mg-SO_4 – vzácný typ vod (*karnalit, epsomit – specifické typy hornin*)
- Na-HCO_3 – *rozpuštění silikátů, nebo výměna kationtů (rozpuštění karbonátů) - pH*
- Na-Cl – *rozpuštění halitu* – poměr odlišný od 1:1 indikuje výměnu kationtů Na
- zastoupení Br, I – fosilní mořské vody

ODBĚRY VZORKŮ

vlastnímu odběru vzorků musí předcházet terénní určení parametrů, které se při manipulaci se vzorkem mění – pH, Eh, teplota, event. konduktivita, O_2

vzorkovnice se liší podle druhu analyzované látky

- použité analytické metodě a koncentracím odpovídají zejména objemy vzorků

vlastnostem látek odpovídá materiál vzorkovnic, jejich uzavření a případná stabilizace vzorku

- těkavé organické látky – vzorky bez bublin vzduchu, tlakově těsné
- stanovení plynů
- organické látky – skleněné vzorkovnice
- anorganické látky – běžně i plastové vzorkovnice
- kovy ve specifických redoxních formách – stabilizace kyselinou (HCL , HNO_3)

metodiky jsou vždy požadovány jednotlivými laboratořemi, nejsou striktně sjednocené

VLASTNÍ ODBĚRY VZORKŮ

pokud se vyhodnocuje trend chemizmu v čase, musí být metodika odběru vzorků vždy sjednocená

Statické

1. z hladiny
2. zonální
3. speciální

použití běžných typů vzorkovacích válců a speciálních hlubinných vzorkovačů

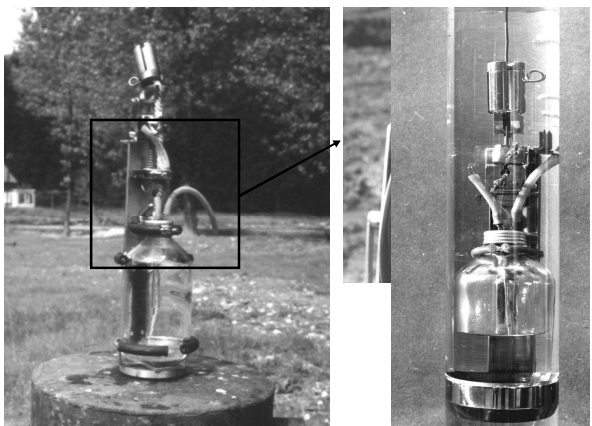
Dynamické

1. z trvale exploatovaných objektů
2. vzorkovací čerpání

nutné několikanásobné odčerpání objemu vody ve vrtu
porušení přírodní stratifikace vodního sloupce



Vzorkovací válce pro odběr vody z hladiny



LOKALIZACE MÍST ODBĚRŮ VZORKŮ

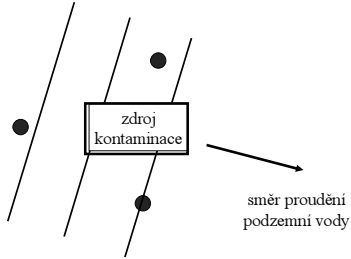
- hydrogeologické vrty, sdružené piezometry, studny
- lokalizace závisí na účelu prací - neexistuje obecné pravidlo

Regionální měřítko

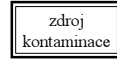
- odběry vzorků by měly reprezentovat změnu hydrogeologických poměrů
- současně může docházet ke změnám chemizmu i v rámci jedné geologické jednotky ve směru proudění podzemní vody
- situování odběrných míst zejména na proudnicích procházejících celou strukturou (hloubení vrtů v těchto liniích)
- jímání podzemních vod – charakterizace kvality podzemních vod zejména v oblastech předpokládané exploatace a v dosahu čerpání

CHARAKTERIZACE KONTAMINAČNÍCH MRAKŮ

1. neznáme směr proudění podzemní vody

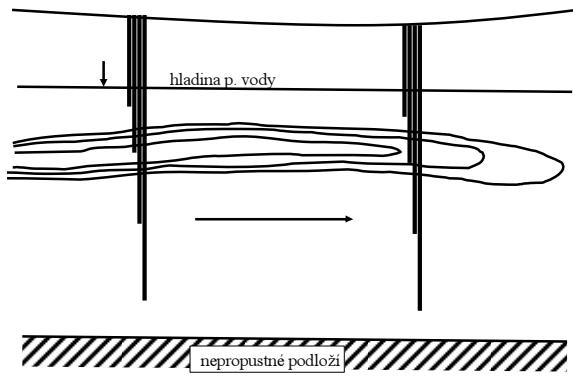


CHARAKTERIZACE KONTAMINAČNÍCH MRAKŮ



1. $L = v_{ef} \cdot t$
2. $2L$
3. $3L$
4. $2L + 1/2L$
5. šířka mraku

VÝZNAM SDRUŽENÝCH PIEZOMETRŮ



Statické vzorkování podzemní vody

běžně vystrojené hydrogeologické vrtý (případně i studny)

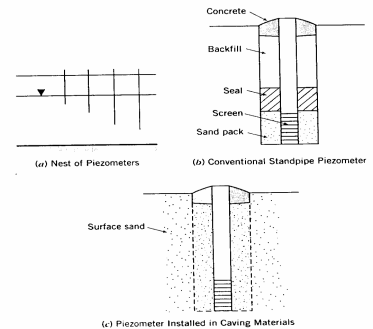


Figure 17.18 Basic designs for standpipe piezometers. Panel (a) illustrates the concept of how a nest of piezometers provides spatially distributed concentration. Panels (b) and (c) are examples of typical piezometers for noncaving and caving materials (modified from Cherry, 1983).

Statické vzorkování podzemní vody

hydrogeologické vrtý speciálně vystrojené pro možnost vzorkování v různých hloubkových úrovních saturované zóny (sdrúžené piezometry)

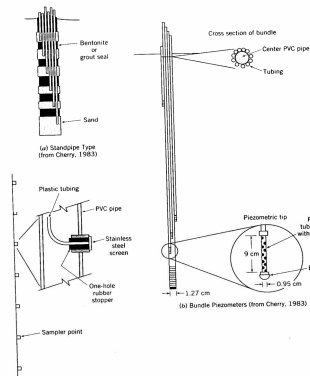


Figure 17.19 Examples of multilevel sampling devices. Portions of panel (a) are reprinted by permission of Ground Water Monitoring Review. Copyright © 1981. All rights reserved.

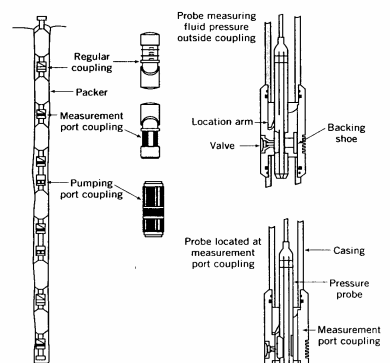
Dynamické vzorkování podzemní vody

možné využít jakýkoliv z dříve uvedených typů hydrogeologických vrtů

nejčastěji umístění čerpadel do běžně vystrojených hydrogeologických vrtů

v běžně vystrojených vrtech lze využít speciálně modifikovaných čerpadel a přístrojů ke sledování kvalitativních vlastností podzemní vody i ke zjištění vertikální zónalnosti

(obturátory, testery)

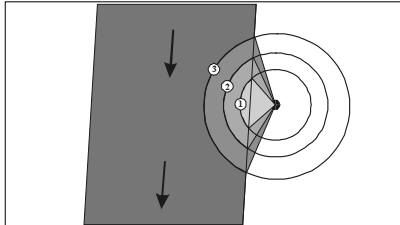


(a) Westbay-Type Samplers (from Cherry, 1983)

Dynamické vzorkování podzemní vody

Výsledek výrazně ovlivněn řadou faktorů

1. celkové odčerpané množství před odběrem vzorku (čerpané množství, čas)
2. pozice vrtu (při plošné nehomogenní distribuci sledovaných ukazatelů)
3. hloubka zapuštění sacího koše čerpadla (při vertikální zonalnosti koncentrací)
4. metodiku maximálně přiblížit předchozí etapě vzorkování (znát všechny výše uvedené parametry)



KLASIFIKACE CHEMIZMU

klasifikace podle typu vod má význam při regionálně hydrogeologickém průzkumu

rovnání koncentrací s limitními hodnotami

význam při klasifikaci podzemní vody pro pitné nebo technologické účely
 - norma pro pitnou vodu ČSN 75 7111 – již neplatná – IH, MH, NMH
 - vyhláška 2000/23 Sb. – součást vodního zákona
 - normy ČSN (ISO) – technologické vody, minerální vody, apod.

jen orientační význam pro klasifikaci kontaminace podzemní vody
 kritéria MP MŽP ČR

- klasifikace podle kritérií A, B, C
- 3 druhy oblastí podle využití (obytná, průmyslová, smíšená)

limitní rizikové koncentrace

analýza rizika

- kalkulace rizikových koncentrací podle toxikologických efektů jednotlivých kontaminantů a podle způsobu, délky a četnosti expozice

ÚVOD DO KONTAMINAČNÍ HYDROGEOLOGIE

TRANSPORTNÍ PROCESY

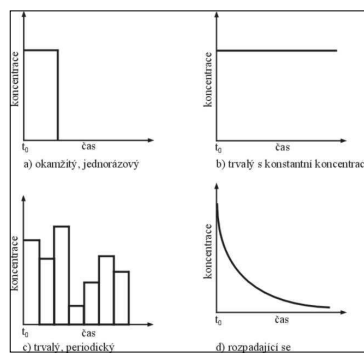
vstup kontaminantů do zvodněných systémů

- zdroj kontaminace (ohnisko)
- okrajové podmínky kontaminace

I. podle geometrie:

1. bodové
2. liniové
3. plošné

II. podle časového průběhu kontaminace ve zdroji



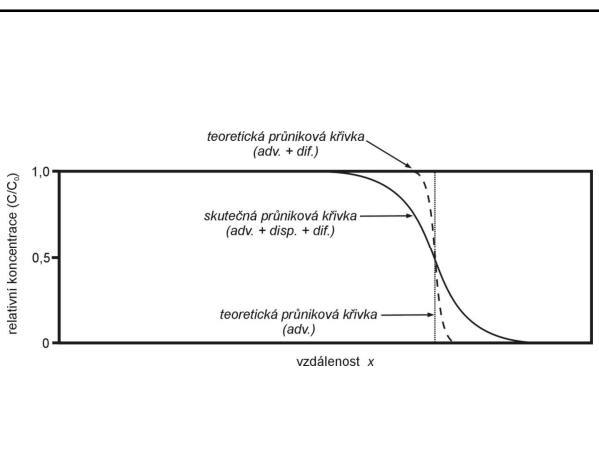
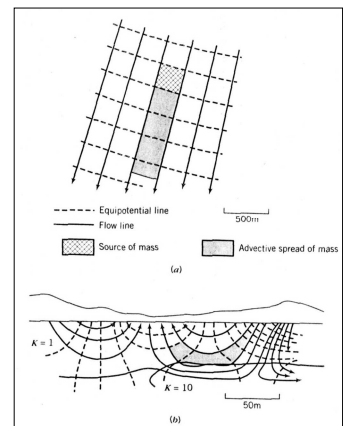
1. ADVEKCE

transport kontaminantu způsobený prouděním podzemní vody

vyjádření advekce pomocí efektivní rychlosti proudění z Darcyho zákona

$$v_{ef} = \frac{k \cdot I}{n_e}$$

advekce jen posouvá kontaminační mrak ve směru proudění
 bez dalších procesů by mrak svým tvarem kopíroval ohnisko



2. DIFÚZE

- pohyb rozpustěných látek ve formě molekul nebo atomů ve směru koncentračního gradientu
- všesměrný pohyb, dochází k němu tak dlouho, dokud existuje koncentrační gradient
- dochází k němu i ve fluidech která se nepohybují ($v = 0$)
- z hlediska času (dlouhodobě) i v opačných směrech – např. rozpustěné látky v matrix puklinové porózních hornin, méně propustných nehomogenitách

1. Fickův zákon

pro vodné prostředí obecně a v 1-D – pouze funkci vlastnosti látky (za daných P a T podmínek)

$$F = -D_d \cdot \left(\frac{dC}{dx} \right)$$

$D_d \dots L^2/t$
 $F \dots \text{mol/L}\cdot t$

difuzivní koeficient
 změna objemu látky
 na jednotkovou plochu

2. Fickův zákon

pro vodné prostředí obecně a v 1-D

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -D_d \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

$C \dots \text{mol}$

koncentrace v roztoku (konstantní)

- porózní prostředí – difúze je omezena pouze na póry mezi zrn
- nutné uvažovat i vlastnosti prostředí

tortuozita

- vyjadřuje křivatost průtočných kanálků při difúzním pohybu
- nejčastější definice – poměr mezi skutečnou a teoreticky nejkratší trajektoní částic

$$\tau = L_e / L$$

- číslo je vždy > 1 v porózním prostředí (1,3 – 2,0)

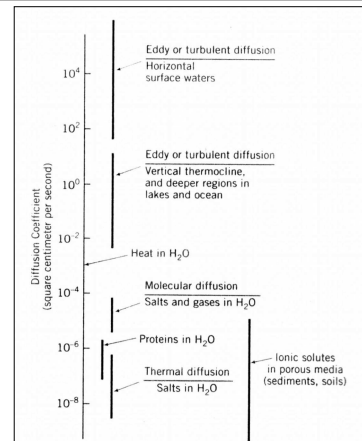
horninové prostředí

- efektivní difúzní koeficient ... D'_d

$$D'_d = \frac{n}{\tau} D_d$$

- obecně roste s rostoucí porozitou prostředí

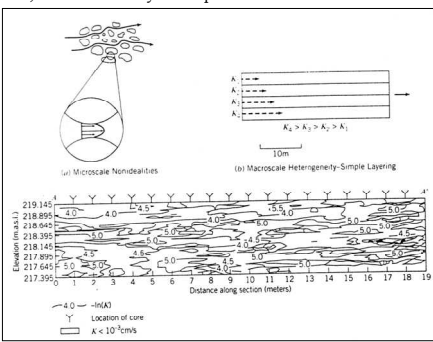
- hodnoty difúzního koeficientu iontů klesají s rostoucím počtem nábojů
- nejčastěji v řádu 10^{-6} cm²/s
- 5×10^{-6} – 20×10^{-6} cm²/s
- nejvyšší hodnoty mají H⁺ a OH⁻



3. DISPERZE

transport na základě rozdílu v hodnotách hydraulické vodivosti (nehomogenity prostředí) a tím i odlišné rychlosti proudění

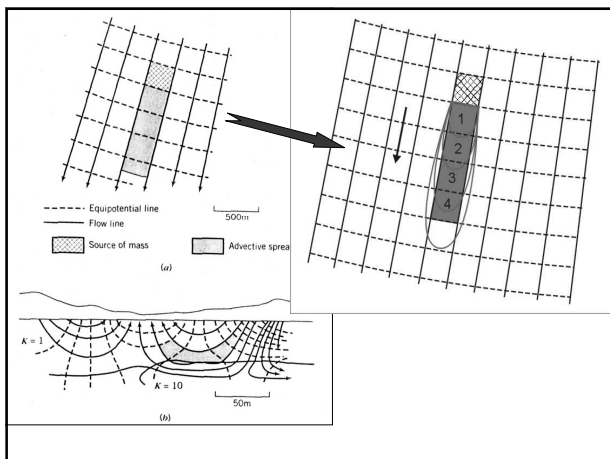
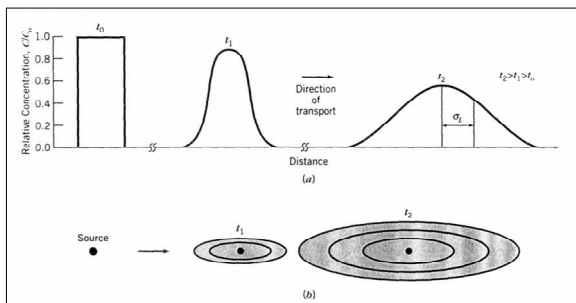
1. distribuce vektoru rychlosti v pórech
2. nehomogenity v rámci malých vrstev
3. nehomogenity v rámci kolektorů



HYDRODYNAMICKÁ DISPERZE

souborný název pro procesy difúze a disperze

oba procesy jsou vzájemně neoddělitelné a působí společně



HYDRODYNAMICKÁ DISPERZE

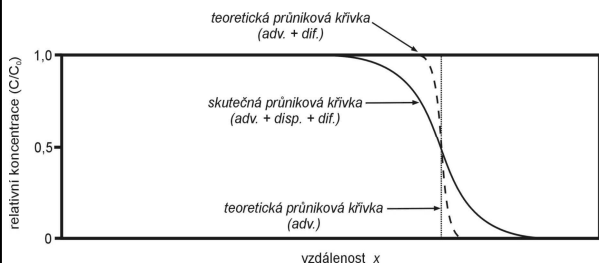
v 3-D systému ve všech směrech (x, y, z)

- podélná (longitudinální) – paralelní s hlavním směrem proudění (ve směru osy x) α_L (m)
- příčná disperzivita (transverzální) – kolmá na směry proudění (ve směru osy y) α_T (m)
- vertikální disperzivita – kolmá na směr proudění (ve směru osy z) α_V (m)

$$D_L = \alpha_L \cdot v_i + D'_d \quad D \dots \text{koeficient hydrodynamické disperze [m}^2\text{/s]}$$

$$D_T = \alpha_T \cdot v_i + D'_d \quad \alpha \dots \text{diperzivita [m]}$$

HYDRODYNAMICKÁ DISPERZE



Srovnání podélné a příčné disperzivity

přírodní prostředí

- hodnoty disperzivit nejsou konstantní a závisí na měřítku migrace
- po určité vzdálenosti dosáhnou disperzivity konstantních hodnot

podélná (směr osy x z hlediska směrů proudění)

- zhruba 0,1X L (nejčastěji 0,3 – 0,6)

$$\text{orientační určení podle vzorce } \alpha_L = 0,83(\log L)^{2,414}$$

příčná (směr osy y)

- zhruba 0,01X L (nejčastěji 0,018 – 0,036) – o řád menší než podélná

příčná (směr osy z)

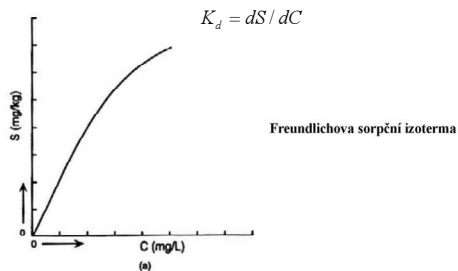
- ještě menší než příčná ve směru osy y

4. ADSORPCE A RETARDACE

zachycení kontaminantu na povrchu zrn pevné fáze

sorpční izotermy

popis pomocí tzv. rozdělovacího (distribučního) koeficientu – K_d [L/kg, mL/g]



anorganické kontaminanty

- hodnoty K_d se stanovují laboratorně, nebo v terénu ze srovnání rychlosti migrace kontaminantu a konzervativního stopovače

organické kontaminanty

- dominantní je sorpce na organický uhlík (hydrofobní teorie)

$$K_d = K_{oc} \cdot f_{oc}$$

- hodnoty K_{oc} lze korelovat s hodnotami rozpustnosti, distribučního koeficientu K_{ow} , případně opět určení jako u anorganických kontaminantů
- je nutné stanovit zastoupení organického uhlíku v kolektoru

- rychlost pohybu všech látek rozpustěných v podzemní vodě nemusí být stejná

- v praxi proto kalkulace tzv. *retardačního faktoru* – určuje, kolikrát je rychlost pohybu dané látky pomalejší ve srovnání s advekci

vzorec Freeze a Chenu – lineární

$$R = \frac{v}{v_c} \left(\text{event. } \frac{t}{t_c}, \text{event. } \frac{L}{L_c} \right) = 1 + \frac{\rho_b}{n} \cdot K_d$$

- je-li tedy K_d rovno 0, pak je R rovno 1, kontaminant migruje stejně rychle jako proudí podzemní voda

- je-li hodnota R rovna 4, kontaminant tedy migruje 4x pomaleji než je rychlost proudění podzemní vody (nebo nesorbující se látky)

5. ROZPAD

proces přeměny kontaminantu na dceřinné produkty

anorganické látky

- pouze jejich transformace na jiné formy s odlišnými vlastnostmi (mobilita, rozpustnost, apod.), zůstávají v kolektoru

radioaktivní látky

- rozpad na dceřinné produkty, nevratný proces

organické látky

- nevratné přeměny na dceřinné produkty
- často aerobní nebo anaerobní respirace bakteriemi
- vznik meziproduktů až finálních produktů rozkladu (biologicky řízené procesy – vznik CO_2 a H_2O a případně dalších metabolitů)

KINETIKA REAKCÍ

- kinetiky reakcí 0., 1. a 2. řádu
- podle exponentu závislé proměnné

KINETIKA 0. ŘÁDU

- rychlost rozpadu je konstantní a nezávisí na koncentraci původní látky

$$\text{- obecně } -\frac{dC}{dt} = k$$

$$\text{- po integrování časem obdržíme } C_t = C_o - kt$$

- konstantní hodnota rozpadové konstanty

- v praxi velmi vzácné

KINETIKA 1. ŘÁDU

- rychlost rozpadu závisí na koncentraci původní látky

$$\text{obecně } -\frac{dC}{dt} = kC$$

$$\text{po integrování } C_t = C_o e^{-kt}$$

- konstantní hodnota rozpadové konstanty

- běžné se vyskytující radioaktivní izotopy, některé organické látky (BTX)
- organické látky – rychlost reakce závisí na dalších faktorech (pH, množství bakteriální hmoty) souvisejících s lokálními podmínkami
- nejedná se o klasickou konstantu – lokálně proměnlivá, rozpětí dat v literatuře
- radioaktivní látky – konstanta platí ve všech podmínkách

$$\text{- poločas rozpadu } t_{1/2} = 0,693/k$$

Odvození obecných advektivně – disperzních rovnic přenosu rozpuštěných látek

$$-v_x \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial C}{\partial t}$$

$$D_L \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - v_x \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial C}{\partial t}$$

$$D_L \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_T \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - v_x \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial C}{\partial t}$$

řešení – známé okrajové podmínky

1. typu - konstantní koncentrace (např. laboratorní kolony – 1-D)
2. typu - konstantní gradient koncentrace (např. líniový zdroj – kanál – 1-D)
3. typu - proměnlivá koncentrace (např. pulzační zdroj)

Řešení pro okrajovou podmínku 1. typu v 1-D systému

$$C = \frac{C_o}{2} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{L - v_x \cdot t}{2\sqrt{D_L \cdot t}} \right) + \exp \left(\frac{v_x \cdot L}{D_L} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{L + v_x \cdot t}{2\sqrt{D_L \cdot t}} \right) \right]$$

$$\frac{C}{C_o} = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{L - v_x \cdot t}{2\sqrt{D_L \cdot t}} \right) \right] \quad \begin{matrix} D_L = \alpha_L v_i + D_d^* \\ D_T = \alpha_T v_i + D_d^* \end{matrix}$$

$$\sqrt{(D \cdot t)} \approx \sqrt{(\alpha_x \cdot vt)}$$

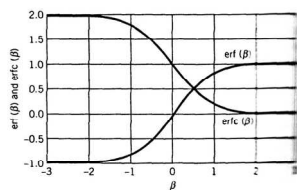
$$\frac{C}{C_o} = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{L - v_x \cdot t}{2\sqrt{\alpha_x \cdot v_x t}} \right) \right] \quad \text{tato rovnice má omezené praktické použití}$$

Komplementární chybová funkce

$$\operatorname{erfc}(-\beta) = 1 + \operatorname{erf}(\beta)$$

$$\operatorname{erf}(-\beta) = -\operatorname{erf}(\beta)$$

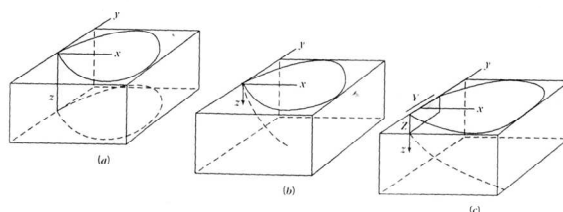
$$\operatorname{erfc}(\beta) = 1 - \operatorname{erf}(\beta)$$



β	$\operatorname{erf}(\beta)$	$\operatorname{erfc}(\beta)$
0	0	1.0
0.05	0.056372	0.943628
0.1	0.112463	0.887537
0.15	0.167996	0.832004
0.2	0.223703	0.776297
0.25	0.276326	0.723674
0.3	0.326377	0.673623
0.35	0.373882	0.626118
0.4	0.428932	0.571068
0.45	0.478482	0.521518
0.5	0.520500	0.479500
0.55	0.565523	0.436677
0.6	0.603696	0.396304
0.65	0.642029	0.357971
0.7	0.677601	0.322399
0.75	0.711156	0.288844
0.8	0.742101	0.257899
0.85	0.770668	0.230332
0.9	0.796908	0.203092
0.95	0.820801	0.179199
1.0	0.842701	0.157299
1.1	0.880205	0.119795
1.2	0.919314	0.080686
1.3	0.934608	0.065392
1.4	0.952285	0.047715
1.5	0.966105	0.033895
1.6	0.976348	0.023652
1.7	0.983790	0.016210
1.8	0.989091	0.011099
1.9	0.992790	0.007210
2.0	0.995322	0.004678
2.1	0.997021	0.002979
2.2	0.998157	0.001863
2.3	0.998857	0.001143
2.4	0.999314	0.000669
2.5	0.999593	0.000407
2.6	0.999764	0.000256
2.7	0.999866	0.000154
2.8	0.999925	0.000075
2.9	0.999959	0.000041
3.0	0.999978	0.000022

ADVEKČNĚ – DISPERZNÍ ROVNICE

- při modelování šíření kontaminantů ve 2-D i 3-D systému (uvažování i příčné disperzivitu) je nutné do úvah zahrnout i geometrii zdroje
- zjednodušení analytického řešení – kalkulace koncentrací v linii podélné se směrem proudění, kdy y a z = 0
- po určité době – ustálený stav (v určitém místě za advektivní frontou se udržují konstantní koncentrace – $\operatorname{erfc} < (-2)$)



- plošný zdroj – v praxi nejčastější případ
- těleso zasahující pod hladinu se souřadnicemi ve směru Y a Z

laterální šíření
ve směru osy y

$$\frac{C}{C_0} = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{erf} \left[\frac{(y+Y/2)}{2(\alpha_y x)^{1/2}} \right] - \operatorname{erf} \left[\frac{(y-Y/2)}{2(\alpha_y x)^{1/2}} \right] \right\}$$

laterální šíření
ve směru osy z

$$\frac{C}{C_0} = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{erf} \left[\frac{(z+Z)}{2(\alpha_z x)^{1/2}} \right] - \operatorname{erf} \left[\frac{(z-Z)}{2(\alpha_z x)^{1/2}} \right] \right\}$$

obecná úplná rovnice analytického řešení ve 3-D systému a plošném zdroji

$$\frac{C(x,y,z,t)}{C_0} = \frac{1}{8} \operatorname{erfc} \left[\frac{x-vt}{2(\alpha_x vt)^{1/2}} \right] \left\{ \operatorname{erf} \left[\frac{(y+Y/2)}{2(\alpha_y x)^{1/2}} \right] - \operatorname{erf} \left[\frac{(y-Y/2)}{2(\alpha_y x)^{1/2}} \right] \right\} \left\{ \operatorname{erf} \left[\frac{(z+Z)}{2(\alpha_z x)^{1/2}} \right] - \operatorname{erf} \left[\frac{(z-Z)}{2(\alpha_z x)^{1/2}} \right] \right\}$$

pro linii symetrie

$$\frac{C(x,0,0,t)}{C_0} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\frac{x-vt}{2(\alpha_x vt)^{1/2}} \right] \left\{ \operatorname{erf} \left[\frac{Y}{4(\alpha_y x)^{1/2}} \right] \operatorname{erf} \left[\frac{Z}{2(\alpha_z x)^{1/2}} \right] \right\}$$