

D) Odhady vektoru parametrů β pomocí metody nejmenších čtverců a metody maximální věrohodnosti jsou identické

$$[b_{OLS} = b_{ML}]$$

důkaz : Již jsme ukázali, že $b_{OLS} = (X'X)^{-1}X'y$.

Ukážeme, že odhad metodou maximální věrohodnosti, má stejný tvar :

Vyjdeme ze sdružení hustoty vektoru náhodných poruch, který má tvar :

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \cdot \sigma^n} \cdot \exp\left(-\frac{\varepsilon'\varepsilon}{2\sigma^2}\right) \quad \text{pro } \varepsilon \sim N(0; \sigma^2 I)$$

Věrohodnostní funkci, jejíž maximum hledáme, zapišeme ve tvaru

$$f^*(\beta, \sigma^2; y, X) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \cdot \sigma^n} \cdot \exp\left(-\frac{(y - X\beta)'(y - X\beta)}{2\sigma^2}\right)$$

Ekvivalentně minimalizujeme logaritmus $f^*(\beta, \sigma^2, y, X)$:

$$L(\beta, \sigma^2; y, X) = \log f^*(\beta, \sigma^2, y, X) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} (y - X\beta)'(y - X\beta)$$

Dále maximalizujeme $L(\beta, \sigma^2; y, X)$ vzhledem k β a σ^2 :

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = -\frac{1}{\sigma^2} (-X'y + X'X\beta) = 0 \quad (*)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} (y - X\beta)'(y - X\beta) = 0 \quad (**)$$

Zřejmě, řešením (*) dostaneme $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$,

řešením (**) potom získáme (po dosazení $b_{ML} = (X'X)^{-1}X'y$

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} (y - X(X'X)^{-1}X'y)'(y - X(X'X)^{-1}X'y) = 0 \quad / 2\sigma^2$$

$$-n + \frac{1}{\sigma^2} e'e = 0 \Rightarrow e'e = \sigma^2 n \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{e'e}{n}$$

tedy $\hat{\sigma}_{ML}^2 = \frac{n-k}{n} \hat{\sigma}_{OLS}^2 \leftarrow$ tzn. odhady σ^2 metodou OLS a metodou ML identické nejsou (oba jsou však asymptoticky nestranné (.....))