Algebra 2 3.6.2004

Jméno: ....

Hodnocení						$\sum$	

Na každý příklad získáte nezáporný počet bodů.
Minimum je 25 bodů.
Na práci máte 90 minut.

1. (10krát ± 1 bod — správně 1 bod, chybně -1, bez odpovědi 0)
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano** — **ne** Je-li m liché složené číslo, $a \in \mathbb{Z}$ takové, že $\left(\frac{a}{m}\right) = 1$, pak kongruence $x^2 \equiv a \pmod{m}$ je řešitelná.

(b) **ano** — **ne** Existuje nekonečně mnoho prvočísel tvaru $6k + 3$.

(c) **ano** — **ne** Je-li celé číslo g primitivním kořenem modulo $m \in \mathbb{N}$, pak je také primitivním kořenem modulo libovolné $d \in \mathbb{N}$, které je dělitelem m.

(d) **ano** — **ne** Lineární kongruence $ax \equiv b \pmod{m}$, kde $a, b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$, nemá řešení modulo m, je-li a záporné.

(e) **ano** — **ne** Relace dělitelnosti je na množině celých čísel reflexivní.

(f) **ano** — **ne** Diofantická rovnice $x^n + y^n = z^n$ s neznámými $x, y, z \in \mathbb{N}$ nemá pro parametr $n \in \mathbb{N}, n > 2$ žádné řešení.

(g) **ano** — **ne** Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $\varphi(2n) = \varphi(n)$.

(h) **ano** — **ne** Libovolná polynomiální kongruence $f(x) \equiv 0 \pmod{m}$, kde $m \in \mathbb{N}$, má nejvýše $\mathrm{st}(f)$ řešení modulo m.

(i) **ano** — **ne** Je-li n prvočíslo, pak $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$.

(j) **ano** — **ne** Binomická kongruence $x^n \equiv a \pmod{p}$, kde $a, n \in \mathbb{N}$ a p je prvočíslo splňující $(n, p) = 1$ má jediné řešení modulo p.

2. (8 bodů) V oboru přirozených čísel řešte rovnici:

$$2^{x^2+x-2} - 2^{x^2-4} = 992$$

3. (8 bodů) Když na Sokolském sletu vytvořili cvičenci sedmistupy, zbývali 4 navíc, při cvičení v kruzích o 11 lidech přebýval 1 a při tvorbě pyramid (na každou je potřeba 13 lidí), jich 7 jen přihlíželo. Kolik cvičenců se vystoupení zúčastnilo, když jich bylo určitě méně než 1000?

4. (8 bodů) Určete, pro která $n \in \mathbb{N}$ je číslo $5^n + 6^n$ dělitelné 31.

5. (8 bodů) Řešte kongruenci $x^3 + x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{43^2}$.

6. (8 bodů) Definujte pojem „prvočíslo“ a zformulujte další

(a) dostatečnou, ale ne nutnou

(b) nutnou, ale ne dostatečnou

(c) nutnou a dostatečnou

podmínku pro to, aby přirozené číslo bylo prvočíslem.