Své postupy i svá rozhodnutí zdůvodňujte!

1. (10 bodů) Pro těleso $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7})$ popište Galoisovu grupu $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$. Kolik má těleso K kvadratických podtěles, tj. podtěles L s vlastností $[L : \mathbb{Q}] = 2$?

2. (3 × 10 bodů) Jsou dány polynomy

   (a) $f_1 = x^3 + 2$;

   (b) $f_2 = x^4 - 4x^2 + 2$;

   (c) $f_3 = x^6 + 3$.

   Pro každé $i = 1, 2, 3$ popište rozkladové těleso K_i polynomu f_i, jeho Galoisovu grupu $\mathrm{Gal}(K_i/\mathbb{Q})$ a svaz všech podtěles tělesa K_i.

3. (10 bodů) Uvažme devadesáté první kruhové těleso $K = \mathbb{Q}(\zeta)$, kde $\zeta = \cos\frac{2\pi}{91} + i\sin\frac{2\pi}{91}$. Nechť $\alpha = \zeta + \zeta^{16} + \zeta^{74}$ a $\beta = \zeta + \zeta^9 + \zeta^{81}$.

   (a) Určete každý ze stupňů rozšíření $[K : \mathbb{Q}(\alpha)]$, $[K : \mathbb{Q}(\beta)]$, $[K : \mathbb{Q}(\alpha) \cap \mathbb{Q}(\beta)]$, $[K : \mathbb{Q}(\alpha, \beta)]$.

   (b) Rozhodněte, zda je Galoisova grupa $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}(\alpha) \cap \mathbb{Q}(\beta))$ komutativní.

   (c) Rozhodněte, zda je Galoisova grupa $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}(\alpha) \cap \mathbb{Q}(\beta))$ cyklická.

4. (10 bodů) Nechť $(G, \cdot)$ je Hausdorffovská topologická grupa, $H \subseteq G$ její podgrupa, přičemž H je komutativní.

   (a) Dokažte, že uzávěr $\overline{H}$ podgrupy H je také komutativní.

   (b) Rozhodněte, zda toto tvrzení platí i bez předpokladu Hausdorffovskosti.

5. (10 bodů) Nechť $K = \mathbb{F}_2(x)$ je těleso racionálních funkcí nad dvojprvkovým tělesem $\mathbb{F}_2$.

   (a) Dokažte, že pro libovolnou matici $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ existuje automorfismus $\sigma_A : K \to K$ splňující podmínku $\sigma_A(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$.

   (b) Dokažte, že $G = \{\sigma_A;\ A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)\}$ tvoří vzhledem ke skládání grupu, která je izomorfní s $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$.

   (c) Popište podtěleso $L \subseteq K$ takové, že K/L je konečné normální separabilní rozšíření s Galoisovou grupou G.

   (d) Nalezněte vhodné $\beta \in K$ tak, aby $L = \mathbb{F}_2(\beta)$.

   (e) Nakreslete svaz všech těles M, splňujících $L \subseteq M \subseteq K$, a vyznačte stupně rozšíření mezi každými zakreslenými tělesy, které jsou v inkluzi.

   (Pro výpočet stupňů rozšíření můžete při řešení užít větu: *Nechť F je těleso a t je transcendentní nad F. Nechť $f(t)$, $g(t)$ jsou nenulové nesoudělné polynomy z $F[t]$, z nichž je alespoň jeden nekonstantní. Pak platí* $\left[F(t) : F\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right)\right] = \max\{\deg f(t), \deg g(t)\}$.)

Své postupy i svá rozhodnutí zdůvodňujte!

1. (10 bodů) Nechť $n \geq 3$ je přirozené číslo. Nechť D_n značí grupu všech symetrií pravidelného n-úhelníka. Rozhodněte, zda je grupa D_n řešitelná.

2. (3 × 10 bodů) Jsou dány polynomy

   (a) $f_1 = x^4 + 1$;

   (b) $f_2 = x^4 + 5x^2 + 6$;

   (c) $f_3 = x^6 - 4$.

   Pro každé $i = 1, 2, 3$ popište rozkladové těleso K_i polynomu f_i, jeho Galoisovu grupu $\mathrm{Gal}(K_i/\mathbb{Q})$ a svaz všech podtěles tělesa K_i.

3. (10 bodů) Nechť $(G, \cdot)$ je topologická grupa, $H \subseteq G$ její podgrupa.

   (a) Dokažte, že je-li H otevřená, pak je H též uzavřená.

   (b) Udejte příklad topologické grupy $(G, \cdot)$ a její podgrupy H, která je uzavřená, ale není otevřená.

4. Nechť $K = \mathbb{Q}(\zeta)$, kde $\zeta = \cos\frac{2\pi}{63} + i\sin\frac{2\pi}{63}$, je šedesáté třetí kruhové těleso. Nechť $\alpha = \zeta + \zeta^8$ a $\beta = \zeta + \zeta^{-8}$.

   (a) Určete každý ze stupňů rozšíření $[K : \mathbb{Q}(\alpha)]$, $[K : \mathbb{Q}(\beta)]$, $[K : \mathbb{Q}(\alpha) \cap \mathbb{Q}(\beta)]$, $[K : \mathbb{Q}(\alpha, \beta)]$.

   (b) Rozhodněte, zda je těleso $\mathbb{Q}(\alpha) \cap \mathbb{Q}(\beta)$ reálné, tj. platí $\mathbb{Q}(\alpha) \cap \mathbb{Q}(\beta) \subseteq \mathbb{R}$.

Své postupy i svá rozhodnutí zdůvodňujte!

1. (10 bodů) Nechť H značí grupu všech symetrií pravidelného čtyřstěnu a G značí grupu všech symetrií krychle. Pro každou z grup G, H rozhodněte, zda je řešitelná.

2. (3 × 10 bodů) Jsou dány polynomy

   (a) $f_1 = x^4 + 1$;

   (b) $f_2 = x^4 + 7x^2 + 12$;

   (c) $f_3 = x^6 - 9$.

   Pro každé $i = 1, 2, 3$ popište rozkladové těleso K_i polynomu f_i nad $\mathbb{Q}$, jeho Galoisovu grupu $\mathrm{Gal}(K_i/\mathbb{Q})$ a svaz všech podtěles tělesa K_i.

3. (10 bodů) Nechť $(G, \cdot)$ je topologická grupa, $H \subseteq G$ její podgrupa.

   (a) Dokažte, že je-li H otevřená, pak je H též uzavřená.

   (b) Udejte příklad topologické grupy $(G, \cdot)$ a její podgrupy H, která není ani uzavřená ani otevřená.

   (c) Udejte příklad topologické grupy $(G, \cdot)$ a její podgrupy H, která je uzavřená, ale není otevřená.

   (d) Udejte příklad topologické grupy $(G, \cdot)$ a její podgrupy H, která je uzavřená a současně otevřená.

4. Nechť $K = \mathbb{Q}(\zeta)$, kde $\zeta = \cos \frac{2\pi}{63} + i \sin \frac{2\pi}{63}$, je šedesáté třetí kruhové těleso. Nechť $L_1, \ldots, L_s$ značí všechna (po dvou různá) podtělesa tělesa K, pro která $[K : L_i] = 2$ (pro každé $i = 1, \ldots, s$).

   (a) Určete počet s těchto těles.

   (b) Kolik z podtěles $L_1, \ldots, L_s$ je reálných, tj. pro kolik $i = 1, \ldots, s$ platí $L_i \subseteq \mathbb{R}$?

   (c) Pro každé $i = 1, \ldots, s$ určete minimální polynom čísla ζ nad tělesem L_i.

   (d) Pro každé $i = 1, \ldots, s$ nalezněte vhodné číslo α_i s vlastností $L_i = \mathbb{Q}(\alpha_i)$.

Své postupy i svá rozhodnutí zdůvodňujte!

1. (10 bodů) Nechť

   (a) $L_1 = \mathbb{F}_2$ (tj. těleso o 2 prvcích);

   (b) $L_2 = \mathbb{F}_3$ (tj. těleso o 3 prvcích);

   (c) $L_3 = \mathbb{F}_4$ (tj. těleso o 4 prvcích).

   Pro každé $i = 1, 2, 3$ nechť K_i je rozkladové těleso polynomu $x^3 + x + 1$ nad L_i. Určete, kolik prvků má $\mathrm{Gal}(K_i/L_i)$, a popište všechny prvky této Galoisovy grupy.

2. (10 bodů) Jsou dány polynomy

   (a) $f_1 = x^4 - 3x^2 + 2$;

   (b) $f_2 = x^6 - 4$.

   Pro každé $i = 1, 2$ popište rozkladové těleso K_i polynomu f_i nad $\mathbb{Q}$, jeho Galoisovu grupu $\mathrm{Gal}(K_i/\mathbb{Q})$ a svaz všech podtěles tělesa K_i.

3. (10 bodů) Uvažme následující topologii na množině $\mathbb{Z}$: množina $X \subseteq \mathbb{Z}$ je otevřená, právě když $0 \notin X$ nebo $\mathbb{Z} - X$ je konečná. Rozhodněte, zda vzhledem k této topologii tvoří $(\mathbb{Z}, +)$ topologickou grupu.

4. (10 bodů) Nechť $K = \mathbb{Q}(\zeta)$, kde $\zeta = \cos\frac{2\pi}{63} + i\sin\frac{2\pi}{63}$, je šedesáté třetí kruhové těleso. Nechť $L_1, \ldots, L_s$ značí všechna (po dvou různá) podtělesa tělesa K, pro která $[K : L_i] = 3$ (pro každé $i = 1, \ldots, s$).

   (a) Určete počet s těchto těles.

   (b) Kolik z podtěles $L_1, \ldots, L_s$ je reálných, tj. pro kolik $i = 1, \ldots, s$ platí $L_i \subseteq \mathbb{R}$?

   (c) Pro alespoň jedno $i \in \{1, \ldots, s\}$ určete minimální polynom čísla ζ nad tělesem L_i.

Své postupy i svá rozhodnutí zdůvodňujte!

1. (10 bodů) Popište rozkladové těleso K polynomu $f(x) = x^4 - 2x^2 - 2$ nad $\mathbb{Q}$, jeho Galoisovu grupu $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ a svaz všech podtěles tělesa K.

2. (10 bodů) Nalezněte minimální polynom $g(x)$ čísla $\gamma = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ nad $\mathbb{Q}$. Popište rozkladové těleso L polynomu $g(x)$ nad $\mathbb{Q}$, jeho Galoisovu grupu $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ a svaz všech podtěles tělesa L.

3. (10 bodů) Zvolte vhodně a napište explicitně nějaké konkrétní reálné číslo α a dokažte o něm, že $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ je cyklické rozšíření stupně 7 (cyklické rozšíření je Galoisovo rozšíření s cyklickou Galoisovou grupou).

4. (10 bodů) Uvažme následující dvě topologie na množině $\mathbb{R}$: pro množinu $X \subseteq \mathbb{R}$ platí $X \in T_1$, právě když je X prázdná nebo je sjednocením libovolného počtu polootevřených intervalů (zleva otevřených, zprava uzavřených), a platí pro ni $X \in T_2$, právě když $0 \notin X$ nebo $\mathbb{R} - X$ je konečná. Pro každou z těchto topologií rozhodněte, zda vzhledem k ní tvoří $(\mathbb{R}, +)$ topologickou grupu.

5. (16 bodů) Nechť K je 1729té kruhové těleso. Pro každou z následujících čtyř vlastností určete, kolik podtěles P tělesa K ji má a kolik z podtěles s touto vlastností je reálných (tj. je podtělesem $\mathbb{R}$).

   (a) $[K : P] = 2$.

   (b) $[K : P] = 3$.

   (c) $[P : \mathbb{Q}] = 2$.

   (d) $[P : \mathbb{Q}] = 3$.