# Standardní (též klasický) lineární regresní model

**Specifikace=formulace** (jednorovnicového) **lineárního regresního modelu**

**(1)** $y = X\beta + \varepsilon$ **resp.** $y_t = \sum_{j=1}^{k} X_{tj}\beta_j + \varepsilon_t$ **, kde**

- $y$ **je T-členný (sloupcový) vektor pozorování závisle (vysvětlující ) proměnné (regresandu)**
- $X$ **je [ Txk ] matice pozorování k závisle proměnných (regresorů) – matice plánu**
- $\beta$ **je k-členný (sloupcový) vektor neznámých regresních koeficientů**
- $\varepsilon$ **je T-členný (sloupcový) vektor nepozorovatelných náhodných složek (disturbancí)**

**Ve strukturním vektorově- maticovém vyjádření**

**(1A)** $$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2k} \\ x_{31} & x_{32} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{T1} & x_{T2} & \dots & x_{Tk} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dots. \\ \varepsilon_T \end{pmatrix}$$

**Poznámka: Pokud je v rovnici zastoupena úrovňová konstanta** $\beta_1$**, pak k ní příslušný jedničkový vektor** $l = (1,1,\dots,1)'$ **bude obsažen prvním sloupci matice** $X$ **, tzn. že bude platit** $x_{t1} = 1$ **pro všechna** $t = 1,2,\dots,T$.

**Předpokládáme, že počet vysvětlujících proměnných je menší** (v krajním případě roven) **než počet pozorování, tedy , že platí nerovnost**

$$k < T$$

**Odhady parametrů nějakou vhodnou odhadovou metodou (např. metodou nejmenších čtverců)**

**(2)** $b = \hat{\beta}(y, X)$ **např.** $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}(X'y)$

**Definice vyrovnaných hodnot závisle proměnné**

**(3)** $\hat{y} = Xb$ $y_t = \sum_{j=1}^{k} X_{tj} b_j$

**Definice reziduí (odhadnutých náhodných složek)**

**(4)** $e = \hat{\varepsilon} = y - \hat{y}$ **neboli** $e = y' - \tilde{y}$

**odtud vyplývá možnost alternativního zápisu závisle proměnné**( s odhady parametrů a reziduy)

**(5)** $y = Xb + e$

## Některé další vztahy mezi veličinami lineárního regresního modelu

**Z porovnání (1) a (5) obdržíme vztah mezi $\varepsilon$ a $e = \hat{\varepsilon}$:**

**(6)** $$X\beta + \varepsilon = Xb + e$$ [1]

**( pokud použijeme odhad OLS, pak pravá strana** $= X\left(X'X\right)^{-1} X'y + e$ **),**
**z čehož dále plyne**

**(7)** $$e = y - Xb = y - X\left(X'X\right)^{-1} X'y = \left\lfloor I_T - X\left(X'X\right)^{-1} X' \right\rfloor y = My$$

**(8)** **neboli platí** $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = M\boldsymbol{y}$

**(9)**

$$e = y - Xb = X\beta + \varepsilon - Xb = X\beta + \varepsilon - X\left(X'X\right)^{-1} X'y = X\beta + \varepsilon - X\left(X'X\right)^{-1} X'\left[X\beta + \varepsilon\right] =$$

$$= X\beta + \varepsilon - X\beta - \left\lfloor X\left(X'X\right)^{\ 1} X' \right\rfloor \varepsilon = \left\lfloor I - X\left(X'X\right)^{\ 1} X' \right\rfloor \varepsilon = M\varepsilon$$

**(10)** **neboli platí** $e = M\varepsilon$

**Varovná poznámka:**

**Ze vztahů $e = My$ a $e = M\varepsilon$ nelze usuzovat, že platí $y = \varepsilon$, neboť $M$ je vždy singulární matice. Nelze proto nikdy psát $y = M^{-1}\ \varepsilon$ , resp. $e = M^{-1}\varepsilon$.**

**Hodnost matice** $M = I_T - X\left(X'X\right)^{-1} X' = T - k < T$

**protože** $h(I_T) = T \qquad h\left(X\left(X'X\right)^{-1} X'\right) = h\left(X'X\ \left(X'X\right)^{-1}\right) = k$

Na výše uvedené zjištění můžeme pohlížet také z toho hlediska, že k určení reziduí je pomocí matice $M$ „vytahována" stejná informace jako z vektoru závisle proměnné. Matice $M$ jakoby „odfiltruje" „přebytečnou" informaci (potřebnou pro určení $e$ ) nacházející se v $y$, ale nikoliv v $\varepsilon$.

**Poznámka:**
Centrovanost náhodných složek se přenáší na rezidua, která mají rovněž nulovou střední hodnotu, neboť

$$E(e) = E(M\varepsilon) = E\left(I_T - X(XX)^{-1} X'\right)\varepsilon = \left(I_T - X(XX)^{-1} X'\right)E(\varepsilon) = 0.$$

dle (10) nestochastičnost M centrovanost ε

[1] Na levé straně (6) máme dvě nepozorovatelné veličiny: *β,ε,* zatímco na pravé straně jsou jak odhadnuté parametry *b*, tak rezidua *e,* obojí určené z pozorovaných proměnných: Je ovšem třeba dodat, že výpočet *b* ( a následně i *e*) obecně závisí na užité odhadové metodě.U standardního lineárního modelu regresního i jiné odhadové metody vedou k témuž výrazu, avšak u složitějších modelů tomu ale tak nemusí být.

## Vlastnosti proměnných lineárního regresního modelu

### 1. Centrovanost náhodných složek

$E\,\varepsilon = 0$ **neboli** $E\,\varepsilon_t = 0$ **pro všechna** $t = 1,2,\ldots,T$

**nebude-li splněno, pak** střední hodnota náhodných složek (ani reziduí) nebude nulová a regresní přímka nepovede „středem“ oblasti pozorovaných hodnot, ale nad či pod ní (nepůjde o regresní přímku ve vlastním slova smyslu). Odchylky nebudou „nestranné“ a součet reziduí nebude roven 0.

### 2. Diagonalita kovarianční matice náhodných složek

$Var(\varepsilon) = Cov(\varepsilon,\varepsilon') = \sigma^2 . I_T$ **(diagonální matice se stopou** $T.\sigma^2$ **)**

**což v sobě obsahuje dvě vlastnosti, jimiž jsou**

**2a) homoskedasticita náhodných složek**

$var\,\varepsilon_t = \sigma^2$ **(rozptyl nezávislý na indexu pozorování)**

**nebude-li splněno,** pak budou mít náhodné složky v různých pozorováních různý rozptyl a metoda OLS ztratí svou vydatnost (byť odhady zůstanou nestranné). Nejde však o fatální problém a parametry budou odhadnutelné. Různost rozptylů náhodných složek v různých pozorováních se nazývá heteroskedasticita. Ta je odstranitelná nebo zmírnitelná některými speciálními postupy, např. použitím vážené metody nejmenších čtverců WLS.

**2b) nekorelovanost náhodných složek**

$Cov(\varepsilon_s,\varepsilon_t) = E(\varepsilon_s.\varepsilon_t) = \delta_{st}.\sigma^2$ **, kde** $\delta_{st} = 1$ **pro** $s = t$ **a také** $\delta_{st} = 0$ **pro** $s \neq t$

**nebude-li splněno,** pak budou náhodné složky v různých pozorováních vzájemně korelované a odhady parametrů nebudou vydatné (byť zůstanou nestranné). K zajištění optimálních vlastností bude nutno uplatnit zobecněnou metodu nejmenších čtverců GLS (pokud budou dodatečné informace o modelu) nebo problém zmírnit některou speciální technikou připouštějící autokorelaci náhodných složek.

### 3. Nekorelovanost náhodných složek s nezávisle proměnnými

$E(X'.\varepsilon) = 0$ **neboli** $E(x_{tj}.\varepsilon_t) = 0$ **pro všechna** $j = 1,2,\ldots,k$

**nebude-li splněno, pak** to znamená, že informace obsažená v náhodných složkách má něco společného s informací obsaženou v některé vysvětlované proměnné a že „náhodná složky“ má v sobě kousek (nebo kus) systematické informace. To je v rozporu s uvažovaným charakterem náhodné složky. Odhad parametrů nebude možno takto nijak statisticky získat (ani jinou metodou než OLS)

### 4. Plná hodnost matice vysvětlujících proměnných $h(X) = k$

**nebude-li splněno, pak** bude mít matice $X$ hodnost menší než $k$, což bude znamenat, že některé její sloupce budou lineárně závislé. Jinými slovy: informace obsažená ve sloupcích matice $X$, tedy v jednotlivých vysvětlujících proměnných není nezávislá a vzájemně se prolíná. Z algebraického hlediska to má ten následek, že matice $X'X$ bude singulární (její determinant bude nulový) a nebude k ní existovat (jednoznačně určená inverzní matice). Odhad parametrů (metodou OLS) takto nebude možné určit, resp. při použití pseudoinverze nebude odhad určen jednoznačně.

## (prostá,obyčejná) Metoda nejmenších čtverců (MNČ, OLS)

[ Ordinary least squares method ]

**Minimalizačním kritériem je** zde **součet čtverců reziduí (odhadnutých náhodných složek neboli rozdílů mezi pozorovanými a vyrovnanými hodnotami) :**

$$Min\, e'e = Min(y - Xb)'(y - Xb)$$ neboli v pozorovaných hodnotách

$$Min \sum_{t=1}^{T} e_t^2 = Min \sum_{t=1}^{T} (y_t - \hat{y}_t)^2 = Min \sum_{t=1}^{T} \left( y_t - \sum_{j=1}^{K} x_{tk} b_k \right)\left( y_t - \sum_{k=1}^{K} x_{tk} b_k \right)$$

**Polohu minima** (tj. bodu=odhadnutého vektoru parametrů $b$) **, ve kterém je minimalizovaný výraz nejmenší) nalezneme řešením soustavy tzv.normálních rovnic**

$$\frac{\partial e'e}{\partial b} = \frac{\partial (y - Xb)'(y - Xb)}{\partial b} = -2X'y + 2X'Xb = 0$$ **(vektorově)**

**tuto soustavu řešíme úpravami** (vydělením 2, přeskupením členů) **na tvar** $X'Xb = X'y$**, která má řešení pro** $b$ **ve tvaru** $b = (X'X)^{-1} X'y$ **,** $\leftarrow$ **řešení je jednoznačné, neboť vzhledem k předpokladům** $h(X) = k$**, existuje (jediná) inverzní matice k matici** $X'X$ **.**

**Poznámka** **Vyjádření minimalizace v pozorovaných hodnotách:**

$$H(y, X, b) = \sum_{t=1}^{T} \left( y_t - \sum_{i=1}^{K} x_{ti} b_i \right)\left( y_t - \sum_{j=1}^{K} x_{ti} b_i \right) = \sum_{t=1}^{T} y_t^2 - \sum_{t=1}^{T} y_t \left( \sum_{j=1}^{K} x_{ti} b_i \right) - \sum_{t=1}^{T} y_t \left( \sum_{i=1}^{K} x_{ti} b_i \right) +$$

$$+ \sum_{t=1}^{T} \left( \sum_{i=1}^{K} x_{ti} b_i \right)\left( \sum_{j=1}^{K} x_{ti} b_i \right)$$

$$\frac{\partial H(y, X, b)}{\partial b_j} = 0 - \underbrace{2 \sum_{t=1}^{T} x_{ti} y_t}_{-2X'y} + \underbrace{2 \sum_{t=1}^{T} x_{tj} \sum_{i=1}^{k} x_{ti} b_i}_{+2X'Xb} = 0 \quad \text{pro } j = 1, 2, \ldots, k \quad \text{a odtud}$$

$$\sum_{t=1}^{T} x_{tj} \sum_{i=1}^{k} x_{ti} b_i = \sum_{t=1}^{T} x_{ti} y_t \quad \text{neboli} \quad b_i = \left( \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{k} x_{ti} x_{tj} \right)^{-1} \sum_{t=1}^{T} x_{ti} y_t$$

V případě konečných sumací můžeme přeskupovat členy v součtech

**Příklad: Lineární regrese s jedinou vysvětlující proměnnou (+úrovňovou konstantou) (**$x_{t1} = 1$**)**

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & \sum x_{t2} \\ \sum x_{t2} & \sum x_{t2}^2 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} \sum y_t \\ \sum x_{t2} y_t \end{pmatrix} = \frac{1}{D} . \begin{pmatrix} \sum x_{t2}^2 & -\sum x_{t2} \\ -\sum x_{t2} & T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sum y_t \\ \sum x_{t2} y_t \end{pmatrix}$$, kde

$$D = \begin{vmatrix} T & \sum x_{t2} \\ \sum x_{t2} & \sum x_{t2}^2 \end{vmatrix} = T . \sum x_{t2}^2 - \left( \sum x_{t2} \right)^2 .$$ Odtud máme

$$\beta_1 = \frac{\left( \sum x_{t2}^2 \right) . \left( \sum y_t \right) - \left( \sum x_{t2} \right)\left( \sum x_{t2} y_t \right)}{T . \sum x_{t2}^2 - \left( \sum x_{t2} \right)^2} \qquad \beta_2 = \frac{T . \left( \sum x_{t2} y_t \right) - \left( \sum x_{t2} \right) . \left( \sum y_t \right)}{T . \sum x_{t2}^2 - \left( \sum x_{t2} \right)^2}$$

hodnota úrovňové konstanty — hodnota parametru sklonu regresní přímky

## Vlastnosti obyčejné (prosté) metody nejmenších čtverců MNČ (OLS) v klasickém lineárním regresním modelu

poskytuje odhad $_{OLS}\hat{\beta}$ regresních koeficientù $\beta$ ve tvaru $_{OLS}\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$

**Věta 1 (Gauss-Markovova) Odhad regresních koeficientů $_{OLS}\hat{\beta}$ pořízený obyčejnou ( prostou ) metodou nejmenších čtverců je nejlepším nestranným lineárním odhadem vektoru parametrů $\beta$**

**Důkaz** rozdělíme jej na několik částí.

**A. odhad $_{OLS}\beta^*$ je nestranný** (pro libovolnou velikost vzorku ***T*** ).

**Ověření nestrannosti:**

$$E(\hat{\beta}) = E(X'X)^{-1}X'y = \underbrace{E(X'X)^{-1}X'(X\beta+\varepsilon)}_{\text{vyjádření } y=X\beta+\varepsilon} = E(X'X)^{-1}X'X\beta + E(X'X)^{-1}X'\varepsilon =$$

$$= \underbrace{(X'X)^{-1}X'XE\beta}_{\text{nestochastičnost } X} + (X'X)^{-1}X'E\varepsilon = \underbrace{E\beta + (X'X)^{-1}X'0}_{E\varepsilon=0} = \underbrace{\beta + 0}_{E\beta=\beta \text{ ( } \beta \text{ nestochastický vektor )}} = \beta \qquad \square.$$

**Důsledek A** Nestranná odhadová funkce je vždy asymptoticky nestranná.

Platí-li totiž $E({}_{(T)}\hat{\beta}) = \beta$ [2] pro každé konečné $T$, platí tentýž vztah i pro $T \to \infty$.

**B. odhad $_{OLS}\hat{\beta}$ je konzistentní,** tj. platí $\underset{T\to\infty}{plim}\,\hat{\beta} = \beta$

Vlastnost platí i pro případ, že matice $X$ je stochastická.

**Ověření konzistence:** lze vyvodit z následujícího tvrzení

**Tvrzení Jestliže odhadová funkce je asymptoticky nestranná a kovarianční matice této odhadové funkce konverguje při *T* $\to \infty$ k nulové matici, pak je tato odhadová funkce konzistentní.**

**Důkaz a) asymptotická nestrannost OLS-odhadové funkce vyplývá z** *důsledku A***.**

**b) konvergenci kovarianční matice OLS-odhadové funkce** (její tvar viz ad D) **k nulové matici ukážeme následovně**

Dále ukážeme, že $Cov(\hat{\beta}) = \sigma_\varepsilon 2(X'X)^{-1}$. Definujme matici $P = (X'X)/T$ a její $ij-tý$ prvek označíme jako $P_{ij}$.[3] Pro tento prvek platí

$$\left|P_{ij}\right| = \left|\frac{1}{T}.\sum_{t=1}^{T} x_{ti}.x_{tj}\right| \le \xi_{ij}{}^{2}$$ , přičemž tato rovnost platí pro všechna $T$

---

[2] Symbolem nalevo rozumíme střední hodnotu odhadnutého vektoru parametrů β spočteného na základě T pozorování.

[3] Účelem je ukázat, že matice $P$ má prvky o konečné velikosti.

Všechny prvky této matice jsou tedy (v absolutní hodnotě) shora omezeny hodnotou $\xi^2 = \max \xi_{ij}^2$. Tedy, pro všechna $T$ má matice $P$ konečně velké prvky a je nesingulární. Zřejmě dále platí

$$(X'X)^{-1} = P^{-1}/T \quad \text{(neboť platí } X'X = T.P\text{)}$$

a navíc matice $P^{-1}$ má konečně velké prvky ($\pi_{ij}$) pro všechna $T$. Platí tedy

$$p\lim_{T\to\infty} Cov({}_{OLS}\hat{\beta}) = p\lim_{T\to\infty} \sigma_\varepsilon^2 (X'X)^{-1} = \sigma_\varepsilon^2\, p\lim_{T\to\infty} P^{-1}/T = 0_k,$$

kde $0_k$ je symetrická matice složená ze samých nul.

**C. odhad** ${}_{OLS}\hat{\beta}$ **je lineární** (vzhledem k vysvětlované proměnné $y$), neboť je definován jako lineární forma pozorování závisle proměnné $y$.

**Ověření linearity** lze psát $\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'y = C'y$, kde matice $C' = (X'X)^{-1} X'$ představuje koeficienty lineární formy, jejíž proměnné tvoří složky vektoru y. Poznamenejme, že vždy platí $C'X = (X'X)^{-1} X'X = I_k$, kde $I_k$ je jednotková matice řádu ***k***.

**D. kovarianční matice** příslušná odhadové funkci $\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'y$ má následující tvar

$$Cov(\hat{\beta}) = \sigma_\varepsilon.(X'X)^{-1}$$

**Ověření** $Cov(\hat{\beta}) = E\{[\hat{\beta} - E(\hat{\beta})][\hat{\beta} - E(\hat{\beta})]'\} \overset{\text{( nestrannost ^β)}}{=} E\{[\hat{\beta} - \beta][\hat{\beta} - \beta]'\} =$

( dosazení ^β= (X'X)$^{-1}$ Xy ) ( dosazení za y=Xβ+ε )

$$= E\{[(X'X)^{-1} X'y - \beta][(X'X)^{-1} X'y - \beta]'\} = E\{[(X'X)^{-1} X'(X\beta + \varepsilon) - \beta][(X'X)^{-1} X'(X$$

(X´X)$^{-1}$ X´X = I$_T$ ( vyrušení β )

$$E\{[\beta + (X'X)^{-1} X'\varepsilon - \beta][\beta + (X'X)^{-1} X'\varepsilon - \beta]'\} = E[(X'X)^{-1} X'\varepsilon][(X'X)^{-1} X'\varepsilon]' =$$

(transpozice) vytknutí nestoch..členů před E) Eε.ε' = $\sigma_\varepsilon^2 I_T$

$$= E[(X'X)^{-1} X'\varepsilon\varepsilon' X.(X'X)^{-1}] = (X'X)^{-1} X' E\varepsilon.\varepsilon' X.(X'X)^{-1} =$$

(vytknutí skaláru $\sigma_\varepsilon^2$ ) (X´X)$^{-1}$ X´X = I$_T$

$$= (X'X)^{-1} X' \sigma_\varepsilon^2 I_T X.(X'X)^{-1} = \sigma_\varepsilon^2 (X'X)^{-1} X'X.(X'X)^{-1} = \sigma_\varepsilon^2 (X'X)^{-1} \square.$$

Odtud plyne **důsledek D1.**
Směrodatné odchylky odhadnutých regresních parametrů $s_{\hat{\beta}}$ získáme jako

$$\sigma_{\beta_j} = \sigma_\varepsilon . \sqrt{\xi_{jj}^2} \quad \text{, kde}$$

$\xi_{jj}^2$ je j-tý diagonální prvek inverzní momentové matice $(X'X)^{-1}$

$\sigma_\varepsilon$ je směrodatná odchylka náhodných složek (stejná u všech $\varepsilon_t$ ).

**E. odhad** $_{OLS}\hat{\beta}$ **je nejlepší** ve smyslu minimální kovarianční matice $Cov(\hat{\beta})$, neboť pro kovarianční matici kterékoliv jiné (*lineární*) odhadové funkce $\tilde{\beta}$ platí :

$$Cov(\tilde{\beta}) - Cov(\hat{\beta}) = \Omega$$

kde $\Omega$ je nějaká symetrická pozitivně semidefinitní matice řádu $\boldsymbol{k}$ (rozměrů k x k).

**Ověření** Bez újmy na obecnosti můžeme matici $D'$ jiné lineární odhadové funkce

$\tilde{\beta} = D'y$ vyjádřit ve tvaru $D' = (X'X)^{-1}X' + G'$

**Poznámka** Vzhledem k požadavku na nestrannost $\tilde{\beta}$ musí s ohledem na platnost vztahu $D'X = (X'X)^{-1}X'X + G'X = I_k$, vždy platit $G'X = 0$.

**Ověření vydatnosti**

$$\beta = E(\tilde{\beta}) = E(D'y) = E\left[D'(X\beta + \varepsilon)\right] = ED'X\beta + ED'\varepsilon = D'X\beta + 0 = D'X\beta$$

[ matice D, X jsou nestochastické ]

z čehož přímo plyne $D'X = I_k$

Pro libovolnou jinou ( *lineární* a *nestrannou* ) odhadovou funkci tedy musí platit

$$Cov(\tilde{\beta}) = E\left\{\left[\tilde{\beta} - E\tilde{\beta}\right]\left[\tilde{\beta} - E\tilde{\beta}\right]'\right\} = E\left\{\left[D'y - \beta\right]\left[D'y - \beta\right]'\right\} =$$

$$= E\left\{\left[((X'X)^{-1}X' + G')y - \beta\right]\left[((X'X)^{-1}X' + G')y - \beta\right]'\right\} =$$

$$= E\left\{\left[((X'X)^{-1}X' + G')(X\beta + \varepsilon) - \beta\right]\left[((X'X)^{-1}X' + G')(X\beta + \varepsilon) - \beta\right]'\right\} =$$

[ protože G´X = 0 ] [ protože G´X = 0 ]

$$= E\left\{\left[(X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon + G'\varepsilon - \beta\right]\left[(X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon + G'\varepsilon - \beta\right]'\right\} =$$

[ protože $(X'X)^{-1}X'X = I$ ] [ protože $(X'X)^{-1}X'X = I$ ]

$$= E\left\{\left[\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon + G'\varepsilon - \beta\right]\left[\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon + G'\varepsilon - \beta\right]'\right\} =$$

$$= E\left\{\left[(X'X)^{-1}X'\varepsilon + G'\varepsilon\right]\left[(X'X)^{-1}X'\varepsilon + G'\varepsilon\right]'\right\} =$$

$$= E\left\{(X'X)^{-1}X'\varepsilon\varepsilon'X(X'X)^{-1} + G'\varepsilon\varepsilon'G + (X'X)^{-1}X'\varepsilon\varepsilon'G + G'\varepsilon\varepsilon'X(X'X)^{-1}\right\} =$$

[ po uplatnění operátoru střední hodnoty a protože X i G jsou nestochastické matice ]

$$= (X'X)^{-1}X'E\varepsilon\varepsilon'X(X'X)^{-1} + G'E\varepsilon\varepsilon'G + (X'X)^{-1}X'E\varepsilon\varepsilon'G + G'E\varepsilon\varepsilon'X(X'X)^{-1} =$$

[ protože $E\varepsilon'\varepsilon$-$\sigma^2 I_T$]

$$= (X'X)^{-1} X'\sigma^2 I_T X (X'X)^{-1} + G'\sigma^2 I_T G + (X'X)^{-1} X'\sigma^2 I_T G + G'\sigma^2 I_T X (X'X)^{-1} =$$

[ protože $\sigma^2$ je skalární hodnota ]

$$= \sigma^2 (X'X)^{-1} + \sigma^2 G'G + \sigma^2 (X'X)^{-1} X'G + \sigma^2 G' X (X'X)^{-1} =$$

[ protože G´X = 0 a stejně X´G= 0 ]

$$= \sigma^2 (X'X)^{-1} + \sigma^2 G'G = Cov(\hat{\beta}) + \sigma^2 G'G$$

kde $G'G$ je zřejmě pozitivně semidefinitní matice a $\sigma^2 > 0$ □.

**F. pro odhad rozptylu reziduí dostaneme**

$$E(e'e) = E(\varepsilon' M.M\varepsilon) = E(\varepsilon' M.\varepsilon) = Etr(\varepsilon' M.\varepsilon) = Etr(M\varepsilon\varepsilon') =$$

(M je idempotentní matice) (skalár je současně svou stopou) (tr A.B = tr B.A)

$$= trE(M\varepsilon\varepsilon') = tr(ME\varepsilon\varepsilon') = tr(M\sigma_\varepsilon^2 I_T) = \sigma_\varepsilon^2 tr(M) = \sigma_\varepsilon^2 (T-k)$$

(záměna stopy a střední hodnoty) (M je nestochastická) ($\sigma^2$ je skalární hodnota)

protože

$$tr(M) = tr(I_T - X(X'X)^{-1} X') = tr(I_T - X'X(X'X)^{-1}) = tr(I_T - I_K) = T - k$$

( definice M ) ( platí tr A.B = tr B.A ) (stopa jednotkové matice je rovna její dimenzi)

**G. z tvrzení F plyne, že nestranným odhadem rozptylu náhodných složek** $\sigma_\varepsilon^2$

je výraz $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \dfrac{eé}{T-k}$, neboť zřejmě platí $E\left[\dfrac{\sum e_t^2}{T-k}\right] = \sigma_\varepsilon^2$ .

**Poznámka:** Prostá metoda nejmenších čtverců není jedinou používanou odhadovou metodou v prostředí standardního lineárního regresního modelu. K dalším technikám patří:

**Metoda maximální věrohodnosti ML (M**aximum **L**ikelihood**) je založena na maximalizaci sdružené hustoty (tzv.věrohodnostní funkce) rozdělení náhodných složek. Lokalizuje se tedy poloha modusu pro** $\beta$ **a** $\sigma^2$ **, v němž tato funkce nabývá maxima.**

**Metoda nejmenších absolutních odchylek LAD (**Least Absolute Deviations**) je založena na minimalizačním kritériu tvaru**

$$\sum_{t=1}^{T} \left| y_t - \sum_{j=1}^{k} x_{tj}\beta_j \right|$$

**Odhady pořízené metodou LAD nelze vyjádřit v explicitním tvaru, ale je nutno použít iterační postup** (např. algoritmy R.L.Faira)

**Zobecněná momentová metoda GMM** (Generalized moment method).