

Modely s rozloženými zpožděními II

1) Koyckův model [Koyck L, M. 1954]

je (naopak) příkladem modelu s rozloženým zpožděním o nekonečné délce. Má-li být zachována možnost statisticky odhadnout parametry takovýchto modelů, musí být dáno nějaké pravidlo o souvislostech mezi nimi. V případě modelu navrženého Koyckem klesají váhy u jednotlivých vysvětlujících zpožděných proměnných podle schématu popsaného geometrickou posloupností.

Zapišeme-li základní rovnici modelu s nekonečně rozloženým zpožděním ve tvaru

$$(1.1) \quad Y_t = \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \dots + \beta_k X_{t-k} + \dots + \varepsilon_t$$

neboli ve zkráceném zápisu

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j X_{t-j} + \varepsilon_t$$

je ihned patrné, že takto obecně vyjádřený model nelze prakticky použít (nelze odhadnout nekonečný počet parametrů). Dle Koyckem navržené konkretizace přijímají parametry tuto apriorní váhovou strukturu :

$$(1.2) \quad \beta_j = \mathbf{b} \cdot \mathbf{w}_j \quad \mathbf{j} = 0, 1, 2, \dots$$

váhy/koefficienty \mathbf{w}_j jsou prvky geometrické posloupnosti

$$(1.2a) \quad \mathbf{w}_j = (1 - \mathbf{q}) \mathbf{q}^j \quad 0 < \mathbf{q} < 1$$

která je pro danou hodnotu kvocientu \mathbf{q} klesající.

Tímto způsobem lze převést původně nekonečný počet parametrů pouze na dva parametry \mathbf{b} a \mathbf{q} , přičemž v konečné podobě model nabude tvar

$$(1.3) \quad Y_t - \mathbf{q} \cdot Y_{t-1} = \mathbf{b}(1 - \mathbf{q}) X_t + (\varepsilon_t - \mathbf{q} \cdot \varepsilon_{t-1})$$

což lze upravit na

$$(1.4) \quad Y_t = \mathbf{q} \cdot Y_{t-1} + \mathbf{b}(1 - \mathbf{q}) X_t + \mathbf{v}_t$$

který je nazýván autoregresním tvarem modelu (nekonečného) rozloženého zpoždění. Všimněme si zde zejména dvou věcí :

a) do modelu se na pravou stranu dostala (jediná) zpožděná závisle proměnná (se zpožděním o 1 krok)

b) náhodné složky modelu $\mathbf{v}_t = (\varepsilon_t - \mathbf{q} \cdot \varepsilon_{t-1})$ již (bohužel) nebudou vzájemně nekorelované, a to ani tehdy, jestliže jsme předpokládali nekorelovanost původních náhodných složek ε_t . Příčinou toho je skutečnost, že „nová“ vysvětlující proměnná Y_{t-1} není nekorelovaná s náhodnými složkami \mathbf{v}_t .

$$\text{Platí totiž : } \mathbf{E}[Y_{t-1}(\varepsilon_t - \mathbf{q} \cdot \varepsilon_{t-1})] = \mathbf{E}[\varepsilon_{t-1}(\varepsilon_t - \mathbf{q} \cdot \varepsilon_{t-1})] = \mathbf{E}[\varepsilon_{t-1}\varepsilon_t] - \mathbf{E}[\varepsilon_{t-1}(\mathbf{q} \cdot \varepsilon_{t-1})] = -\mathbf{q}\sigma^2$$

kde σ^2 je rozptyl náhodných složek ε_t .

Oproti klasickému lineárnímu regresnímu modelu tedy zde zřejmě nejsou splněny dva předpoklady :

- a) vysvětlující proměnná Y_{t-1} není nekorelovaná s náhodnou složkou v_t
- b) vysvětlující proměnná Y_{t-1} není nestochastická (její součástí je náhodná složka ε_{t-1}), což je hned vidět, zapíšeme-li model se zpožděním o 1 krok.

Odhad parametrů Koyckovy rovnice (v autoregresním tvaru) je jinak technicky velmi jednoduchý – jde o regresní model se dvěma regresory bez jedničkového vektoru – snadno proveditelný metodou OLS, která však bude postrádat optimální vlastnosti (stejně jako např. odhad pomocí WLS).

Odhadnutými parametry budou q^* (přímý odhad q) a $c^* = b^*(1 - q^*)$ (odkud odhad b^* snadno určíme jako $b^* = c^*/(1 - q^*)$)

Z uvedených důvodů nemohou mít odhady parametrů (provedené obyčejnou metodou nejmenších čtverců) uspokojivé vlastnosti, nemusí být dokonce ani konzistentní. Literatura uvádí pro tuto a podobné situace některé speciální odhadové postupy (vedoucí ke konzistentním, případně i vydatným odhadům parametrů). Předpoklady o chování náhodných složek podmiňující nasazení těchto postupů jsou však obvykle málo realistické .

S ohledem na vlastnosti geometrického rozdělení přijatého v Koyckově modelu činí průměrná délka zpoždění hodnotu $q/(1 - q)$ a rozptyl $q/(1 - q)^2$.

Při $q = 1/3$ bude $EX = 1/3 : 2/3 = 1/2$

Při $q = 1/2$ bude $EX = 1/2 : 1/2 = 1$

Při $q = 2/3$ bude $EX = 2/3 : 1/3 = 2$

Interpretačně to znamená, že agregovaný účinek všech v modelu uvažovaných zpožděných vysvětlujících veličin (jichž je nekonečně mnoho) se projeví zhruba stejně jako jediná zpožděná vysvětlující proměnná, která bude mít zpoždění 0,5 roku resp. 1 rok, resp. 2 roky.

Následující trojice modelů s rozloženými zpožděními si vydobyla již tradiční postavení v ekonomických aplikacích. Jejich společným znakem je, že s určitými obměnami navazují na Koyckův model (geometricky rozloženého zpoždění).

Jmenovitě se jedná o :

2) Model částečného přizpůsobení [Nerlove M. 1958]

Základní rovnicí modelu je vztah představující hypotézu, že požadovaná (rovnovážná resp. optimální) úroveň vysvětlované proměnné (značené obvykle Y_t^* , která není měřitelná, je lineární funkcí vysvětlující nezávisle proměnné X_t (nezpožděné). Příslušná rovnice má tedy tvar

$$(2.1) \quad Y_t^* = y_0 + \beta_0 X_t + \varepsilon_t$$

přičemž skutečná změna závisle proměnné od období $t-1$ k období t tj. rozdíl $Y_t - Y_{t-1}$ je v důsledku procesu částečného přizpůsobení úměrná proporcionální změně $Y_t^* - Y_{t-1}$. Zapsáno relací

$$(2.2) \quad Y_t - Y_{t-1} = d(Y_t^* - Y_{t-1}) \quad 0 < d \leq 1$$

kde d je konstanta (míra reakce na žádanou změnu) nazývaná *koeficient adaptace/přizpůsobení*. Zřejmě, v případě $d = 1$ by šlo o úplné přizpůsobení.

Příkladem modelu typu (2.1) může být sledování vývoje vybavenosti domácností určitým předmětem dlouhodobé spotřeby. Pak hodnota Y_t^* může představovat "optimální úroveň vybavenosti", tedy aproximativně vyjádřenou, neměřitelnou veličinu. Za vysvětlující proměnnou X_t pak můžeme považovat úroveň příjmu této domácnosti. Je přitom realistické očekávat, že v libovolném čase t se hladina vybavenosti nepřizpůsobí změně příjmu ihned, takže optimální úroveň se nedosáhne ihned, ale až s určitým prodlením. Příčiny mohou být nejrůznější: nedocenění užitné hodnoty předmětu, neuvědomění spotřebitele přiměřené optimální úrovni, nedostatečná nabídka v sortimentu na trhu, setrvačnost v dosavadním spotřebním chování u domácností apod.

Rovnici (2.2) lze alternativně vyjádřit jako

$$(2.3) \quad Y_t = dY_t^* + (1-d)Y_{t-1}$$

což lze interpretovat tak, že dosažená úroveň vybavenosti statkem Y v čase t je váženým průměrem optimální úrovně vybavenosti v témže čase Y_t^* a úrovně skutečné vybavenosti v období $t-1$ tj. Y_{t-1} , váhy jsou použity v poměru d vůči $1-d$.

Dosadíme-li (2.1) do (2.3) dospěje se po jednoduché úpravě

$$Y_t - Y_{t-1} = d(y_0 + \beta_0 X_t + \varepsilon_t - Y_{t-1})$$

k autoregresnímu tvaru modelu částečného přizpůsobení

$$(2.4) \quad Y_t = dy_0 + d\beta_0 X_t + (1-d)Y_{t-1} + v_t \quad v_t = d \cdot \varepsilon_t$$

Jak patrně, formální zápis modelu (2.4) je v podstatě shodný se zápisem modelu Koyckova. Má však jednodušeji specifikovanou náhodnou složku.

Náhodné složky \mathbf{v}_t zde nejsou závislé na svých zpožděných hodnotách, tj. budou sériově nekorelované. Metoda OLS poskytne v takovém případě konzistentní odhady parametrů $[\mathbf{c}_1 = \mathbf{d} \cdot \mathbf{y}_0, \mathbf{c}_2 = \mathbf{d} \cdot \beta_0, \mathbf{c}_3 = (1 - \mathbf{d})]$, z nichž postupně snadno odvodíme hodnoty \mathbf{d} , β_0 a \mathbf{y}_0 . Rovněž další příznivé vlastnosti těchto odhadů (nestrannost, vydatnost) budou v tomto případě zajištěny.

Strukturu náhodných složek \mathbf{v}_t lze vyvodit ze vztahu 2.4). Opakovanými substitucemi (dosazováním za $\mathbf{Y}_{t-1}, \mathbf{Y}_{t-2}, \dots, \mathbf{Y}_{t-m}$ dostaneme

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{d} \cdot \varepsilon_t + (1 - \mathbf{d})\mathbf{d} \cdot \varepsilon_{t-1} + (1 - \mathbf{d})^2 \mathbf{d} \cdot \varepsilon_{t-2} + \dots = \mathbf{d} \sum_{j=0}^{\infty} (1 - \mathbf{d})^j \cdot \varepsilon_{t-j}$$

Ze statistického hlediska lze rozdíl mezi Koyckovým modelem a modelem částečného přizpůsobení spatřovat v tom, že struktura náhodných složek modelu částečného přizpůsobení je generována procesem *klouzavých součtů* (*moving average*) původní náhodné složky. V Koyckově modelu sledují náhodné složky autoregresní posloupnost.

3) Model adaptivních očekávání [Cagan P.1956]

Tento model je uveden regresní specifikací

$$(3.1) \quad \mathbf{Y}_t = \mathbf{y}_0 + \beta_0 \mathbf{X}_t^* + \varepsilon_t$$

a byl v původním uvedení spojen se spotřební funkcí tvaru

$$(3.1a) \quad \mathbf{C}_t = \mathbf{y}_0 + \beta_0 \mathbf{M}_t^* + \varepsilon_t$$

s významem veličin

\mathbf{C}_t objem spotřebních výdajů domácností

\mathbf{M}_t^* očekávaná výše důchodů/příjmů

ε_t náhodná složka s obvyklými vlastnostmi

Jde o formulaci konformní s *Friedmanovou hypotézou permanentního důchodu (HDP)*: spotřebitelé v čase, kdy realizují své nákupy, zpravidla ještě neznají skutečnou výši příjmů, které obdrží ve stejném období; své spotřební zvyklosti tedy řídí dle očekávaného důchodu \mathbf{M}_t^* , až na výjimky ne nutně totožného se skutečným \mathbf{M}_t .

Očekávanou výši permanentního důchodu však nelze určit pozorováním (tato proměnná je „latentní“), definujeme ji tedy nepřímou pomocí vztahu vyjadřujícího přizpůsobení důchodu :

$$(3.2) \quad \mathbf{X}_t^* - \mathbf{X}_{t-1}^* = \mathbf{g}(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_{t-1}^*) \quad 0 < \mathbf{g} \leq 1$$

neboli jinak zapsáno

$$(3.3) \quad X_t^* = gX_t + (1-g)X_{t-1}^*$$

Konstanta g se nazývá *koeficientem adaptivních očekávání*. Rovnici 3.3) lze interpretovat tak, že ekonomické subjekty přizpůsobují svá očekávání ve vztahu k X na základ zkušenosti z minulosti. Postupují přitom tak, že skutečnou hodnotu X (v kterémkoliv období t) porovnávají s hodnotou X^* , která byla očekávána. Přitom se řídí logickou úvahou

a) Je-li skutečná hodnota X_t oproti očekávané X_t^* větší, přizpůsobují svá očekávání stejným směrem (nahoru)

b) Je-li skutečná hodnota X_t oproti očekávané X_t^* menší, přizpůsobují svá očekávání také stejným směrem (dolů).

Čím je koeficient g blíže k 1, tím je větší míra přizpůsobení.

Ze zápisu 3.3) plyne, že očekávaná („permanentní“) výše důchodu je váženým průměrem skutečné hodnoty tohoto důchodu X_t a jeho očekávané úrovně X_{t-1}^* v předchozím období (váhy jsou g resp. $1-g$). Znamená to tedy, že

a) Při $g=1$, pak $X_t^* = X_t$, tzn. domácnosti se řídí skutečnou výší aktuálního důchodu

b) Pokud by $g=0$, pak $X_t^* = X_{t-1}^*$, tzn. domácnosti by se nepřizpůsobily vůbec (skutečnému důchodu není přisouzen žádný význam) a očekávání mají statický charakter (nemění se, zůstávají na úrovni očekávání z času $t-1$).

Dosažením ze vztahu 3.3) do 3.1) dostaneme

$$(3.4) \quad Y_t = y_0 + g\beta_0 X_t + \beta_0(1-g)X_{t-1}^* + \varepsilon_t$$

Jestliže nyní vyjádříme výchozí specifikaci modelu pro období $t-1$, tzn.

$$(3.4a) \quad Y_{t-1} = y_0 + g\beta_0 X_{t-1} + \beta_0(1-g)X_{t-2}^* + \varepsilon_{t-1}$$

a po jejím vynásobení hodnotou $1-g$ odečteme od 3.4), dospějeme k výsledné rovnici *autoregresního modelu adaptivních očekávání*

$$(3.5) \quad Y_t = \beta_0 g + \beta_1 g X_t + (1-g)Y_{t-1} + u_t$$

$$(3.5a) \quad u_t = \varepsilon_t - (1-g)\varepsilon_{t-1}$$

Jak patrně, formálně je model vyjádřen stejným zápisem jako má Koyckův model, dokonce shodným jaký má i model částečného přizpůsobení, avšak má jinou specifikaci náhodných složek a jinak jsou též interpretovány jeho parametry.

Poznámka Formální shoda všech dosud uvedených dynamických modelů zapsaných v autoregresním tvaru je dána tím, že všechny vycházejí ze stejného apriorního omezení časové struktury rozložených zpoždění, která je reprezentována geometricky klesajícími váhovými koeficienty.

Variantní specifikace modelu adaptivních očekávání

Spočívá v tom, že se na pravé straně vztahu **3.2)** použije místo X_t hodnota X_{t-1} . Obdrží se vztah

$$(3.6) \quad X_t^* - X_{t-1}^* = g(X_{t-1} - X_{t-1}^*) \quad 0 < g \leq 1$$

Podnětem pro tuto obměnu je skutečnost, že při specifikaci očekávání v běžném období t zpravidla ještě neznáme přesně X_t , ale pouze předchozí hodnotu X_{t-1} .

Kvantifikace parametrů takto upraveného modelu je spojena se stejnými problémy jako u Koyckova modelu, protože náhodné složky ut jsou opět sériově z Korelovány. Aplikovat metodu OLS přímo na takovýto model vede k nekonzistentním a vychýleným odhadům. Jedním z možných způsobů řešení je nasazení metody *instrumentálních proměnných (IV)*. Odhady nemusí být vydatné, ale budou aspoň konzistentní. Jinou možností je použití *nelineární metody nejmenších čtverců (NLLS)*.

Kombinací modelu částečného přizpůsobení a adaptivních očekávání lze dospět k obecnějšímu modelu (geometricky) rozloženého zpoždění. Modelovou hypotézu propojující regresním vztahem obě nepozorované proměnné Y_t^* a X_t^* zapíšeme jako

$$(3.7) \quad Y_t^* = c_0 + c_1 X_t^* + \varepsilon_t$$

K vyjádření obou přímo nepozorovatelných proměnných uijeme vztahy

$$(2.2) \quad Y_t - Y_{t-1} = d(Y_t^* - Y_{t-1}^*) \quad 0 < d \leq 1$$

z modelu částečného přizpůsobení resp.

$$(3.3) \quad X_t^* = gX_t + (1-g)X_{t-1}^* \quad 0 < g \leq 1$$

z modelu adaptivních očekávání.

Spojením **(3.7)**, **(2.2)** a **(3.3)** dostaneme kombinovaný model, který již neobsahuje přímo neměřitelné veličiny :

$$(3.8) \quad Y_t = c_0 dg + c_1 dg X_t + [(1-g) + (1-d)] Y_{t-1} - [(1-g)(1-d)] Y_{t-2} + [d\varepsilon_t + d(1-g)\varepsilon_{t-1}] \quad \text{neboli jinak zapsaný}$$

$$(3.9) \quad Y_t = a_0 + a_1 X_t + a_2 Y_{t-1} + a_3 Y_{t-2} + \eta_t$$

Tento model je lineární v parametrech a_0, a_1, a_2, a_3 ale nelineární v původních parametrech c_0, c_1, d, g . Regresní rovnice **3.9)** popisuje závislost Y_t na X_t, Y_{t-1} a Y_{t-2} . Jednoznačně však nelze určit odhady d a g , protože odhadnout lze vždy jen kombinace těchto parametrů (vyskytují se symetricky). Model není v těchto parametrech identifikován. Odhady parametrů c_0, c_1 oproti tomu nečiní problém.

Náhodná složka je generována procesem MA(1), tedy procesem klouzavých součtů/průměrů 1. řádu.

4) Model racionálních očekávání [Jorgenson D.W. 1966]

Empiricky bylo zjištěno, že „mechanický přístup“ k formulaci budoucích očekávání (na základě hypotézy adaptivních očekávání) vede k předpovědím, které jsou obvykle zatíženy systematickou chybou (nadhodnocováním nebo podhodnocováním).

Uvedené obtíže do určité míry překonává hypotéza obsažená v modelu *racionálních očekávání*. Obecný podtext tohoto modelu je spojen s úvahou, že ekonomické subjekty (domácnosti, firmy) tvoří svá individuální očekávání tak, že využívají veškeré jim dostupné, podstatné a účelné informace, v důsledku čehož jejich budoucí chování bude vycházet z obecně platných postulátů ekonomické teorie, disponibilních informací o tvaru modelových vztahů a dat spolehlivé datové základny.

Součástí těchto podstatných informací je též znalost cílů hospodářské politiky vlády. Změny vládní makroekonomické politiky se projeví na změnách individuálních očekávání, a protože existuje zpětná vazba mezi očekáváním ekonomických subjektů a jejich následným chováním přestává být ekonometrický model adekvátním prostředkem popisu chování reálného ekonomického systému (národní ekonomiky). To má dopad jednak na zhoršení predikční schopnosti modelu, ale i na užitečnost jeho použití při posouzení odezev chování ekonomických subjektů na změny vládní hospodářské politiky. Jinými slovy, pokud do modelu nezahrneme též informaci týkající se změn ekonomické politiky, a zamýšlených dopadů do procesu formování subjektivních očekávání, bude to mít za důsledek neracionální chování ekonomických subjektů.

Pro formální vyložení použijme zjednodušené schéma

$$(4.1) \quad X_t = p_0 + p_1 Z_{t-1} + p_2 Z_{t-2} + w_t$$

X_t je vysvětlovaná endogenní proměnná

X_{t-1} je zpožděná exogenní proměnná

w_t je náhodná složka s obvyklými vlastnostmi

Podstata rozhodování spočívá mj, v tom, že v období $t-1$ ekonomický subjekt odhaduje očekávanou hodnotu X_t^* , která se značí $E_{t-1}(X_t)$ na základě vztahu

$$(4.2) \quad E_{t-1}(X_t) = X_t = p_0 + p_1 Z_{t-1} + p_2 Z_{t-2} = X_t^*$$

takže subjektivní očekávání $E_{t-1}(X_t)$ je skutečně shodné s objektivní předpovědí proměnné X pro běžné období získanou modelem (4.1) na základě informací dostupných v předchozího období $t-1$. Vlastnost racionality zde spočívá v tom, že takto formované očekávání či předpovědi není zatíženo systematickou chybou.

Chyba předpovědi je zde dána rozdílem

$$(4.3) \quad X_t - X_t^* = w_t$$

Náhodná složka w_t není zkorelována s X_t^* . Abychom se vyhnuli vzniku systematických chyb v procesu generování očekávaných hodnot proměnné X , musí mít chyba předpovědi nulovou střední hodnotu a nesmí být korelována se svými předchozími hodnotami. Nesmí navíc existovat ani systematický vztah mezi X_t^* a libovolnými proměnnými, jichž se týká disponibilní informace z období $t-1$. Jinými slovy: chyba předpovědi nesmí být predikovatelná.

V ekonometrické analýze se často hypotéza racionálních čekání užívá jako alternativa k hypotéze adaptivních očekávání. Uvažujeme-li závislost spotřeby C_t na očekávaném/permanentním důchodu M_t^* v podobě 3.1), můžeme přizpůsobovací proces adaptivních očekávání nahradit vztahem pro racionální očekávání: dosazením $E_{t-1}(M_t)$ za M_t^* dostaneme vztah

$$(4.4) \quad C_t = y_0 + \beta_0 E_{t-1}(M_t) + \varepsilon_t$$

Racionální očekávání $E_{t-1}(M_t)$ však není měřitelné, proto postup při odhadu parametrů modelu 4.2) spočívá zpravidla ve vylučování znamenajících očekávání z modelu a v následném odhadu ekvivalentního modelu, který obsahuje jen pozorovatelné veličiny. Taková eliminace je jednoduchá, pokud jde o lineární model obsahující jen očekávání běžných hodnot vysvětlovaných proměnných (ne hodnot budoucích).

Postup, který uplatnil *McCallum [1976]* je dvoustupňový a je obdobou *techniky instrumentálních proměnných* (nejprve se nahradí $E_{t-1}(M_t)$ ze vztahu 4.1) metodu OLS přibližnou hodnotou $E_{t-1}^*(M_t)$, kterou představuje odhad M_t^* . V dalším kroku po nahrazení $E_{t-1}^*(M_t)$ vyrovnanou hodnotou M_t^* se již dospěje pomocí OLS k odhadům obou parametrů y_0, β_0 .

Z aplikačních oblastí pro modely racionálních očekávání jsou především modely inflačních očekávání, zaměstnanosti, poptávky po penězích apod.

Z posledních prací se testování této hypotéza zabývají např. *M.C.Lovell [1986]*, *S. Figlewski a P. Wachtel [1981]*, *B.M. Friedman[1980]*, *J.E. Pesando[1975]*.

Model racionálních očekávání formuloval D.W.Jorgenson v obecné podobě

$$(4.5) \quad \begin{aligned} a_0 Y_t + a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} + \dots + a_r Y_{t-r} = \\ = b_0 X_t + b_1 X_{t-1} + b_2 X_{t-2} + \dots + b_s X_{t-s} + \varepsilon_t \end{aligned}$$

Opět se zde střetáváme s problémem odhadu parametrů. I když budou náhodné složky ε_t rozděleny nezávisle, náhodné složky v_t , kde

$$(4.6) \quad v_t = \varepsilon_t - a_1 \varepsilon_{t-1}$$

budou sériově zkorelovány, což má opět nepříznivý dopad na vlastnosti výsledných odhadů parametrů (srovnatelně s Koyckovým modelem). Vztah 4.6) pro náhodné složky představuje autoregresní schéma 1. řádu.

Poznámka Model přechází při omezení hloubky zpoždění na $r=1$, $s=0$ v Koyckův model (pokud v něm vynecháme úrovnovou konstantu).