

F4110
Fyzika atomárních soustav
letní semestr 2005 - 2006

II.
Tepelné fluktuace: Brownův pohyb

KOTLÁŘSKÁ 23. ÚNORA 2006

Úvodem

- Dnes: Důležitá otázka bez Planckovy konstanty
- Přímé pozorování molekulárního chaosu
- Jedna třetina toho Einsteinova zázračného roku
- Odvoláme se na kinetickou teorii ideálního plynu a zobecníme trochu
- Ne jen rovnovážné vlastnosti, ale také jejich fluktuace a stochastická dynamika

Makrosvět, mesosvět, mikrosvět

Na přelomu 19. a 20 století bylo ještě běžné
mluvit o „atomové hypotéze“

Atomy a molekuly platily za nepozorovatelné.

Teprve začátkem 20. století bylo toto cliché
prolomeno několika experimenty s
mesoskopickými objekty.

Ty vedly k Nobelovým cenám.

Prostředník -- mesoskopický objekt

Základní myšlenka:

prostředník -- mesoskopický objekt může zároveň vykazovat

- některé vlastnosti společné s makrosvětem, být pozorován a ovlivňován
- některé vlastnosti společné s mikrosvětem, na které tím dosáhneme



Dva případy použití

1. R. Millikan měřil elementární náboj na kapičkách oleje vzášejících se ve vzduchu. Elektrická síla a gravitační síla na kapičku byly srovnatelné

$$\text{mikro } eE \square mg \text{ makro}$$

2. J. Perrin měřil Avogadrovu konstantu: pozoroval koloidní suspence. Koloidní částice byly viditelné mikroskopem, ale podléhaly vlivu molekulárního chaosu.
 - Barometrická formule
 - Brownův pohyb 2D

Myšlenka byla ale Einsteinova

Barometrická formule

Klíčová myšlenka: částice koloidu jsou dost malé na to, aby v tepelné rovnováze s matečnou kapalinou tvořily „plyn“ (... malá koncentrace) a řídily se Boltzmannovým rozdělením pro plyny ve vnějším poli

$$w(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \propto e^{-\left(\frac{1}{2}mv^2 + U(\mathbf{r})\right)/k_B T}$$

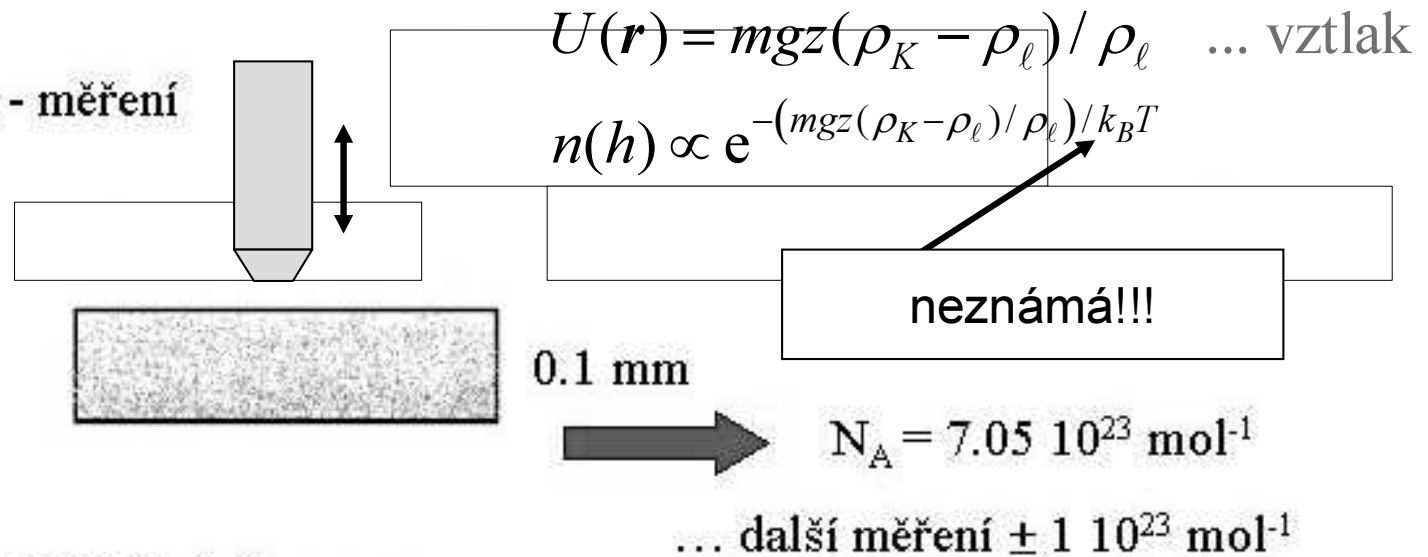
$$R = k_B \cdot N_A$$

Pro koloidní částice (gumiguty) v kapalině a poli tíže

1908 Perrin - měření



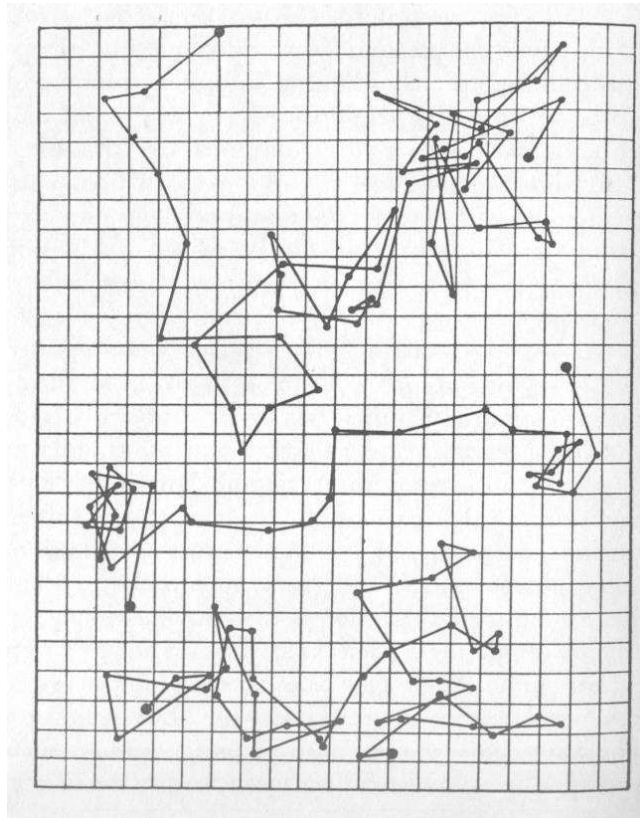
Jean Baptiste Perrin
(1870-1942)



1926 Nobelova cena

Brownův pohyb

Známé obrázky pocházejí také až od Perrina



Polohy částic
zaznamenány vždy po
30 sec.

Spojnice jsou jen vodítko
pro oko

Robert Brown (1773 – 1858)



A
BRIEF ACCOUNT
OF
MICROSCOPICAL OBSERVATIONS

Made in the Months of June, July, and August, 1827,

ON THE PARTICLES CONTAINED IN THE
POLLEN OF PLANTS;

AND

ON THE GENERAL EXISTENCE OF ACTIVE
MOLECULES

IN ORGANIC AND INORGANIC BODIES.

BY

ROBERT BROWN,

F.R.S., HON. M.R.S.E. AND R.I. ACAD., V.P.L.S.,

MEMBER OF THE ROYAL ACADEMY OF SCIENCES OF SWEDEN, OF THE ROYAL
SOCIETY OF DENMARK, AND OF THE IMPERIAL ACADEMY NATURE
CURIOSORUM, CORRESPONDING MEMBER OF THE ROYAL
← INSTITUTE OF FRANCE AND OF THE NETHERLANDS,

A
BRIEF ACCOUNT
OF
MICROSCOPICAL OBSERVATIONS

Made in the Months of June, July, and August, 1827,

ON THE PARTICLES CONTAINED **IN** THE
POLLEN OF PLANTS;

AND

ON THE GENERAL EXISTENCE OF ACTIVE
MOLECULES

IN ORGANIC AND INORGANIC BODIES.

BY

ROBERT BROWN,

F.R.S., HON. M.R.S.E. AND R.I. ACAD., V.P.L.S.,

MEMBER OF THE ROYAL ACADEMY OF SCIENCES OF SWEDEN, OF THE ROYAL
SOCIETY OF DENMARK, AND OF THE IMPERIAL ACADEMY NATURÆ
CURIOSORUM; CORRESPONDING MEMBER OF THE ROYAL
← INSTITUTE OF FRANCE → AND OF THE NETHERLANDS,

A
BRIEF ACCOUNT
OF
MICROSCOPICAL OBSERVATIONS

Made in the Months of June, July, and August, 1827,

ON THE PARTICLES CONTAINED **IN** THE
POLLEN OF PLANTS;

$\frac{1}{4000}$ th to about $\frac{1}{5000}$ th of an inch in
size between cylindrical and oblong,

AND

This plant was *Clarckia pulchella*,

ON THE GENERAL EXISTENCE OF ACTIVE
MOLECULES

IN ORGANIC AND INORGANIC BODIES.

the various animal and vegetable tissues,
whether living or dead,

Molecules were found in abundance.

the dust or soot deposited on all
bodies in such quantity, especially
in London, is entirely
composed of these molecules.

Rocks of all ages, including those in which organic
remains have never been found, yielded the molecules in
abundance.

fragment of the Sphinx

travertine, stalactites, lava, obsidian,
pumice, volcanic ashes, and meteorites from various locali-
ties.¹ Of metals I may mention manganese, nickel, plum-
bago, bismuth, antimony, and arsenic.

Einsteinův rok: od Boltzmannova k Einsteinovi

5.
de

kin
Kö
kul
aus
Mil
die
„B
err
daß

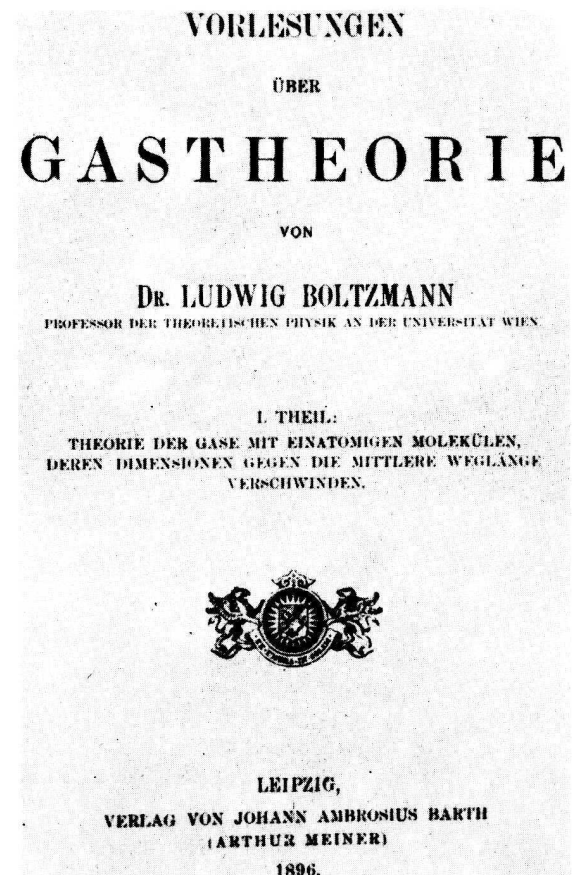
für
läß
sko
anz
Ato
die
wie
der



orie
den

ular-
ierte
Mole-
größe
dem
daß
nten
mir
nau,

den
hten
kro-
tlig
hren
sage
wer-
sung



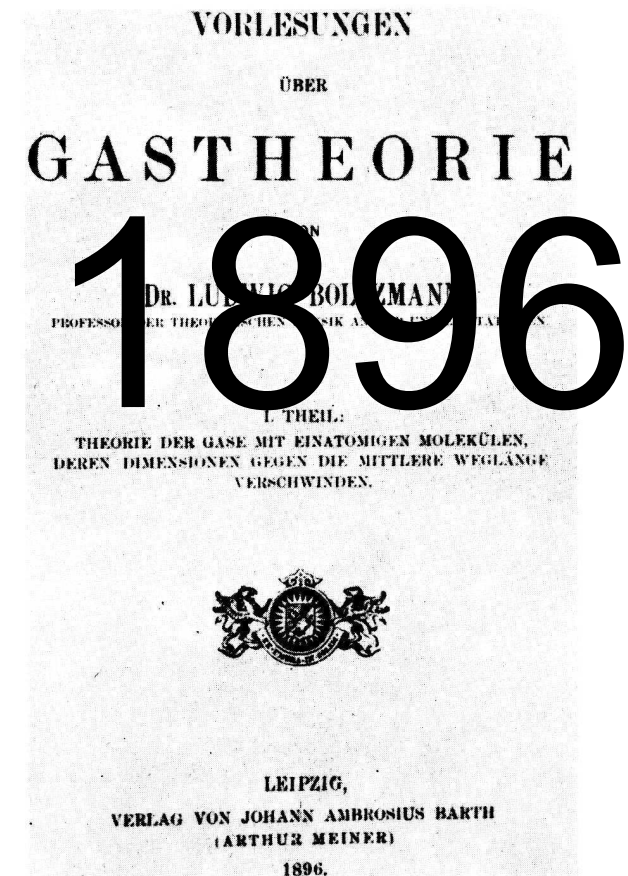
Ann. Phys.

Einsteinův rok; od Boltzmannova k Einsteinovi

5. Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen; von A. Einstein.

In dieser Arbeit soll gezeigt werden, daß nach der molekularkinetischen Theorie der Wärme in Flüssigkeiten suspendierte Körper von mikroskopisch sichtbarer Größe infolge der Molekularbewegung der Wärme Bewegungen von solcher Größe ausführen müssen, daß diese Bewegungen leicht mit dem Mikroskop nachgewiesen werden können. Es ist möglich, daß die hier zu behandelnden Bewegungen mit der sogenannten „Brownschen Molekularbewegung“ identisch sind; die mir erreichbaren Angaben über letztere sind jedoch so ungenau, daß ich mir hierüber kein Urteil bilden konnte.

Wenn sich die hier zu behandelnde Bewegung samt den für sie zu erwartenden Gesetzmäßigkeiten wirklich beobachten läßt, so ist die klassische Thermodynamik schon für mikroskopisch unterscheidbare Räume nicht mehr als genau gültig anzusehen und es ist dann eine exakte Bestimmung der wahren Atomgröße möglich. Erwies sich umgekehrt die Voraussage dieser Bewegung als unzutreffend, so wäre damit ein schwerwiegendes Argument gegen die molekularkinetische Auffassung der Wärme gegeben.



Ann. Phys.

Einsteinův rok: od Boltzmannova k Einsteinovi

5. Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen; von A. Einstein.

In dieser Arbeit soll gezeigt werden, daß nach der molekularkinetischen Theorie der Wärme in Flüssigkeiten suspendierte Körper von mikroskopisch sichtbarer Größe infolge der Molekularbewegung der Wärme Bewegungen von solcher Größe ausführen müssen, daß diese Bewegungen leicht mit dem Mikroskop nachgewiesen werden können. Es ist möglich, daß die hier zu behandelnden Bewegungen mit der sogenannten „Brownschen Molekularbewegung“ identisch sind; die mir erreichbaren Angaben über letztere sind jedoch so ungenau, daß ich mir hierüber kein Urteil bilden konnte.

Wenn sich die hier zu behandelnde Bewegung samt den für sie zu erwartenden Gesetzmäßigkeiten wirklich beobachten läßt, so ist die klassische Thermodynamik schon für mikroskopisch unterscheidbare Räume nicht mehr als genau gültig anzusehen und es ist dann eine exakte Bestimmung der wahren Atomgröße möglich. Erwies sich umgekehrt die Voraussage dieser Bewegung als unzutreffend, so wäre damit ein schwerwiegendes Argument gegen die molekularkinetische Auffassung der Wärme gegeben.

1896

GASTHEORIE

- molekulární chaos i v ideálním plynu
- teplota ~ kinet. energie molekul
- nevrátnost ... růst entropie

PROBLÉMY

- Umkehrreinwand
Loschmidt
- Wiederkehrreinwand
Zermelo Poincaré
- Neuvážil Brownův pohyb



Ann. Phys.

Einsteinův rok: od Boltzmannova k Einsteinovi

5. Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen; von A. Einstein.

In dieser Arbeit soll gezeigt werden, daß nach der molekularkinetischen Theorie der Wärme in Flüssigkeiten suspendierte Körper von mikroskopisch sichtbarer Größe infolge der Molekularbewegung der Wärmebewegung von solcher Größe ausführen müssen, daß diese Bewegungen leicht mit dem Mikroskop nachgewiesen werden können. Es ist möglich, daß die hier zu behandelnden Bewegungen mit der sogenannten „Brownschen Molekularbewegung“ identisch sind; die mir erreichbaren Angaben über letztere sind jedoch so ungenau, daß ich mir hierüber kein Urteil bilden konnte.

Wenn sich die hier zu behandelnde Bewegung samt den für sie zu erwartenden Gesetzmäßigkeiten wirklich beobachten läßt, so ist die klassische Thermodynamik schon für mikroskopisch unterscheidbare Räume nicht mehr als genau gültig anzusehen und es ist dann eine exakte Bestimmung der wahren Atomgröße möglich. Erwies sich umgekehrt die Voraussage dieser Bewegung als unzutreffend, so wäre damit ein schwerwiegendes Argument gegen die molekularkinetische Auffassung der Wärme gegeben.

1896

GASTHEORIE

- molekulární chaos i v ideálním plynu
- teplota ~ kinet. energie molekul
- nevrátnost ... růst entropie

PROBLÉMY

- Umkehrreinwand
Loschmidt
- Wiederkehrreinwand
Poincaré
- Neuváží Brownův pohyb



Ann. Phys.

Einsteinův rok: od Boltzmannova k Einsteinovi

1905

5. Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen;
von A. Einstein.

1 In dieser Arbeit soll gezeigt werden, daß nach der molekularkinetischen Theorie der Wärme in Flüssigkeiten suspendierte Körper von mikroskopisch sichtbarer Größe infolge der Molekularbewegung der Wärme Bewegungen von solcher Größe ausführen müssen, daß diese Bewegungen leicht mit dem Mikroskop nachgewiesen werden können. Es ist möglich, daß die hier zu behandelnden Bewegungen mit der sogenannten „Brownschen Molekularbewegung“ identisch sind; die mir erreichbaren Angaben über letztere sind jedoch so ungenau, daß ich mir hierüber kein Urteil bilden konnte.

3 Wenn sich die hier zu behandelnde Bewegung samt den für sie zu erwartenden Gesetzmäßigkeiten wirklich beobachten läßt, so ist die klassische Thermodynamik schon für mikroskopisch unterscheidbare Räume nicht mehr als genau gültig anzusehen und es ist dann eine exakte Bestimmung der wahren Atomgröße möglich. Erwies sich umgekehrt die Voraussage dieser Bewegung als unzutreffend, so wäre damit ein schwerwiegendes Argument gegen die molekularkinetische Auffassung der Wärme gegeben.

23.2.2006

II. Tepelné fluktuace

1896

GASTHEORIE

- molekulární chaos i v ideálním plynu
- teplota ~ kinet. energie molekul
- nevrátnost ... růst entropie

PROBLÉMY

- Umkehrreinwand
Loschmidt
- Wiederkehrreinwand
Poincaré
- Neuvážil Brownův pohyb



Ann. Phys.



15

K obsahu Einsteinovy práce

! Souběžně velmi podobná práce Mariana Smoluchowskiho

Postup A.E. je "**polofenomenologický**"

Výsledky



1. Odvozen molekulárně-kinetický vzorec pro *koloidní osmotický tlak* (... "nezajímavé")
2. Formule pro *difusní konstantu* ... Einsteinův vztah
3. Formule pro evoluci Brownovy částice  
4. Navržen nový způsob stanovení Avogadrovy konstanty ... dnes úloha do praktika

K obsahu Einsteinovy práce

! Souběžně velmi podobná práce Mariana Smoluchowskiho


Postup A.E. je "**polofenomenologický**"

Výsledky

1. Odvozen molekulárně-kinetický vzorec pro *koloidní osmotický tlak* (... "nezajímavé")
2. Formule pro *difusní konstantu* ... Einsteinův vztah
3. Formule pro evoluci Brownovy částice  
4. Navržen nový způsob stanovení Avogadrovy konstanty ... dnes úloha do praktika


K Einsteinovu vztahu

Odvození 1. rovnováha objemových a povrchových sil *makroskop. část*

 síla $\rightarrow K v - \frac{\partial p}{\partial x} = 0.$

2. rovnováha toků Poiseuillův vs. difusní *mesoskopická část*

$\frac{v K}{6 \pi k P} - D \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$





 ηr

K obsahu Einsteinovy práce

! Souběžně velmi podobná práce Mariana Smoluchowskiho

Postup A.E. je "**polofenomenologický**"

Výsledky

1. Odvozen molekulárně-kinetický vzorec pro *koloidní osmotický tlak* (... "nezajímavé")
2. Formule pro *difusní konstantu* ... Einsteinův vztah
3. Formule pro evoluci Brownovy částice  
4. Navržen nový způsob stanovení Avogadrovy konstanty ... dnes  

3. uzavřeno
započtením
molekul.
chaosu

K Einsteinovu vztahu

Odvození 1. rovnováha objemových a povrchových sil *makroskop. část*


 síla

→ $K v - \frac{\partial p}{\partial x} = 0.$

→ $- K v + \frac{RT}{N_A} \frac{\partial v}{\partial x} = 0$

2. rovnováha toků Poiseuillův vs. difusní *mesoskopická část*

→ $\frac{v K}{6 \pi k P} - D \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$

 ηr

stavová rovnice koloidu


$$p = \frac{RT}{N_A} \cdot \frac{N}{V} \Bigg\} v$$

K obsahu Einsteinovy práce

! Souběžně velmi podobná práce Mariana Smoluchowskiho

Postup A.E. je "**polofenomenologický**"

Výsledky

1. Odvozen molekulárně-kinetický vzorec pro *koloidní osmotický tlak* (... "nezajímavé")
2. Formule pro *difusní konstantu* ... Einsteinův vztah
3. Formule pro evoluci Brownovy částice 
4. Navržen nový způsob stanovení Avogadrovy konstanty ... dnes úloha do praktika

difusní konstanta D K Einsteinovu vztahu

$$D = \frac{RT}{N} \frac{1}{6\pi k P}$$

k_B $D = \frac{RT}{N_A} \frac{1}{6\pi\eta r}$ dynamická viskozita

Tři interpretace:

Most mezi rovnovážnými fluktuacemi a odezvou na vnější sílu (flukтуаčně – disipační teorém)

Most mezi makro a mikrosvětlem prostřednictvím Avogadrovy konstanty


Most mezi třením a stochastickými silami ... později

K obsahu Einsteinovy práce

! Souběžně velmi podobná práce Mariana Smoluchowskiho

Postup A.E. je "**polofenomenologický**"

Výsledky

1. Odvozen molekulárně-kinetický vzorec pro *koloidní osmotický tlak* (... "nezajímavé")
2. Formule pro *difusní konstantu* ... Einsteinův vztah
3. Formule pro evoluci Brownovy částice 
4. Navržen nový způsob stanovení Avogadrovy konstanty ... dnes úloha do praktika

difusní konstanta $\xrightarrow{\text{K Einsteinovu vztahu}}$

$$D = \frac{RT}{N} \frac{1}{6\pi k P} \cdot$$

$D = k_B T \cdot B$ $\xleftarrow{\text{pohyblivost}}$

Tři interpretace:

Most mezi rovnovážnými fluktuacemi a odezvou na vnější sílu (fluktuačně – disipační teorém)

Most mezi makro a mikrosvětlem prostřednictvím Avogadrovy konstanty


Most mezi třením a stochastickými silami ... později

K obsahu Einsteinovy práce

! Souběžně velmi podobná práce Mariana Smoluchowskiho

Postup A.E. je "**polofenomenologický**"

Výsledky

1. Odvozen molekulárně-kinetický vzorec pro *koloidní osmotický tlak* (... "nezajímavé")
2. Formule pro *difusní konstantu* ... Einsteinův vztah
3. Formule pro evoluci Brownovy částice 
4. Navržen nový způsob stanovení Avogadrovy konstanty ... dnes úloha do praktika

difusní konstanta
MĚŘENA

$$D = \frac{RT}{N} \frac{1}{6\pi kP}$$

plynová konst. -- ZNÁMA

$$D = \frac{R}{N_A} T \cdot B$$

pohyblivost -- ZNÁMA

Tři interpretace:

Most mezi rovnovážnými fluktuacemi a odezvou na vnější sílu (fluktuačně – disipační teorém)

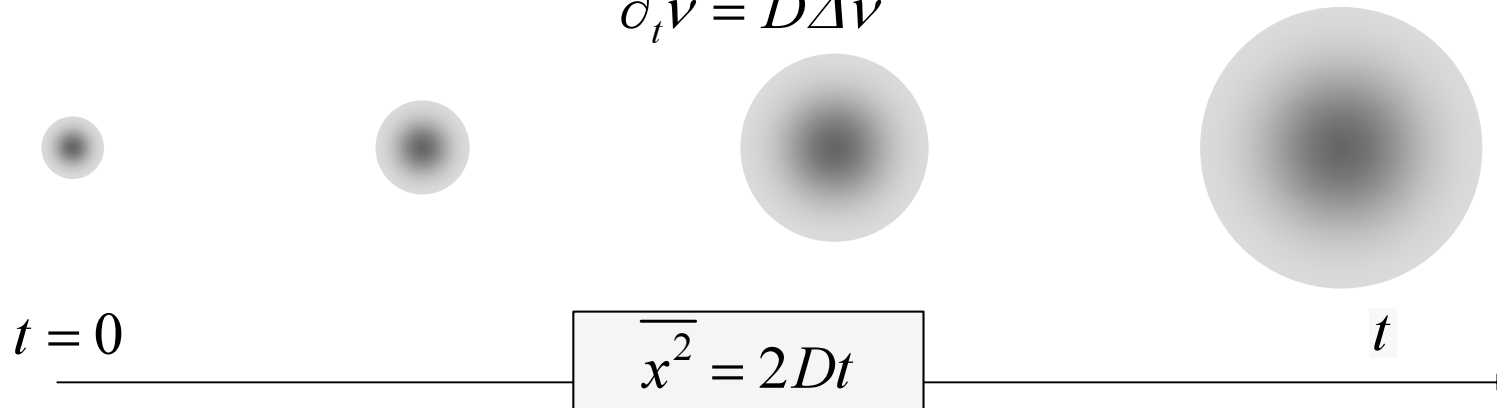
Most mezi makro a mikrosvětlem prostřednictvím Avogadrovy konstanty

Most mezi třením a stochastickými silami ... později

Formule pro evoluci Brownovy částice

Difusní rovnice

$$\partial_t \nu = D \Delta \nu$$



Odplouvání Brownovy částice od výchozí polohy

interpretováno jako difuze

Perrin se spolupracovníky provedl opěťovaná měření a z nich vypočetl difusní konstantu. Pomocí Einsteinovy formule určil

$$N_A = \mathbf{M} \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

$$\mathbf{M} = 7,3 \quad 6,8 \quad 6,45 \quad 7,15 \quad 7,7$$

$$\mathbf{M}_{\text{CODATA}} = 6,0221415(10)$$

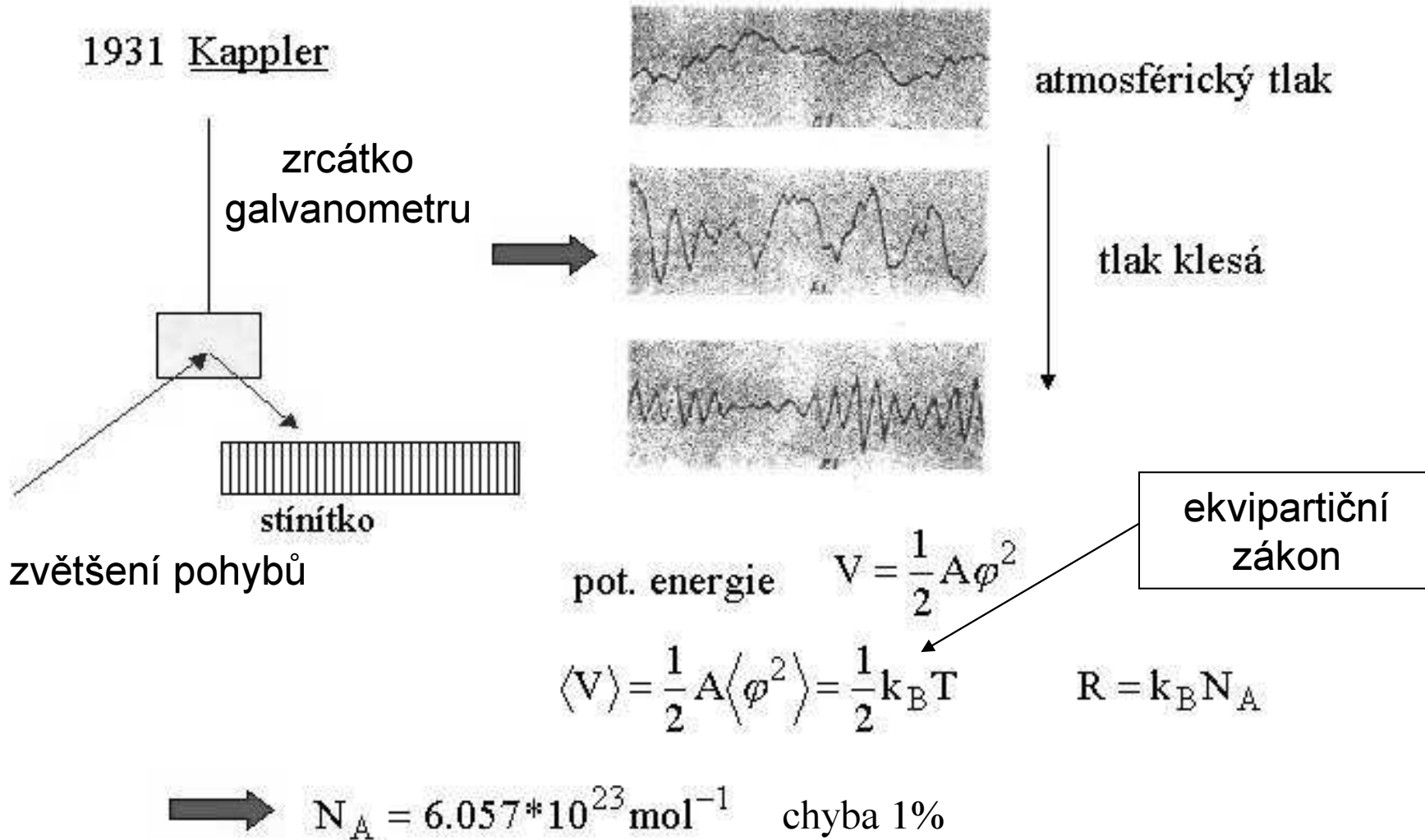
Obecnější pohled na termické fluktuace

Termické fluktuace jsou universální.
Má proto smysl podívat se na ně z obecného hlediska.

Začneme Kapplerovým pokusem.
Ten začal éru studia vlivu termických fluktuací na
přesnost mechanismů a měřicích přístrojů.
Obecný nástroj při této práci je ekvipartiční zákon.

První přesné stanovení Avogadrovy konstanty

1931 Kappler

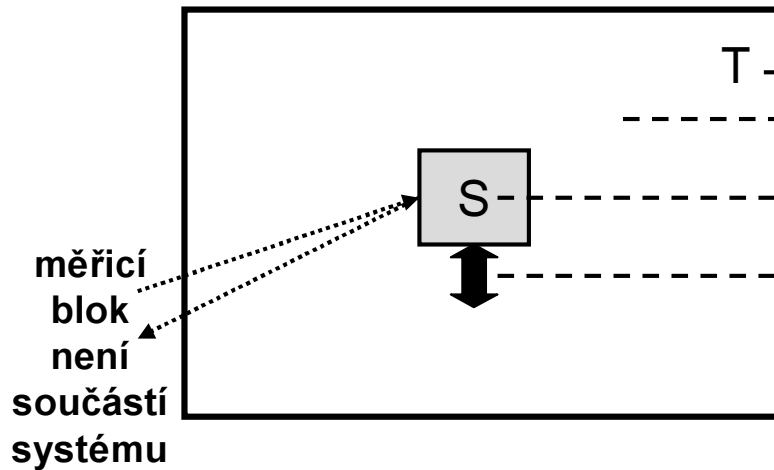


Systematický popis termických fluktuací

termické fluktuace || kvantové fluktuace
 současnost

šum
noise

MAKROSKOPICKÁ APARATURA



T ----- termostat makroskopický "nekonečný" ...
 ----- mnoho nezávislých vnitřních stupňů volnosti
 S ----- systém mesoskopický
 ----- interakce T -- S

$$H_{TOT} = H_T + H_S + U_{ST}$$

$$\approx \sum H_{T\alpha} + H$$

mikroskopické
stupně volnosti globální

$$H_T = \sum H_{T\alpha} + U_{TT}$$

$$H_S = H + \cancel{H_{\text{vnitř}}}$$

$$U_{ST} = ?$$

"silné slabé" ↔ **molekulární chaos**

Tři příklady mesoskopických systémů

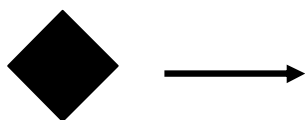
globální stupně volnosti

- translační
- rotační

mohou být exaktně odděleny od vnitřních SV

1) Brownova částice

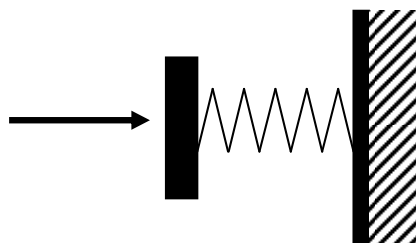
volný translační (+ volný rotační) pohyb



$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \text{rotace}$$

2) pérové váhy

mezipřípad: translační pohyb s vratnou silou



$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} Ax^2$$

3) Kapplerovo zrcátko

těžiště pevné, rotace okolo osy s vratnou silou



$$H = \frac{L^2}{2I} + \frac{1}{2} A\varphi^2$$

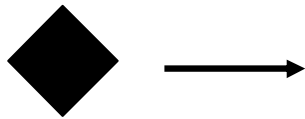
Tři příklady mesoskopických systémů

s hamiltoniánem kvadratickým v globálních
kanonických proměnných

globální stup

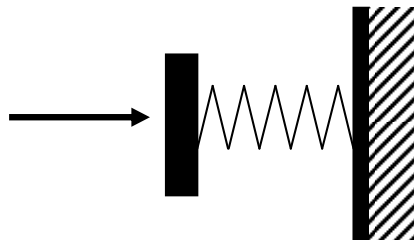
- translační
- rotační

1) Brownova částice *volný translační (+ volný rotační) pohyb*



$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \text{rotace}$$

2) pérové váhy



mezipřípad: translační pohyb s vratnou silou

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} Ax^2$$

3) Kapplerovo zrcátko



těžiště pevné, rotace okolo osy s vratnou silou

$$H = \frac{L^2}{2I} + \frac{1}{2} A\varphi^2$$

Termostat

$$H_T = \sum H_{T\alpha} + U_{TT} \quad \text{obecný tvar hamiltoniánu}$$
$$= \sum \frac{\mathbf{p}_\alpha^2}{2m} + \underbrace{\sum V_{C\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} U_{\alpha\beta}}_{\text{srážky vedou k chaotisaci}} \quad \text{pro (téměř) ideální plyn}$$

srážky vedou k chaotisaci

podmínky pro dobrý termostat
z ideálního plynu

$$\frac{a}{\bar{v}} \ll \frac{\ell}{\bar{v}} \ll \frac{L}{\bar{v}}$$

doba chaotisace (srážková doba)

doba termalisace (relaxační doba)

hydrodynamická doba

TERMOSTAT:

definuje a fixuje teplotu

je robustní, nedá se vychýlit

je rychlý při návratu do rovnováhy

Boltzmann měl správnou intuici o molekulárním chaosu, ale ve své době byl ojedinelej se svým názorem

... kapituloval jen chvíli před vítězstvím svých idejí

Termostat v rovnováze

Chování termostatu v rovnováze ...

distribuční funkce pro každý stupeň volnosti zvlášť

$$f_{\alpha}(p, q) \propto \exp(-\beta \cdot H_{\alpha}(p, q)), \quad \beta = 1/k_{\text{B}}T$$

je to *hustota pravděpodobnosti*, tedy $f_{\alpha}(p, q)d\Omega_p d\Omega_q$ má význam pravděpodobnosti. Speciální případ je barometrická formule zobecňující Boltzmannovo rozdělení

$$f_{\alpha}(p, q) \propto \exp(-\beta \cdot \frac{p_{\alpha}^2}{2m}) \cdot \exp(-\beta \cdot V_{\text{C}\alpha}(q))$$

Jestliže potenciál popisuje stěny, pak také vede k chaotisaci tzv. biliárovým efektem a bude vypuštěn.

Prostřednictvím skrytých chaotisačních interakcí se termický chaos přenes z **T** i na dynamický systém **S**.

$$f(p, q) \propto \exp(-\beta \cdot H(p, q))$$

Dynamický systém v rovnováze s termostatem

Naše malé systémy si můžeme myslet jako " $N + 1$ " molekulu, trochu sice větší, ale jinak zapadající do Boltzmannovy konstrukce kinetické teorie

Předpokládáme totiž $H_{\text{TOT}} = \underbrace{\sum H_{T\alpha} + H}_{\text{"N + 1" molekul}} + \cancel{U_{\text{ST}}}$

Škrtnutý člen vyvolá nevratnou dynamiku. Jsou dvě cesty:

- Počítáme střední hodnoty s rozdělovací funkcí

$$f(p, q) \propto \exp(-\beta \cdot H(p, q))$$

Tímto vnucením rovnováhy jsme rovnocenně dosáhli nevratnosti.

- Začneme dynamické výpočty pro systém **S** pod dynamickým vlivem **T**. To je možné např. za použití **Langevinovy rovnice** (... Příště)

Ekvipartiční teorém

Ekvipartiční teorém

je obecně platný za následujících předpokladů:

- Systém je klasický (fatálně důležité ... viz Planckova funkce)
- Uvažovaný stupeň volnosti (p nebo q) vystupuje v celkovém hamiltoniánu jen jako aditivní kvadratická funkce, typicky $\frac{1}{2} Ax^2$

Pak

$$\left\langle \frac{1}{2} Ax^2 \right\rangle = \frac{\int dx \cdot \frac{1}{2} Ax^2 \cdot \exp(-\beta \cdot \frac{1}{2} Ax^2)}{\int dx \cdot \exp(-\beta \cdot \frac{1}{2} Ax^2)} = \frac{1}{2} k_B T$$

Tento výsledek pokrývá mimo jiné Kapplerovský výpočet. Na kinetické energii vůbec nezáleží, ani na rozdílném dynamickém chování pro různé podmínky (tlak vzduchu v "termostatu")