Základy finanční matematiky

Josef Niederle

4. února 2003

Základem této prozatímní verze elektronického učebního textu je obsah přednášky, který zapsal Jan Myslivečck. Text je napsán v jazyce Latex, používá pdflatex se styly hyperref, geometry a pifont.

Význam symbolů

◀ ▶ předcházející◆další obrazovka
▲ ▼ předcházející◆další stránka
↖ ↘ první◆poslední stránka
❐ přepnutí velikosti obrazovky
Červená barva znázorňuje aktivní odkazy.

1 Úrok

Úrok je rozdíl mezi splatnou částkou S a zapůjčenou částkou P, tedy $u = S - P$. Vztaženo relativně k zapůjčené částce dostaneme *polhůtní úrokovou míru* $i = \frac{u}{P}$. Vztaženo ke splatné částce dostaneme *diskontní (předlhůtní úrokovou) míru* $I = \frac{u}{S}$. Platí

$$I = \frac{i}{1+i}, \quad i = \frac{I}{1-I}$$

Míry i, I abstrahují od výše půjčované částky, jsou však vypočítány pro danou lhůtu splatnosti T.

1.1 Složené úročení

Můžeme však abstrahovat i od lhůty splatnosti T, pokud si úrokovou míru i a diskontní míru I vyjádříme pomocí míry pro nějaké normalizované *úrokovací období.* [1]

Počítám-li úrok jednou za rok, pak po T letech musím vrátit

$$S_T = P(1+i)^T, \text{ resp. } P = S_T(1-I)^T,$$

kde i je *efektivní roční úroková míra* a I je *efektivní roční diskontní míra.* Mohu počítat úrok i v jiných intervalech (měsíc, den). Je-li doba splatnosti celistvý násobek tohoto úrokovacího období, a má-li rok m úrokovacích období, pak

[1] Můžeme si představovat, že peníze vrátíme a ihned vypůjčíme. Tedy i, I nezáleží na tom, na jak dlouho si půjčujeme.

$$P(1+i_{(m)})^m = P(1+i),\ \text{tedy}\ \ i_{(m)} = (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1,$$

kde i je *efektivní roční úroková míra*, dále je obvyklá *nominální roční úroková míra področního (*např. *měsíčního) úročení* $j_{(m)} = m \cdot i_{(m)}$. Pro $m > 1$ je $i > i_{(m)}$ a

$$S = P(1+i)^T = P(1+i_{(m)})^{mT} = P(1+\frac{j_{(m)}}{m})^{mT}$$

V limitě pro $m \to \infty$ dostaneme *spojité úročení*

$$S = Pe^{jT}, j = \ln(1+i),$$

kde j je *nominální roční úroková míra spojitého úročení* .
Viz. příklad 1.

Máme-li funkci okamžité úrokové míry $\delta(\tau)$, je

$$S = Pe^{\int_0^T \delta(\tau)\mathrm{d}\tau}$$

1.2 Daně

Daně činí pevný podíl z úroků σ. Platí-li se zároveň s výpočtem úroku, můžeme určit *čistou nominální úrokovou míru*

$$(1-\sigma)j_m$$

Je také možné, že se úroky připisují méně často, než je úrokovací období, pak dostáváme *čistou efektivní úrokovou míru*

$$i = \left(1 + (1-\sigma)\left(\left(1 + \frac{j_{(m)}}{m}\right)^{\frac{m}{n}} - 1\right)\right)^{n} - 1,$$

kde n je četnost připisování úroků do roka.

1.3 Inflace

Roční míra inflace je obvykle definována výrazem

$$i_{infl} = \frac{I_R - I_{R-1}}{I_{R-1}},$$

kde I_R, I_{R-1} jsou cenové indexy v roce R a $R-1$. Musíme tedy uvážit *reálnou roční úrokovou míru*, pro kterou platí[2]

$$i_{real} = \frac{i - i_{infl}}{1 + i_{infl}},$$

kde i je roční úroková míra.

[2] K odvozeni tohoto vztahu stačí uvážit, kolik stojí zboží teď a za rok, a kolik dostaneme od banky, když si peníze uložíme

2 Časová hodnota peněz

Budeme uvažovat modely, kde máme danou časovou funkci $f(t)$, přičemž musí platit, že částce K_{t_0} v čase t_0 odpovídá částka K_{t_1} v čase t_1, tedy

$$\frac{K_{t_0}}{f(t_0)} = \frac{K_{t_1}}{f(t_1)}$$

Obvykle je časová funkce dána procedurou úročení, např. pro spojité úročení

$$f(t) = e^{jt} = (1+i)^t.$$

Pro tzv. jednoduché úročení jsou dva modely využívající lineárního vyjádření závislosti úroku na čase :

1. Z každé koruny ponechané na účtě po dobu $\frac{1}{m} - t$ dostaneme

$$1 + j_{(m)}(\frac{1}{m} - t)$$

Vidíme, že platí

$$K_t(1 + j_{(m)}(\frac{1}{m} - t)) = K_{\frac{1}{m}}$$

Odtud

$$K_{t_0}(1 + j_{(m)}(\frac{1}{m} - t_0)) = K_{t_1}(1 + j_{(m)}(\frac{1}{m} - t_1))$$

Za časovou funkci můžeme vzít pro období mezi 0 a $\frac{1}{m}$

$$f(t) = \frac{1}{1 + j_{(m)}(\frac{1}{m} - t)}$$

Hodnota úroku vyplaceného na konci úrokovacího období je

$$K j_{(m)}(t_1 - t_0)$$

Mezi tím je to (čas t_1 je někde uprostřed úrokovacího období)

$$u_{t_1} = K_{t_0} \frac{j_{(m)}(t_1 - t_0)}{1 + j_{(m)}(\frac{1}{m} - t_1)}$$

a

$$K_{t_1} = K_{t_0} + u_{t_1} = K_{t_0} \frac{1 + j_{(m)}(\frac{1}{m} - t_0)}{1 + j_{(m)}(\frac{1}{m} - t_1)}$$

2. Volme $f(t) = 1 + j_{(m)}t$ a[3] dostaneme ihned

$$u_{t_1} = K_{t_0} \frac{j_{(m)}(t_1 - t_0)}{1 + j_{(m)}t_0}, \quad K_{t_1} = K_{t_0} \frac{1 + j_{(m)}t_1}{1 + j_{(m)}t_0}$$

Název jednoduché úročení by měl být správně vyhrazen pro úrok s pevnou lhůtou splatnosti.

[3] V podstatě se neuvažují roky, ale jen tok času, obvykle pro konkrétní půjčky.

3 Hodnotová rovnice

Realizované peněžní toky C_i vztahujeme k libovolnému referenčnímu datu. Obvykle za referenční datum volíme počátek (PV - *současná hodnota*) či konec (FV - *budoucí hodnota*) uvažovaného období. Platí

$$PV = \sum_K C_K \frac{f(0)}{f(t_K)}, \quad t_K \geq 0$$

Současná hodnota je funkcí úrokové míry $f(t) = (1+i)^t$. Může mít několik nulových bodů, tj. takových hodnot i^*, pro které platí

$$PV = \sum_K C_K \frac{1}{(1+i^*)^{t_K}} = 0$$

Hodnota i^* se nazývá *vnitřní míra výnosnosti*

1. Investiční rozhodování

   - *Pravidlo současné hodnoty* : pokud je současná hodnota kladná, investuj.
   - *Pravidlo vnitřní míry výnosnosti* : Označme i^* nejbližší hodnotu vnitřní míry výnosnosti k uvažované míře zisku i. Je-li $i^* > i$ a PV je klesající funkcí i, pak investuj. Je-li $i^* < i$ a PV je rostoucí funkcí i, pak investuj.[4]

Doba návratnosti je doba, za kterou kumulované příjmy nahradí celkové náklady.

Hodnotovou rovnici sestavíme tak, že porovnáme dva systémy peněžních toků vztažené k vhodně zvolenému společ-

[4] Jde v podstatě o pravidlo současné hodnoty, neboť např. v prvním případě je PV kladná, protože má nejbližší nulový bod vpravo od uvažovaného bodu grafu a s rostoucí mírou zisku i klesá. Musí být tedy kladná.

nému referenčnímu datu. Řešíme ji vzhledem k příslušné neznámé.

4 Důchody

Důchody jsou systémy pravidelných plateb, bez ohledu na okolnosti, vždy jisté. Podle toho, kdy dochází k uvažované platbě rozlišujeme *předlhůtný* a *polhůtný* důchod - platba „na začátku“, či „na konci“ roku či jiného výplatního období.

Dále budeme přepokládat, že výplatní období se shodují s úrokovacími obdobími a že splátky v počtu n mají konstatní výši K. Potom současná hodnota předlhůtního důchodu je

$$PV = K + Kv + Kv^2 + \ldots + Kv^{n-1} = K\frac{1-v^n}{1-v} = K\ddot{a}_{\overline{n}|}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}$$

Současná hodnota polhůtního důchodu je

$$PV = Kv + Kv^2 + \ldots + Kv^n = K\frac{1-v^n}{i} = Ka_{\overline{n}|},$$

kde

$$v = \frac{1}{1+i}.$$

Koncová hodnota důchodu

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = (1+i)^n \ddot{a}_{\overline{n}|}, s_{\overline{n}|} = (1+i)^n a_{\overline{n}|},$$

Obecně není úroková míra konstantní, proto současnou hodnotu k-té splátky ve výši K musíme počítat takto

$$PV_K = \frac{K}{(1+i_1)(1+i_2)\ldots(1+i_k)}$$

Dále uvažujeme další modifikace. Například

- odložený důchod
  Počátek vyplácení posunut o k období. Pak současná hodnota předlhůtního důchodu je

$$PV = K_{k|}\ddot{a}_{\overline{n}|} = Kv^k \frac{1 - v^n}{1 - v}$$

  a polhůtního je

$$PV = K_{k|}a_{\overline{n}|} = Kv^k a_{\overline{n}|} = Kv^k \frac{1 - v^n}{i} = K_{k_1|}\ddot{a}_{\overline{n}|}$$

- Področní důchody
  $i_{(m)} = \frac{j_{(m)}}{m}$ Rok má m stejně dlouhých výplatních období shodných s úrokovacími obdobími. Dále je $j_{(m)} = j$ nominální úroková míra.

U předlhůtního důchodu je současná hodnota určena vztahem

$$PV = K\ddot{a}_{\overline{mn}|\frac{j}{m}} \approx Km(1 + \frac{m+1}{2m}j)a_{\overline{n}|j}$$

U polhůtního je to

$$PV = Ka_{\overline{mn}|\frac{j}{m}} \approx Km(1 + \frac{m-1}{2m}j)a_{\overline{n}|j}$$

- Speciální typy důchodů
  - aritmetický růst pateb, tj. $K, 2K, \ldots, nK$
    U předlhůtního důchodu je současná hodnota

$$PV = K + 2Kv + 3Kv^2 + \ldots + nKv^{n-1} = \\ = K\frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n}{1-v} = K(I\ddot{a})_{\overline{n}|}$$

U polhůtního

$$PV = Kv + 2Kv^2 + \ldots + nKv^n = K\frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n}{i} = K(Ia)_{\overline{n}|}$$

– aritmetický pokles plateb

Současná hodnota předlhůtního důchodu je

$$\begin{aligned} PV = nK + (n-1)Kv + \ldots + Kv^{n-1} &= \\ = K\frac{n - a_{\overline{n}|}}{1-v} &= K(D\ddot{a})_{\overline{n}|} \end{aligned}$$

U polhůtního

$$PV = nKv + (n-1)Kv^2 + \ldots + Kv^n = K\frac{n - a_{\overline{n}|}}{i} = K(Da)_{\overline{n}|}$$

– geometrický růst plateb, tj.

$$K(1+q), K(1+q)^2, \ldots \quad q < i$$

Současná hodnota věčného polhůtního důchodu s geometrickým růstem plateb je

$$PV = K(1+q)v + K(1+q)^2 v^2 + \ldots = K\frac{1+q}{i-q}$$

5 Umořování dluhu

Splátka je tvořena *úrokem* a *úmorem*, přičemž každá splátka je součtem úroku ze zbývající dlužné částky a úmoru dlužné částky. Rozpis splátek včetně úmoru je *umořovací plán*

5.1 Umořování stejnými splátkami

Období	splátka	úmor	úrok	stav dluhu
0	-	-	-	$Ka_{\overline{n}\vert}$
1	K	Kv^n	$K(1-v^n)$	$Ka_{\overline{n}\vert} - Kv^n$
2	K	Kv^{n-1}	$K(1-v^{n-1})$	$Ka_{\overline{n-1}\vert} - Kv^{n-1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n-1	K	Kv^2	$K(1-v^2)$	$Ka_{\overline{2}\vert} - Kv^2$
n	K	Kv	$K(1-v)$	$Ka_{\overline{1}\vert} - Kv = 0$

5.2 Výpočet počtu splátek

Počáteční výše úvěru je

$$D = Ka_n = K\frac{1-v^n}{i}.$$

Platí

$$\frac{Di}{K} = 1 - v^n \Longrightarrow v^n = 1 - \frac{Di}{K}$$

$$n = \frac{\ln(1 - \frac{Di}{K})}{\ln v}$$

pokud $Di < K$, jinak $n = \infty$, tedy nikdy nedojde ke splacení dlužné částky. Pokud nastane rovnost $Di = K$, tak dlužník splácí pouze úrok. Dlužná částka sice neroste, ale ani neklesá.

6 Obligace

Obligace je závazek *emitenta* splatit v jistém časovém okamžiku její *nominální hodnotu* F a mezitím platit *kupónové platby* C. Kupónová sazba je

$$c = \frac{C}{F}.$$

Obligace jsou obchodovatelné a mají na trhu cenu P.

Pro aktuální úrokovou míru lze vypočítat současnou hodnotu po k-té kupónové platbě (viz 3) diskontováním očekávaných plateb.

$$\begin{aligned} PV &= \frac{C}{1+i} + \frac{C}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{C}{(1+i)^{n-k-1}} + \frac{C+F}{(1+i)^{n-k}} = \\ &= F\left(\frac{c}{1+i} + \frac{c}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{c}{(1+i)^{n-k-1}} + \frac{c+1}{(1+i)^{n-k}}\right) = \\ &\quad = F\left(c a_{\overline{n-k}|i} + \frac{1}{(1+i)^{n-k}}\right) \end{aligned}$$

Opět se dá vypočítat vnitřní míra výnosnosti i^* po k-té kupónové platbě

$$P = F\left(\frac{c}{1+i^*} + \frac{c}{(1+i^*)^2} + \ldots + \frac{c}{(1+i^*)^{n-k-1}} + \frac{c+1}{(1+i^*)^{n-k}}\right),$$

kde P je cena obligace po k-té kupónové platbě. Někdy se nazývá *výnosnost do splatnosti* a platí

$$
\begin{aligned}
PV = F &\quad\Leftrightarrow\quad i = c\\
PV < F &\quad\Leftrightarrow\quad i > c\\
PV > F &\quad\Leftrightarrow\quad i < c\\
P = F &\quad\Leftrightarrow\quad i^* = c\\
P < F &\quad\Leftrightarrow\quad i^* > c\\
P > F &\quad\Leftrightarrow\quad i^* < c\\
PV = P &\quad\Leftrightarrow\quad i = i^*\\
PV < P &\quad\Leftrightarrow\quad i > i^* \text{ nevýhodná investice}\\
PV > P &\quad\Leftrightarrow\quad i < i^* \text{ výhodná investice}
\end{aligned}
$$

6.1 Vypověditelné obligace

Eminent může splatit obligaci dříve, než je doba splatnosti. Tato skutečnost má význam zejména v případě změn úrokových měr.

6.2 Spotové a forwardové úrokové míry, výnosová křivka

Předpokládáme, že pro několik následujících let budou různé úrokové míru $i_1, i_2, \ldots$ a chceme je formálně nahradit jedinou úrokovou mírou, která by platila n let od současnosti, tedy aby platilo

$$K(1+s_n)^n = K(1+i_1)(1+i_2)\cdots(1+i_n)$$

Forwardová úroková míra f_{nk} má platit od roku n do roku

$n + k$, tedy

$$K(1 + f_{nk})^k = K(1 + i_{n+1}) \cdots (1 +_{n+k})$$

Je vidět, že platí

$$(1 + s_{n+k})^{n+k} = (1 + s_n)^n (1 + f_{nk})^k, \qquad s_n = f_{0n}$$

Posloupnost $s_1, s_2, \ldots$ je *spotová výnosová křivka*, $f_{n1}, f_{n2}, \ldots$ je *forwardová výnosová křivka.*

Současná hodnota obligace pak je

$$PV = \frac{C}{1 + s_1} + \frac{C}{(1 + s_2)^2} + \cdots + \frac{C}{(1 + s_{n-1})^{n-1}} + \frac{C + F}{(1 + s_n)^n} =$$
$$= \frac{C}{1 + i_1} + \frac{C}{(1 + i_1)(1 + i_2)} + \cdots + \frac{C}{(1 + i_1) \cdots (1 + i_{n-1})} +$$
$$\frac{C + F}{(1 + i_1) \cdots (1 + i_n)}$$

7 Durace

Obligace je popsána časem a výší jednotlivých plateb. Výši charakterizuje současná hodnota. *Durace* je časová charakterizace obligace [5]. Tedy při rovnoměrném vyplácení kupónových plateb je durace

$$D = \frac{\frac{c}{1+i^*} + 2\frac{c}{(1+i^*)^2} + \cdots + n\frac{c+1}{(1+i^*)^n}}{\frac{c}{1+i^*} + \frac{c}{(1+i^*)^2} + \cdots + \frac{c+1}{(1+i^*)^n}}$$

Tento vzorec lze upravit několika způsoby, jeden z nich je

$$D = \frac{1+i^*}{i^*} - \frac{n(c-i^*)+1+i^*}{c(1+i^*)^n - (c-i^*)}$$

[5] Jde o vážený průměr časů plateb, vahou je jejich diskontovaná výše.

7.1 Zvláštní případy

- Bezkupónová obligace $D = n, c = 0$

- Konzola (tj. nekonečný systém kupónových plateb). Pro $n \to \infty$ je
$$D = \frac{1 + i^*}{i^*}$$

Durace je přitom funkcí ceny, neboť i^* je funkcí ceny.

Vztah mezi změnou i^* a cenou lze odvodit z Taylorova rozvoje derivováním.

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -D \frac{\Delta i^*}{1 + i^*}$$

Vytvoříme-li portfolio ze sady obligaci se stejnou výnosností, které mají duraci D_i a cenu P_i, má portfolio duraci

$$D = \frac{P_1 D_1 + \cdots + P_n D_n}{P_1 + \cdots + P_n}$$

Platí

$$\frac{\mathrm{d}(P(1+i)^D)}{\mathrm{d}i}(i^*) = 0$$

Očekávaná cena obligace v čase D závisí málo na změně výnosnosti i^*.

8 Akcie

Vlastník akcie má právo na

- spolurozhodování na činnosti firmy
- dividendy (v předem neznámé výši)
- podíl na likvidačním zůstatku

Prioritní akcie zaručují dividendy, akcie nemusí mít nominální hodnotu. Může dojít ke štěpení akcií.
cena akcie = očekávaná cena
fundamentální, technická analýza - snaží se předpovědět vývoj cen akcií.

8.1 Odběrní právo na akcie

Předkupní právo akcionářů k nákupu (nově) emitovaných akcií a to za danou (zvýhodněnou cenu). S tímto právem lze obchodovat, má cenu.
R-cena odběrního práva
$PV_{\text{před}}$=cena akcie před datem odběru (jmenuje se datum bez odběrního práva)
PV_{po}=cena akcie bez odběrního práva po datu bez odběrního práva
S - zvýhodněná cena
N - počet odběrních práv potřebných k zakoupení akcie za cenu S

Platí

$$\begin{aligned} PV_{\text{před}} - R &= NR + S \\ PV_{po} &= NR + S \\ &\Downarrow \\ R &= \tfrac{PV_{\text{před}} - S}{N+1} && \text{před datem bez odběrního práva} \\ R &= \tfrac{PV_{po} - S}{N} && \text{po datu bez odběrního práva} \end{aligned}$$

9 Termínové obchody

lze obchodovat s komoditami (pšenice, kráva, plyn)
měnami (tj. jejich kurzy)
úrokovými mírami
akciemi
indexy cenných papírů

a to ve spotových kontraktech - obchod se uskutečňuje ihned a ve forwardových kontraktech - v dohodnutém termínu včetně placení, ty jsou obchodovatelné

9.1 Forwardové kontrakty

Jde o smlouvu mezi dvěma partnery o budoucím prodeji a nákupu v daném termínu za dohodnutou cenu, obvyklý je obchod za měnu.

9.2 Termínový měnový kurz

Termínový měnový kurz je určen vztahem

$$TK_{A/B} = AK_{A/B}\frac{1+i_A t}{1+i_B t}$$

kde $TK_{A/B}$ je termínový kurz jednotek měny A za jednotku měny B , např 39 CZK/USD a $AK_{A/B}$ aktuální kurz. [6] Nákup a prodej valut je obvykle prováděn s různými kurzy a úvěr a vklady jsou

---

[6] Jde o to, jak se bude měnit (předpoklad, skutečnost může být značně odlišná) kurz v závislosti na čase, lze odvodit úvahou, jak by se měnila hodnota peněz uložených v jednotlivých měnách. Právě uvedený vzorec je pak zřejmý, následující dva jsou již nepatrně složitější.

úročeny různou úrokovou míru. Pak

$$\begin{aligned} TK^N_{A/B} &= AK^N_{A/B}\frac{1+i^{\text{ú}}_A t}{1+i^v_B t} \\ TK^P_{A/B} &= AK^P_{A/B}\frac{1+i^v_A t}{1+i^{\text{ú}}_B t} \end{aligned}$$

kde *ú* je úvěr, v vklad, N nákup od banky měny B klientem za měnu A, P prodej měny B bance za měnu A.

Nákup zahraniční měny B klientem za měnu A. Protože je $i_v < i_{\text{ú}}$ je

$$AK_{A/B}\frac{1+i_A t}{1+i_B t} < AK_{A/B}\frac{1+i^{\text{ú}}_A t}{1+i^v_B t}$$

Prodej zahraniční měny B klientem za měnu A. Protože je

$i_v < i_ú$ je

$$AK_{A/B}\frac{1+i_A^v t}{1+i_B^ú t} < AK_{A/B}\frac{1+i_A t}{1+i_B t}$$

9.3 Swapový kontrakt

Jde o okamžitou koupi a odprodání v dohodnutém termínu za sjednaný kurz.

$$SW_{A/B} = TK_{A/B} - AK_{A/B} = AK_{A/B}\frac{(i_A - i_B)t}{1+i_B t}$$

10 Termínové kontrakty

	forwardové kontrakty	termínové kontrakty
množství	libovolné	centrálně stanovené
termín	libovolný	centrálně stanovený
cena	sjednaná	centrálně stanovená
partner	konkrétní	žádný
zprostředkovatel	žádný	centrální - umožňuje vyvázání z kontraktu
	neobchodovatelné	obchodovatelné

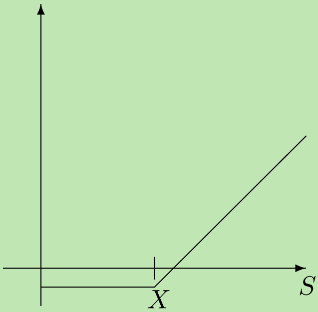
Na začátku klient zaplatí zálohu centrálnímu zprostředkovateli.

Clearingový dům = vymazání kontraktu = odprodej komodit
Ve skutečnosti se platby týkaji jen rozdílu cen mezi kontrakty = diferenční obchody.

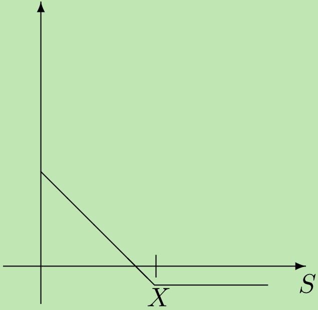
11 Opce

je cenný papír, jehož majitel má právo koupit (opce na koupi) od prodejce opce nebo prodat (opce na prodej) prodejci opce ve stanoveném termínu nějaký cenný papír za předem stanovenou cenu.

Kupec opce ztratí nejvýše to, co za opci zaplatil. Ztráta prodejce může být (libovolně) velká. Zisk kupce je ztráta prodejce. Cena opce je rovna očekávané diskontované hodnotě hrubého zisku kupce opce, to jest střední hodnota zisku kupce opce při započtení ceny opce je rovna nule.



Graf zisku kupce opce na koupi



Graf zisku kupce opce na prodej
X prováděcí cena.

S cena akcie v době platnosti opce.

11.1 Blackův-Scholesův vzorec

Blackův-Scholesův vzorec určuje cenu opce na koupi

$$P_{T-t} = S_{T-t}\Phi(d_1) - Xe^{-it}\Phi(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_{T-t}/X) + (i + \sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_{T-t}/X) + (i - \sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

a cenu opce na prodej

$$P_{T-t} = Xe^{-it}\Phi(-d_2) - S_{T-t}\Phi(-d_1)$$

kde

- P_{T-t} cena opce ϑ v čase $T-t$
- S_{T-t} cena akcie v čase $T-t$
- X prováděcí cena opce
- i roční míra zisku při spojitém úročení bezrizikových investic
- σ volatilita ceny akcie
- Φ distribuční funkce standardního normálního rozdělení

Cenu opce lze vypočítat jen ze známého rozložení pravděpodobnosti ceny akcie v době platnosti opce. Blackův-Scholesův vzorec předpokládá logaritmicko-normální rozložení diskontované ceny akcie s konstantní střední hodnotou. Můžeme však počítat příklady s libovolným heuristickým rozložením.

Pro spojité rozložení ceny akcie s frekvenční funkcí $\varphi(s)$ dostáváme pro opci na koupi

$$P = e^{-jT} \int_X^\infty (s - X) \cdot \varphi(s) \mathrm{d}s$$

Pro opci na prodej

$$P = e^{-jT} \int_0^X (X - s) \cdot \varphi(s) \mathrm{d}s.$$

12 Prémiové obchody

Totéž jako opce, ale jejich cena se platí v rozhodném dni (tj. době „akce“). Například buďto odeberu zboží za 480 kč, nebo zaplatím 60kč.

13 Spekulace s cennými papíry

Zákonná transakce za účelem zisku, spekuluji na rozdílné ceny na různých místech, nebo v různém čase. Obvykle se obchoduje na burze cenných papírů i zboží, které prodejci nepatří, nebo i reálně neexistuje.

13.1 Účastníci burzovních obchodů

Makléři	obchodují pro klienty svým jménem na jejich účet
dealeři	obchodují pro sebe svým jménem na svůj účet
banky	oboje
dohodci	zprostředkávají obchody

Klient má u makléře účet (peníze, akcie), makléř může se souhlasem klienta s cennými papíry provádět transakce, třeba je i zapůjčit třetí straně.

Krátký prodej: Klient dá makléři pokyn k prodeji akcií jiného klienta s tím, že je za předepsanou dobu vrátí.

13.2 Indexy cenných papírů

Indexy cenných papírů jsou tvořeny váženými průměry aktuálních cen cenných papírů (libovolně vybraných, obvykle tradiční — Dow Jones, PX 50 , . . .).

14 Analýza portfolia

Portfolio je soubor různých investic vytvořený k omezení rizika. Střední míra zisku je

$$\bar{i} = i_1 p_1 + \cdots + i_n p_n,$$

kde i_i je konkrétní možná hodnota míry zisku zisku a p_i pravděpodobnost, že nastane[7].

Platí

$$p_1 + \cdots + p_n = 1$$

[7]Třeba očekávám, že s pravděpodobností $p_1 = 0,5$ vydělám s mírou zisku 10% ,tj $i_1 = 0,1$ a s pravděpodobností $p_2 = 0,5$ vydělám s mírou zisku 20% ,tj $i_2 = 0,2$, pak $i = 0,15$.

Dále určujeme směrodatnou odchylku míry zisku

$$\sigma = \sqrt{(i_1 - \bar{i})^2 p_1 + \cdots + (i_n - \bar{i})^2 p_n}$$

Příklad: Dvě portfolia A,B byla zakoupena za stejnou cenu 10^6.

Cena portfolia, včetně výnosů	míra zisku	A (prst)	B (prst)
7.10^5	-0,3	0	0,02
8.10^5	-0,2	0	0,03
9.10^5	-0,1	0,4	0,09
10.10^5	0	0,23	0,13
11.10^5	0,1	0,38	0,19
12.10^5	0,2	0,31	0,20
14.10^5	0,3	0,04	0,34
Střední míra zisku		0,11	0,14
Riziko		0,09	0,16

Nejlepší portfolio je to, které leží na přímce nejdále směrem severozápadním. Protože tato dvě portfolia neleží na této přímce, nelze je srovnat objektivně (subjektivně: chci větší zisk a riziko, nebo jistotu, ale nižší zisk).

Snažíme se předpovědět, jaká bude míra zisku v budoucích letech, na základě pozorovaných hodnot míry zisku v čase t. Tedy ze souboru

$$\{i_t\}, t = 1, \ldots, T$$

vypočteme

$$\widehat{\bar{i}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} i_t$$

$$\widehat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{t} (i_t - \widehat{\bar{i}})^2}$$

Konkrétní investor, který se musí rozhodnout, může uvažovat křivky (nazývané *indiferenční křivky*) spojující body $(\sigma, \bar{i})$. Protože ideální porfolio s gradientem ve směru SZ tj. s vysokým ziskem při žádném riziku neexistuje, volíme podle směru gradientu od směru SZ až po směr severní (ten je již nerozumný, protože zvýšením rizika neroste zisk). Od směru severního po východní klesá míra zisku při růstu rizika. Většinou tedy chceme, aby indiferenční křivky byly rostoucí funkce.

14.1 Konstrukce portfolia

Portfolio tvořeno z n investic s jejich střední mírou zisku $\bar{i}_K$ a vahou v_K. Pak pro střední míru zisku portfolia platí

$$\bar{i} = \bar{i}_1 v_1 + \cdots + \bar{i}_n v_n$$

přičem pro váhy platí

$$\sum_{K=1}^{n} v_K = 1, \quad v_K \geq 0$$

$$\sigma = \sqrt{v_1^2\sigma_{11} + v_1 v_2 \sigma_{12} + \cdots + v_n^2 \sigma_{nn}}$$

kde $\sigma_{kl} = \sigma_k \sigma_l \rho_{kl}, \quad -1 \leq \rho_{kl} \leq 1$ je kovariance mezi k-tou a l-tou investicí. Pokud $\rho_{kl} < 0$, větší míře zisku jedné investice odpovídá menší míra zisku druhé investice. Zřejmě je $\sigma_{kk} = \sigma_k^2$.

Diverzifikace portfolia. Na obrázku je eficientní množina, což je severozápadní hranice množiny všech možných portfolií a přitom optimální portfolio je bod dotyku eficientní množiny s indiferenční křivkou.

Přidáním bezrizikové investice do portfolia můžeme rozšířit eficientní množinu tak, že spojíme bod na ose střední míry zisku s bodem dotyku původní eficientní množiny. Nový bod dotyku je pak nové optimální portfolio.

Pokud se navíc dá se stejnou mírou zisku vypůjčit a investovat do portfolia, je eficientní množina celá polopřímka.

Tržní portfolio je portfolio všech dostupných investic v rozsahu jejich zastoupení na trhu.

Ukážeme si, jaké jsou vlastnosti portfolia ze dvou investic $[\delta_1, \bar{i}_1]$ s vahou ϑ a $[\delta_2, \bar{i}_2]$ s vahou $1 - \vartheta$, jejichž korelační koeficient je ϱ.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $\bar{i}_1 \leq \bar{i}_2$

$$\bar{i} = \vartheta \bar{i}_1 + (1 - \vartheta)\bar{i}_2$$

$$\delta = \sqrt{\vartheta^2 \delta_1^2 + (1 - \vartheta)^2 \delta^2 + 2\vartheta(1 - \vartheta)\delta_1 \delta_2 \varrho}$$

Pokud $\bar{i}_1 < \bar{i}_2$, dosadíme $\vartheta = \frac{\bar{i} - \bar{i}_2}{\bar{i}_1 - \bar{i}_2}$ a dostaneme

$$\delta(i) = \frac{1}{|\bar{i}_1 - \bar{i}_2|} \sqrt{(\bar{i} - \bar{i}_2)^2 \delta^2 + (\bar{i}_1 - \bar{i})\delta_2^2 + 2(\bar{i} - \bar{i}_2)(\bar{i}_1 - \bar{i})\delta_1 \delta_2 \varrho}$$

Je tedy δ odmocninou kvadratické funkce argumentu $\bar{i}$.
Pro $\varrho = 1$ dostáváme

$$\delta(\bar{i}) = \frac{|(\bar{i} - \bar{i}_2)\delta_1) + (\bar{i}_1 - \bar{i})\delta_2|}{|\bar{i}_1 - \bar{i}_2|}$$

a pro $\varrho = -1$ dostáváme

$$\delta(\bar{i}) = \frac{(\bar{i} - \bar{i}_2)\delta_1) + (\bar{i} - \bar{i}_1)\delta_2|}{|\bar{i}_1 - \bar{i}_2|}$$

15 Příklady

1. **Úrok**

   Kolikrát se zvětší kapitál za půl roku při spojitém úročení s efektivní roční úrokovou mírou 0, 10.

   Spojité úročení probíhá podle vztahu

   $$S = Pe^{jt},$$

   kde j je nominální úroková míra spojitého úročení a platí

   $$j = \ln(1 + i)$$

   Přitom je dáno $i = 0,10$. Pak je

   $$\frac{S}{P} = e^{\frac{\ln(1+i)}{2}} = 1,049$$

2. **Úrok**
   Kolikrát se zvětší kapitál za půl roku při spojitém úročení s nominální roční úrokovou mírou $0,10$?

   Spojité úročení probíhá podle vztahu

$$S = Pe^{jt},$$

   kde j je nominální úroková míra spojitého úročení a tedy $j = 0,10$. Pak

$$\frac{S}{P} = e^{\frac{j}{2}} = e^{\frac{0,10}{2}} = 1,052$$

3. **Úrok**
   Jak velký kapitál vzrostl na 300 000 za půl roku při spojitém úročení s efektivní roční úrokovou mírou $0,07$.

Spojité úročení probíhá podle vztahu

$$S = Pe^{jt},$$

kde j je nominální úroková míra spojitého úročení a platí

$$j = \ln(1 + i),$$

kde $i = 0,07$. Pak je

$$P = Se^{-\frac{\ln(1+i)}{2}} = 300000e^{-\frac{\ln(1,07)}{2}} = 290021$$

4. **Úrok**
   Jak velký kapitál vzrostl na 300 000 za půl roku při spojitém úročení s nominální roční úrokovou mírou $i = 0,10$.

   Spojité úročení probíhá podle vztahu $S = Pe^{jt}$, kde $t = \frac{1}{2}$ a j je nominální úroková míra spojitého úročení a $j = 0,10$. Pak $P = Se^{-\frac{j}{2}} = 289700$

5. **Úrok**
Najděte efektivní a nominální úrokovou míru spojitého úročení, při němž za půl roku vzroste kapitál ze 480 na 500. Pro nominální úrokovou míru spojitého úročení platí

$$S = P_0 e^{jt},$$

tedy

$$j = \frac{\ln \frac{S}{P}}{t} = \frac{\ln \frac{500}{480}}{\frac{1}{2}} = 0,081.$$

Protože je

$$j = ln(i+1),$$

lze psát

$$i = e^j - 1 = 0,085.$$

6. **Úrok**

Najděte efektivní a nominální úrokovou míru měsíčního úročení při němž za půl roku vzroste kapitál ze 480 na 500.

Pro nominální roční úrokovou míru měsíčního úročení platí

$$j = mi_{(m)} = 12i_{(12)}.$$

Dále pro efektivní úrokovou míru platí

$$S = P(1+i)^T = P(1+i_{(m)})^{mT}$$

Z první rovnice dostaneme

$$i = \left(\frac{S}{P}\right)^2 - 1 = 0,085$$

a pro $i_{(m)}$ platí

$$S = P(1+i_{(m)})^{12\frac{1}{2}},$$

tedy

$$i_{(m)} = \left(\frac{S}{P}\right)^{\frac{1}{6}} - 1 = 0,0068$$

odkud $j_{(m)} = 0,082$.

7. **Opce**
   Opce na koupi byla zakoupena za cenu, která by se ke dni splatnosti zúročila na 1 350, s prováděcí cenou 41 500. Jestliže při uplatnění opce je skutečná cena 43 300, činí zisk kupce opce $(43300 - 41500) - 1350 = 450$. Je-li skutečná cena 42 600, činí ztráta kupce opce $1350 - (42600 - 41500) = 250$.

8. **Opce**
   Opce na prodej s prováděcí cenou 320 000 byla koupena za cenu, která by se ke dni splatnosti zúročila na 22 400. Je-li

k datu uplatnění opce skutečná cena 295 000, je zisk kupce $(320000 - 295000) - 22400 = 2600$.

9. **Durace**
5-ti letá obligace s nominální hodnotu 100 000 a úrokovou sazbou byla zakoupena za 70 000 při emisi. Vypočtěte její duraci.

Víme, že pro cenu platí

$$P = \frac{c}{1+i^*} + \frac{c}{(1+i^*)^2} + \ldots + \frac{c+F}{(1+i^*)^5}$$

kde známe všechno, kromě i^*, musíme řešit metodou půlení intervalu a dostaneme $i^* = 0,2$. Pak durace je

$$D = \frac{\frac{10^4}{1{,}2} + 2\frac{10^4}{(1{,}2)^2} + \ldots + 5\frac{10^5+10^4}{(1{,}2)^5}}{\frac{10^4}{1{,}2} + \frac{10^4}{(1{,}2)^2} + \ldots + \frac{10^5+10^4}{(1{,}2)^5}} = 3,9925$$

10. **Důchody**

Kolik musíme koncem každého měsíce v kalendářním roce spořit, abychom měli koncem roku uložen kapitál K při spojitém úročení s nominální roční úrokovou míru $j = 10\%$

Víme, že částku C, kterou uložíme na konci i-tého měsíce se zúročí na

$$Ce^{j\frac{12-i}{12}},$$

kde $i \in \{1, 2, \ldots 12\}$, protože například poslední částka nebude úročena vůbec. Sečteme hodnoty jednotlivých částek na konci roku a to položíme rovno kapitálu. Pak platí

$$K = C \sum_{i=1}^{12} e^{0,10\,\frac{12-i}{12}}$$

$$C = \frac{K}{12,568}$$

Sečítání musíme provést numericky.

11. **Důchody**
Kolik budeme mít koncem kalednářního roku naspořeno při spojitém úročení s nominální roční úrokovou míru 7%, pokud na začátku každého měsíce vložíme 3000.

Každá částka se zúročí na $3000e^{\frac{13-i}{12}}$, kde $i \in \{1, 2, \dots 12\}$ protože i poslední částka se ještě měsíc bude úročit. Pak sečtením dostaneme 37 398, pokud bychom vkládali na konci měsíce, bude výsledná částka 37 179.

12. **Investice**
Najděte nejlépe diverzifikované portfolio z investic $[\delta_1, \bar{i}_1] = [1,1], [\delta_2, \bar{i}_2] = [3,2]$ s korelačním koeficientem $\varrho = 0$.

Máme najít minimum funkce

$$\delta = \sqrt{\vartheta^2\delta_1^2 + (1-\vartheta)^2\delta^2 + 2\vartheta(1-\vartheta)\delta_1\delta_2\varrho} =$$

$$= \sqrt{\vartheta^2\delta_1^2 + (1-\vartheta)^2\delta_2^2}$$

v intervalu $\vartheta \in < 0, 1 >$ Derivace je rovna

$$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{\vartheta^2\delta_1^2 + (1-\vartheta)^2\delta_2^2}} \cdot (2\vartheta\delta_1^2 - 2(1-\vartheta)\delta_2^2),$$

a tedy stacionární bod najdeme řešením rovnice

$$\vartheta\delta_1^2 = (1-\vartheta)\delta_2^2$$

to jest

$$\vartheta = \frac{\delta_2^2}{\delta_1^2+\delta_2^2} = \frac{9}{9+1} = 0,9$$

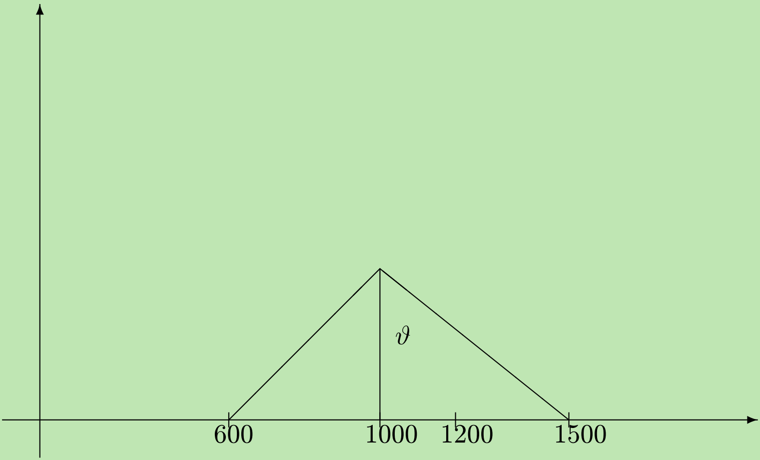
a odtud

$$i = \vartheta\bar{i}_1 + (1-\vartheta)\bar{i}_2 = 0,9\cdot 1 + 0,1\cdot 2 = 1,1$$

$$\delta = \sqrt{0,9^2\cdot 1 + 0,1^2\cdot 9} = \sqrt{0,9} \doteq 0,94$$

13. **Opce**

Jaká je cena opce na koupi akcie s prováděcí cenou 1000, jestliže rozložení pravděpodobnosti ceny akcie v době platnosti opce je odhadnuto frekvenční funkcí, jejíž grafem je trojúhelník se základnou 600,1500 a vrcholem ve 1200.


ϑ
600
1000
1200
1500

Nejprve vypočítáme výšku trojúhelníka ϑ

$$\frac{1}{2}\vartheta(1200-600)+\frac{1}{2}\vartheta(1500-1200)=1$$

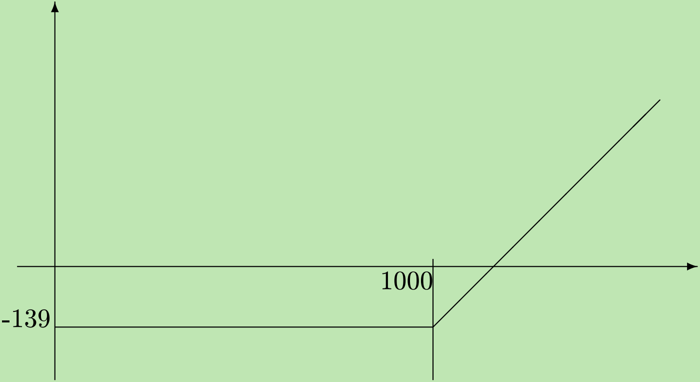
$$\vartheta=\frac{1}{450}$$

Cena opce v době platnosti je

$$\begin{aligned}
P &= \int_{1000}^{\infty}(s-1000)\varphi(s)ds = \\
&= \frac{\vartheta}{600}\int_{1000}^{1200}(s-1000)(s-600)ds + \\
&+ \frac{\vartheta}{300}\int_{1200}^{1500}(s-1000)(1500-s)ds = \\
&= \frac{10000\vartheta}{6}\int_0^2 t(t-4)dt + \frac{10000\vartheta}{3}\int_0^3 (t+2)(3-t)dt = \\
&= \frac{10000}{6\cdot 450}\left(\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 + 4\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^2\right) + \\
&+ \frac{10000}{3\cdot 450}\left(-\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^3 + \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^3 + 6[t]_0^3\right) =
\end{aligned}$$

$$= \quad \frac{10000}{6\cdot 450}\left(\frac{8}{3}+8\right)+\frac{10000}{3\cdot 450}\left(-9+\frac{9}{2}+18\right)=$$

$$= \quad \frac{1000\cdot 32}{6\cdot 450\cdot 3}+\frac{10000\cdot 27\cdot 3}{3\cdot 450\cdot 2\cdot 3}=\frac{1130000}{8100}=\frac{11300}{81}=139$$


1000
-139