

Hodnocení							Σ	

Jméno:

Na každý příklad získáte nezáporný počet bodů.

Minimum je 25 bodů.

Na práci máte 90 minut.

- (10krát ± 1 bod — správně 1 bod, chybně -1 , bez odpovědi 0)
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):
 - ano** — **ne** Mají-li dvě přirozená čísla stejnou poslední číslici, pak jejich desáté mocniny mají stejné dvě poslední číslice dekadického zápisu.
 - ano** — **ne** Mezi čísly 1 až 60 existuje $\varphi(\varphi(60)) = 8$ primitivních kořenů modulo 60.
 - ano** — **ne** Diofantická rovnice $x^3 + y^3 = 9$ nemá řešení v množině přirozených čísel.
 - ano** — **ne** Lineární kongruence $ax \equiv b \pmod{m}$, kde $a, b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, má vždy řešení modulo m , platí-li $a \mid b$.
 - ano** — **ne** Binomická kongruence $x^n \equiv a \pmod{p}$, kde $a, n \in \mathbb{N}$ a p je prvočíslo splňující $(n, p-1) = 1$, má jediné řešení modulo p .
 - ano** — **ne** Relace dělitelnosti je na množině přirozených čísel relací uspořádání.
 - ano** — **ne** Zobrazení $f : x \rightarrow x^3$ je bijekcí na libovolné redukované soustavě zbytků modulo 31.
 - ano** — **ne** Pro všechna lichá čísla n platí $\varphi(2n) = \varphi(n)$.
 - ano** — **ne** Je-li p prvočíslo, pak má libovolná polynomiální kongruence $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ nejvýše $\text{st}(f)$ řešení modulo m .
 - ano** — **ne** Je-li $n > 4$ složené, pak $n \mid (n-1)!$.
- (8 bodů) Určete počet řešení kongruence $x^2 \equiv 2541 \pmod{4673}$, víte-li, že 4673 je prvočíslo.
- (8 bodů) Pro číslo $n = 1080$ určete **počet** a **součet** jeho kladných dělitelů a rovněž počet přirozených čísel $x \leq n$, pro která $(x, n) = 1$.
- (8 bodů) Rozhodněte, pro která přirozená čísla n je číslo $2^{2^n} - 2^{n^2}$ dělitelné sedmi.
- (8 bodů) Dokažte nebo vyvraťte tvrzení: „pro každé prvočíslo $p \neq 5$ platí, že alespoň jedno z čísel $p^2 + 4$, $p^2 + 6$ není prvočíslo.“
- (8 bodů) Řešte diofantickou rovnici $7x^2 + 25y + 13 = 0$.