

Hamiltonův operátor (nabla) v kartézských souřadnicích:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$f(\vec{r})$ - skalární pole (skalární veličina závislá na polohovém vektoru $\vec{r} = (x, y, z)$)

$\vec{F}(\vec{r})$ - vektorové pole

Gradient

$$\text{grad } f \equiv \vec{\nabla} \cdot f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

- Gradient (derivace funkce f) má směr nejprudšího růstu funkce f . Skalární součin $\vec{n} \cdot \vec{\nabla} f$ (kde $|\vec{n}| = 1$) má význam derivace f ve směru \vec{n} .

Divergence

$$\text{div } \vec{F} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

- Příklad: Necht' $\vec{F}(\vec{r})$ je hustota toku kapaliny. Kolik kapaliny vyteče za jednotku času z nekonečně malého kvádru se stranami dx, dy, dz (tj. jak vydatným zdrojem kapaliny je tento kvádrík)?

Oběma plochami rovnoběžnými s rovinou yz vyteče dohromady

$$dy \cdot dz \cdot (F_x(x + dx) - F_x(x)) = dy \cdot dz \cdot dx \frac{\partial F_x}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial x} dV$$

Analogické množství kapaliny vyteče ostatními čtyřmi plochami. Celková hmotnost vyteklé kapaliny (za jednotku času):

$$\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) dV = \text{div } \vec{F} dV$$

- $\text{div } \vec{F} = 0$ - bezzřídlové pole (např. magnetická indukce)
 $\text{div } \vec{F} > 0$ - „zřídlo“ (např. gravitační pole v místě hmotného bodu, el. pole v místě kladného náboje)
 $\text{div } \vec{F} < 0$ - např. elektrické pole v místě záporného náboje

- Gaussova-Ostrogradského věta:

$$\oint_S \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div } \vec{F}(\vec{r}) dV$$

Rotace

$$\text{rot } \vec{F} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

- Příklad: Pro rychlost hmotného elementu rotujícího tuhého tělesa platí $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.
 $\text{rot } \vec{v} = \text{rot}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \text{rot}(\omega_2 r_3 - \omega_3 r_2, \omega_3 r_1 - \omega_1 r_3, \omega_1 r_2 - \omega_2 r_1) = (2\omega_1, 2\omega_2, 2\omega_3)$, tj. $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v}$

- Stokesova věta:

$$\oint_l \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$$

- Platí:

$$\begin{aligned} \text{rot grad } f &= 0 \\ \text{div rot } \vec{F} &= 0 \end{aligned}$$

Laplaceův operátor

$$\begin{aligned}\Delta &\equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \Delta f &= \operatorname{div} \operatorname{grad} f \\ \Delta \vec{F} &= (\Delta F_x, \Delta F_y, \Delta F_z)\end{aligned}$$

- Platí:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{F} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{F} - \Delta \vec{F}$$

- Laplacián v některých typech krivočarých souřadnic:

$$\begin{aligned}\text{Polární:} \quad \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \\ \text{Cylindrické:} \quad \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \text{Sférické:} \quad \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cotg \vartheta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\end{aligned}$$

Kmenová funkce

Kdy k zadané funkci $\vec{F}(\vec{r})$ existuje fce $f(\vec{r})$ taková, že $\vec{F} = \operatorname{grad} f$? (f se nazývá kmenová funkce.)

Protože $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, musí platit $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$. Analogické vztahy získáme pro ostatní kombinace souřadnic a 3 získané podmínky můžeme zapsat rovnicí

$$\operatorname{rot} \vec{F} = 0,$$

která je nutnou a postačující podmínkou pro existenci kmenové funkce.

V tom případě platí pro libovolnou křivku C , která začíná v bodě \vec{r}_1 a končí v bodě \vec{r}_2

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}_2) - f(\vec{r}_1)$$