

II.

KVAZISTACIONÁRNÍ STAVY

a

RELACE $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$

19. 10. 2005

5.10.2005:
Krátkočasový rozvoj pro Greenovu funkci

... školská "přesná" definice neurčitosti energie se hodí jen při krátkých časech a s dobou života stavu nemá nic společného

5.10.2005: GF a spektrální hustota

ve skutečnosti

$$GF = \frac{1}{i\hbar} \langle 0|t\rangle \mathcal{G}(t)$$

Moje definice Greenovy funkce

$$G(t) = \langle 0|t\rangle = \langle 0|e^{-i/\hbar \cdot \hat{H}t}|0\rangle$$

pravdě-
podobnosti

amplituda přežití

Fourierova transformace tam a zpět

$$G(t) = \int dE e^{-i/\hbar \cdot Et} A(E) \leftrightarrow A(E) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dt e^{+i/\hbar \cdot Et} G(t)$$

Výraz pro spektrální hustotu

explicitní (definice)

invariantní

$$A(E) = \sum_{\lambda} \langle 0|\lambda\rangle \delta(E - E_{\lambda}) \langle \lambda|0\rangle \quad A(E) = \langle 0|\delta(E - \hat{H})|0\rangle$$

Dvě základní vlastnosti ... a NIC víc

① $A(E) \geq 0$ nezáporná ② $\int dE A(E) = 1$ sumační pravidlo

5.10.2005: GF a spektrální hustota

Výpočet momentů (vlastně kumulantů)

$$\bar{H} = \langle \hat{H} \rangle = \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle \qquad \Delta^2 H = \langle 0 | (\hat{H} - \bar{H})^2 | 0 \rangle$$

$$\int dE A(E) \times E = \bar{H} \qquad \int dE A(E) \times (E - \bar{H})^2 = \Delta^2 H$$

Krátkočasový rozvoj

$$G(t) = \int dE e^{-i/\hbar \cdot Et} A(E) =$$

$$= e^{-i/\hbar \cdot \bar{H}t} \times \int dE (1 - i/\hbar \cdot (E - \bar{H})t + \frac{1}{2} [i/\hbar \cdot (E - \bar{H})t]^2 + \dots) A(E)$$

$$\int dE A(E) \times (E - \bar{H}) = 0$$

$$\int dE A(E) \times (E - \bar{H})^2 = \Delta^2 H$$

5.10.2005:

Zavedení spektrální hustoty a Krylova representace

... převedení GF na spektrální hustotu --- dá se lépe porozumět

... nízké momenty se Fourierovou transformací přenášejí do krátkých časů. Neurčitost energie je 2. moment spektr. hustoty.

5.10.2005: *Dlouhé časy*

$G(t)$ závisí jen na $A(E)$, ne na specifických podrobnostech Hamiltoniánu/vln. funkcí ...
... ale na celém průběhu, každé podrobnosti funkčního tvaru, singularitách

Rozdělíme na příspěvek spojitého a diskrétního spektra: (další matem. šílenství pomínu)

$$A(E) = A_D(E) + A_C(E) \leftrightarrow G(t) = G_D(t) + G_C(t)$$

DVA ZÁKLADNÍ REŽIMY

● $A_D(E) = \sum a_\lambda \delta(E - E_\lambda) \leftrightarrow G_D(t) = \sum a_\lambda e^{-i/\hbar \cdot E_\lambda t}$
nemá limitu při $t \rightarrow \infty$

● $A_C(E) \leftrightarrow G_C(t) = \int dE e^{-i/\hbar \cdot Et} A_C(E) \rightarrow 0$
má nulovou limitu při $t \rightarrow \infty$

ekvidistantní energie
periodická funkce
perioda ...
vzdálenost hladin

nesouměřitelné energie
vícenásobně periodická
funkce (A. Sommerfeld)
téměř periodická funkce
(Harald Bohr *bratr*)

tzv. lemma Riemann -- Lebesque

neříká nic o **rychlosti**
konvergence k nule

5.10.2005:
Dlouhé časy

... rozpad stavu je možný jen ve spojitém
spektru

5.10.2005: *Rozpadový zákon*

Zatím jsme uvažovali amplitudu (pravděpodobnosti) přežití stavu

$$G(t) = \langle 0|t \rangle$$

Příslušná pozorovatelná je však sama *pravděpodobnost přežití*

$$W(t) = |G(t)|^2 \quad \text{ROZPADOVÝ ZÁKON}$$

Hustota pravděpodobnosti rozpadu za jednotku času

$$w(t) = -\frac{d}{dt} \ln W(t) = -\frac{\frac{d}{dt} W(t)}{W(t)}$$

Kdyby platilo $w(t) = \text{const}$, pak rozpadový zákon by byl $W(t) \propto \exp(-w \cdot t)$ To je známý radioaktivní rozpad, monomolekulární luminiscence, ... Proto je to **centrální případ** a náš úkol bude zejména najít podmínky a meze platnosti tohoto **Wigner-Weisskopfova** rozpadu

Rozpadový zákon pomocí spektrální hustoty

$$|G(t)|^2 = \int dE e^{-i/\hbar \cdot Et} \underbrace{\int dE' A(E + E') A(E')}_{\text{autokorelační funkce}}$$

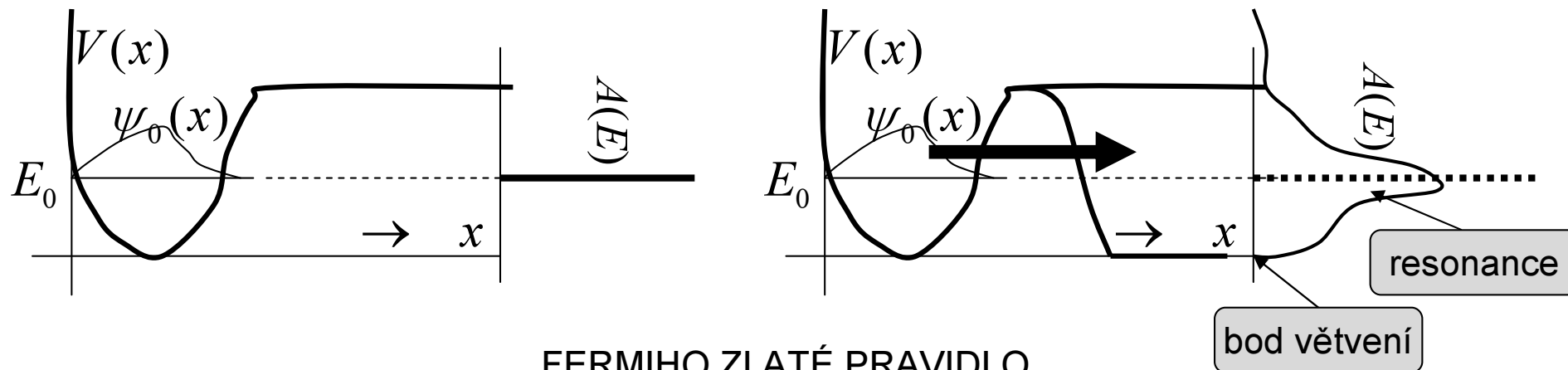
5.10.2005:
Rozpadový zákon

... můžeme pokračovat s GF a hledat rozpadové zákony pro modelové spektr. hustoty

5.10.2005: Modelové příklady

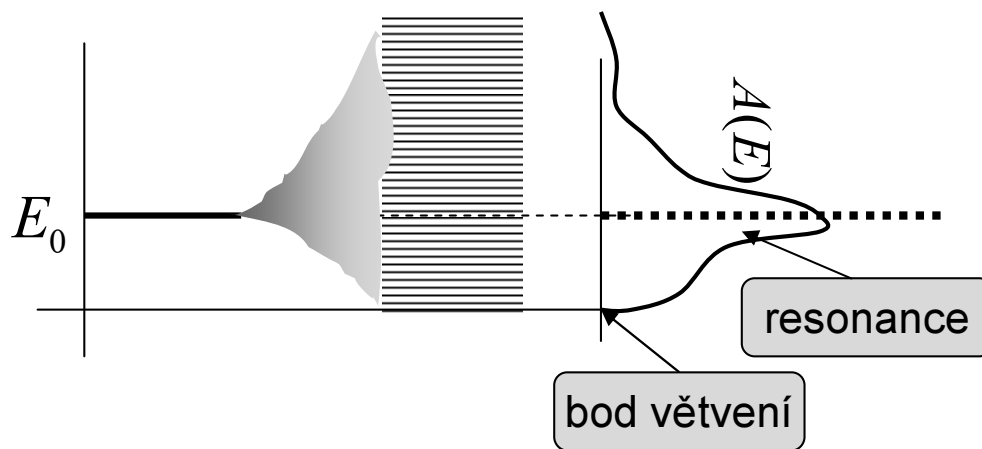
TUNELOVÁNÍ (α -ROZPAD)

... bariera v reálném prostoru odděluje konečnou a nekonečnou oblast



FERMIHO ZLATÉ PRAVIDLO

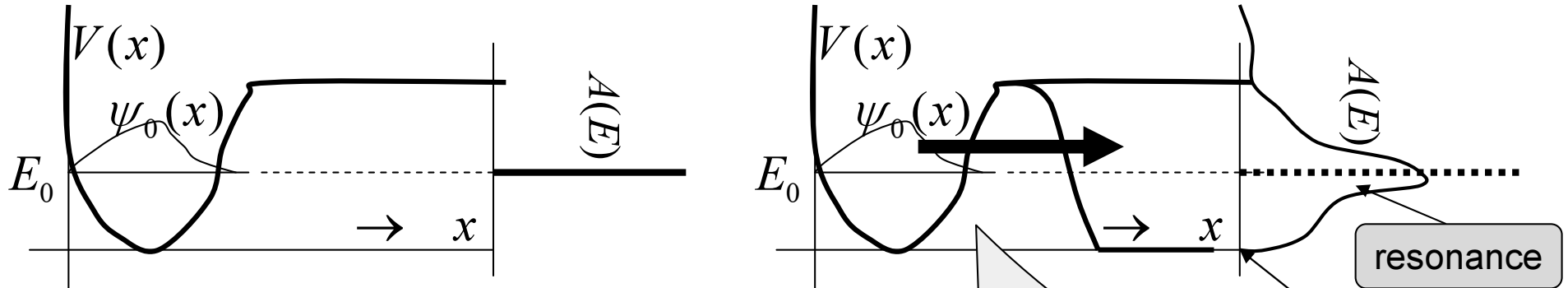
... diskretní hladina je slabě vázána na překrývající kontinuum stavů



Modelové příklady

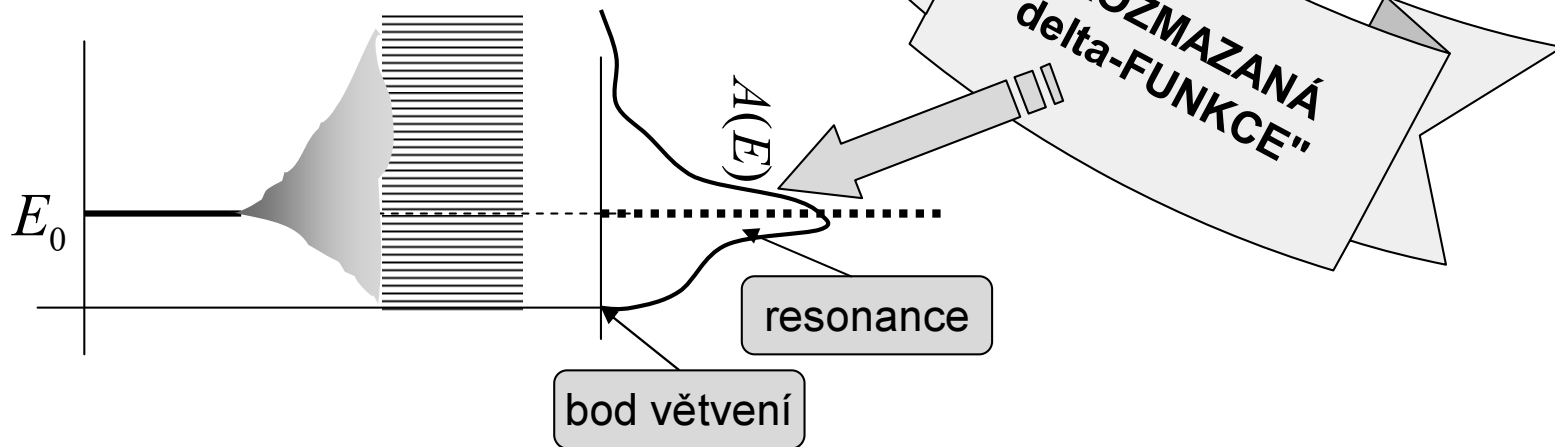
TUNELOVÁNÍ (α -ROZPAD)

... bariera v reálném prostoru odděluje konečnou a nekonečnou oblast



FERMIHO ZLATÉ PRAVIDLO

... diskretní hladina je slabě vázána na přímou část spektra



Modelové příklady: úvodní poznámky

STACIONÁRNÍ STAV (VLASTNÍ FUNKCE)

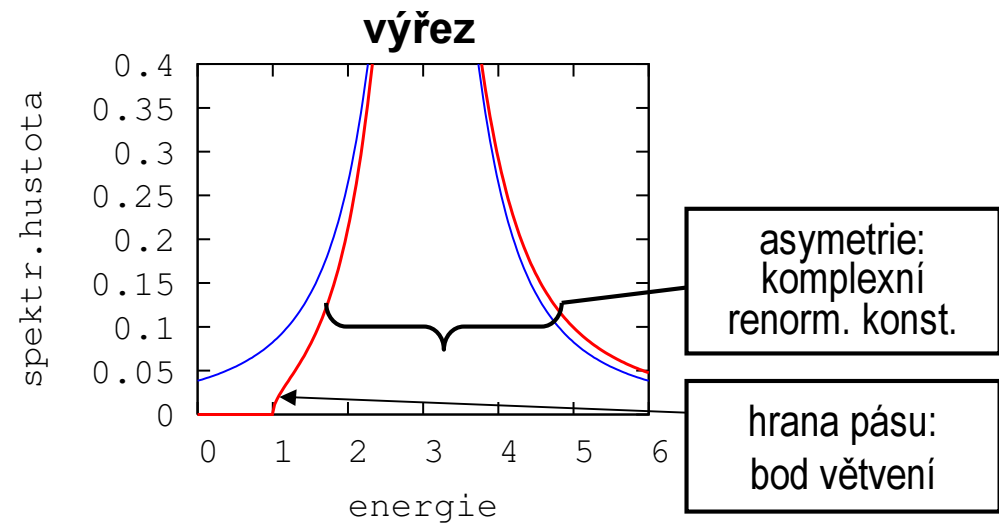
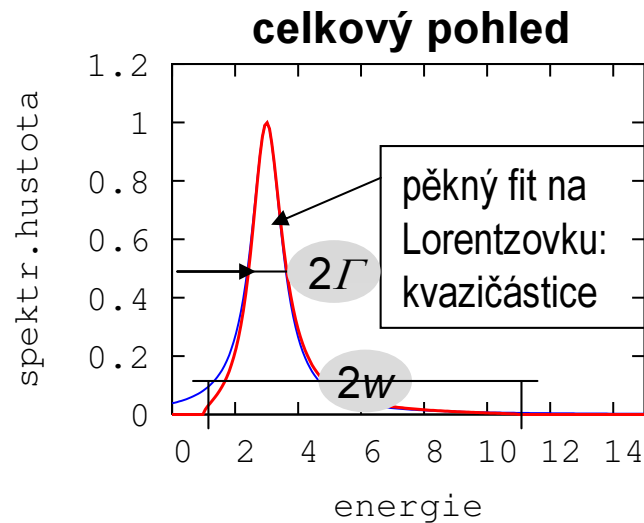
v sumě zůstane jen jeden člen:

$$A(E) = \sum_{\lambda} \langle 0 | \lambda \rangle \delta(E - E_{\lambda}) \langle \lambda | 0 \rangle$$

$\xrightarrow{|0\rangle = |\mu\rangle} \delta(E - E_{\mu})$

"VZOROVÁ" SPEKTRÁLNÍ HUSTOTA (model)

... mám na mysli elektron hluboko v pásu, dosti silné interakce, např. $el - ph$



Modelové příklady: přehled

Postup: zvolíme *modelovou spektrální hustotu* $A(E)$.

K ní dopočteme Fourierovou transformací $G(t)$ a $W(t)$.

Volba spektrální hustoty: základní vlastnosti **1, 2**

$$\textcircled{1} \quad A(E) \geq 0 \quad \text{nezáporná} \quad \textcircled{2} \quad \int dE A(E) = 1 \quad \text{sumační pravidlo}$$

I. Spojité modely

- Čistá Lorentzova sp. hustota
- Model kvazičástice – kompensovaná Lorentzova hustota
- Gaussova sp. hustota
- Obdélníková hustota
- Parabolická hustota – koncové body (body větvení)

II. Diskrétní modely

- Obdélníkový hřeben
- Termodynamická limita

Modelové příklady: přehled

Postup: zvolíme *modelovou spektrální hustotu* $A(E)$.

K ní dopočteme Fourierovou transformací $G(t)$ a $W(t)$.

Volba spektrální hustoty: základní vlastnosti **1**, **2**, k tomu zjednodušení **3**

① $A(E) \geq 0$ nezáporná ② $\int dE A(E) = 1$ sumační pravidlo

③ $A(+E) = A(-E)$ sudá ③' $\Leftrightarrow G(t)$ je reálná (bez fázových faktorů)

I. Spojité modely

- Čistá Lorentzova sp. hustota – pól 1. řádu
- Model kvazičástice – kompensovaná Lorentzova hustota
- Gaussova sp. hustota – analytická funkce
- Obdélníková hustota
- Parabolická hustota – koncové body (body větvení)

II. Diskrétní modely

- Obdélníkový hřeben
- Termodynamická limita

Pro jednoduchost

$$\hbar = 1$$

Archetyp: Lorentzova spektrální hustota

$$A(E) = \frac{\Gamma / \pi}{E^2 + \Gamma^2}$$

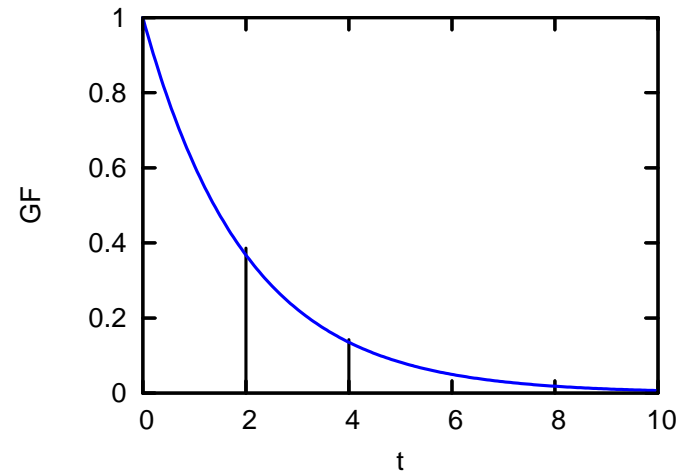
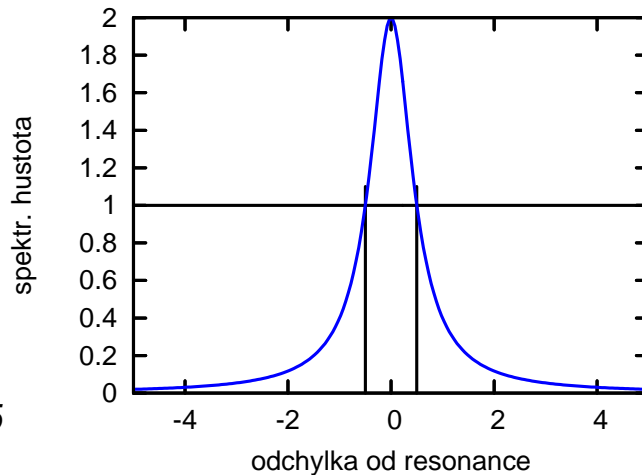
$$G(t) = \int dE e^{-i/\hbar \cdot Et} A(E)$$

$$= e^{-\Gamma|t|/\hbar} \quad \text{ale } t > 0$$

$$W(t) = e^{-2\Gamma t/\hbar} \equiv e^{-t/\tau}$$

$$\Gamma = 0.5$$

$$\hbar = 1$$



19.10.2005

Archetyp: Lorentzova spektrální hustota

$$A(E) = \frac{\Gamma / \pi}{E^2 + \Gamma^2}$$

resonance v nule

$(E - E_0)^2$

$E_0 \pm i\Gamma$ komplexní póly: energie QP

$$G(t) = \int dE e^{-i/\hbar \cdot Et} A(E)$$

$$= e^{-\Gamma|t|/\hbar}$$

ale $t > 0$

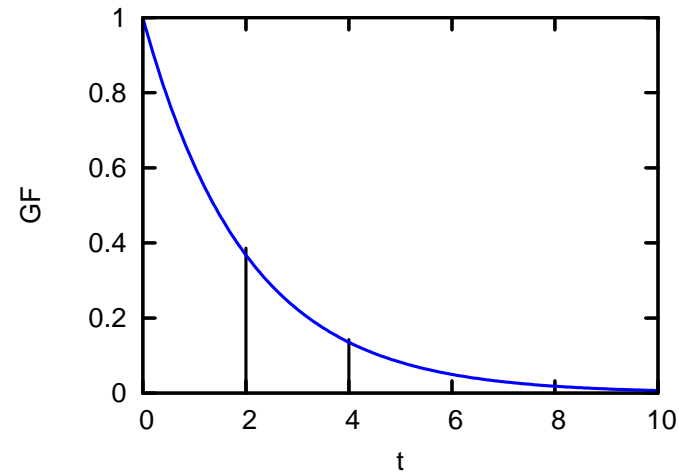
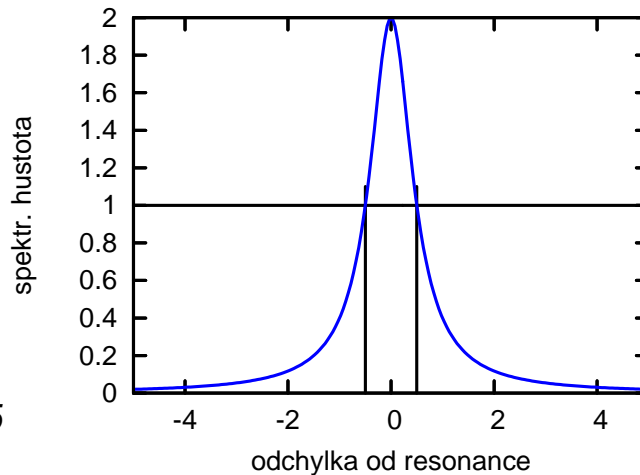
$$W(t) = e^{-2\Gamma t/\hbar} \equiv e^{-t/\tau}$$

doba života QP

$$\tau = \frac{\hbar}{2\Gamma}$$

$$\Gamma = 0.5$$

$$\hbar = 1$$



19.10.2005

Archetyp: Lorentzova spektrální hustota

$$A(E) = \frac{\Gamma / \pi}{E^2 + \Gamma^2}$$

resonance v nule

komplexní póly: energie QP

$$(E - E_0)^2$$

$$E_0 \pm i\Gamma$$

$$G(t) = \int dE e^{-i/\hbar \cdot Et} A(E)$$

$$= e^{-\Gamma t / \hbar}$$

$$W(t) = e^{-2\Gamma t / \hbar} \equiv e^{-t/\tau}$$

doba života QP

$$\tau = \frac{\hbar}{2\Gamma}$$

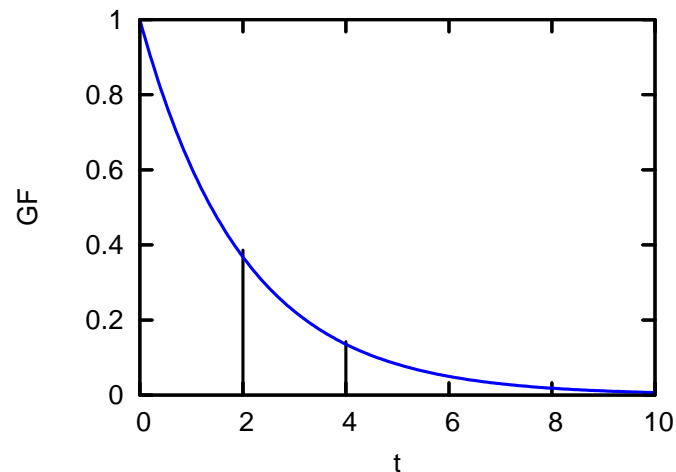
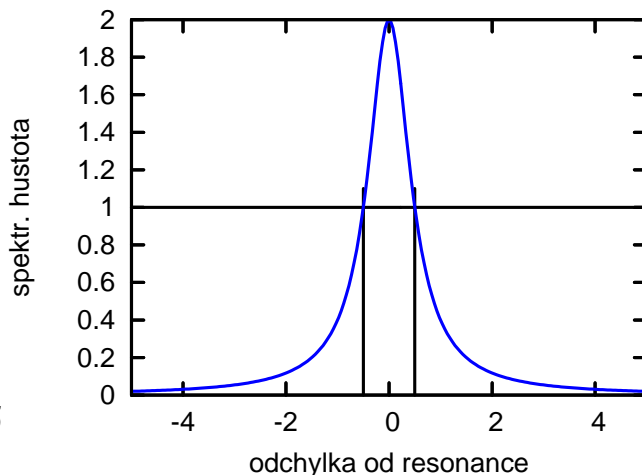
$$(\Delta E)^2 = \int dE \frac{\Gamma / \pi}{E^2 + \Gamma^2} \cdot E^2 \rightarrow \infty$$

$$\Gamma \cdot \tau = \frac{\hbar}{2}$$

"RELACE NEURČITOSTI"

$$\Gamma = 0.5$$

$$\hbar = 1$$



19.10.2005

Archetyp: Lorentzova spektrální hustota

$$A(E) = \frac{\Gamma / \pi}{E^2 + \Gamma^2}$$

resonance v nule

komplexní póly: energie QP

$$(E - E_0)^2$$

$$E_0 \pm i\Gamma$$

$$G(t) = \int dE e^{-i/\hbar \cdot Et} A(E)$$

$$= e^{-\Gamma t / \hbar}$$

$$W(t) = e^{-2\Gamma t / \hbar} \equiv e^{-t/\tau}$$

doba života QP

$$\tau = \frac{\hbar}{2\Gamma}$$

$$(\Delta E)^2 = \int dE \frac{\Gamma / \pi}{E^2 + \Gamma^2} \cdot E^2 \rightarrow \infty$$

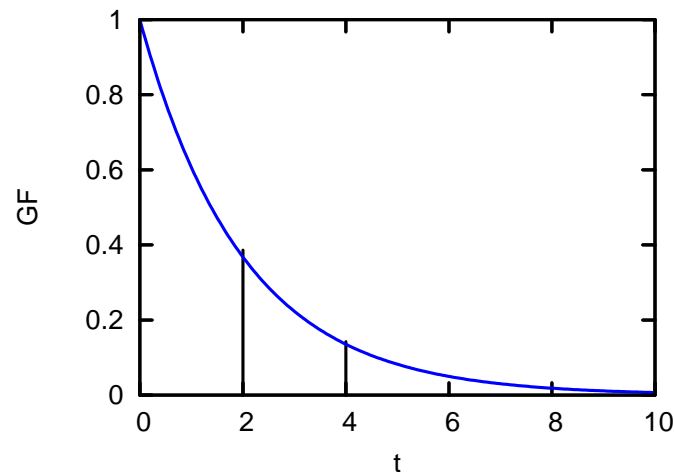
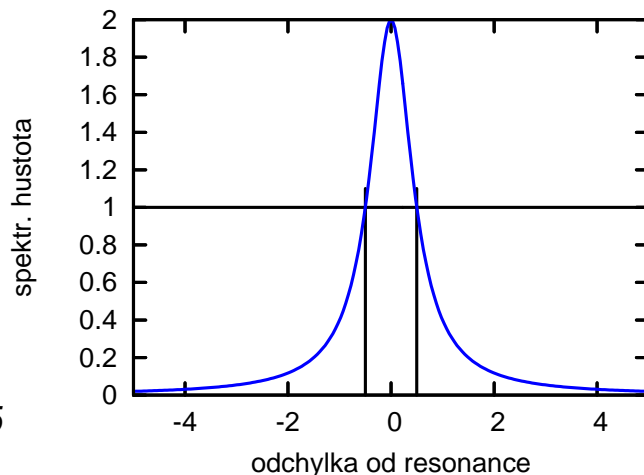
$$\Gamma \cdot \tau = \frac{\hbar}{2}$$

"RELACE NEURČITOSTI"

Jediný parametr Γ imag. energie/útlum ekviv. s τ dobou života/rozpad.časem

$$\Gamma = 0.5$$

$$\hbar = 1$$



19.10.2005

Archetyp: Lorentzova spektrální hustota

$$A(E) = \frac{\Gamma / \pi}{E^2 + \Gamma^2}$$

komplexní póly:
energie QP

resonance v nule

$$(E - E_0)^2$$

$$E_0 \pm i\Gamma$$

$$G(t) = \int dE e^{-i/\hbar \cdot Et} A(E) = e^{-\Gamma t / \hbar}$$

$$W(t) = e^{-2\Gamma t / \hbar} \equiv e^{-t/\tau}$$

doba života QP

$$\tau = \frac{\hbar}{2\Gamma}$$

$$(\Delta E)^2 = \int dE \frac{\Gamma / \pi}{E^2 + \Gamma^2} \cdot E^2 \rightarrow \infty$$

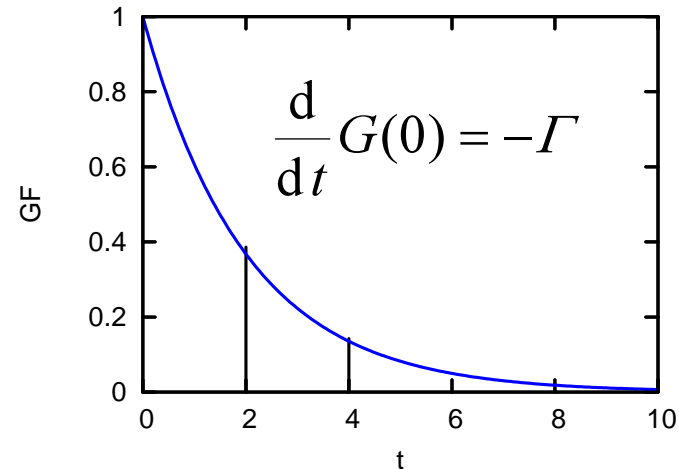
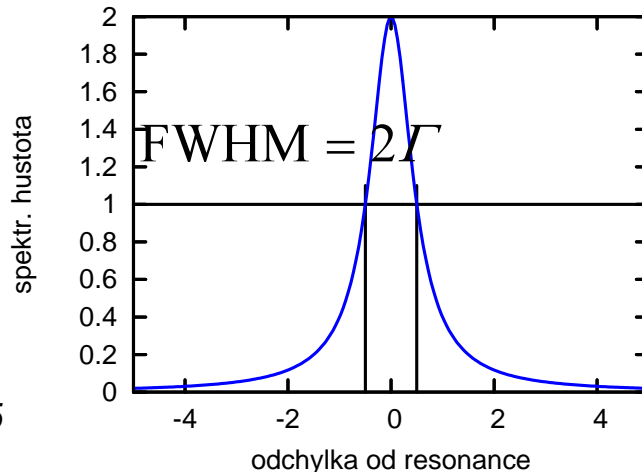
$$\Gamma \cdot \tau = \frac{\hbar}{2}$$

"RELACE NEURČITOSTI"

Jediný parametr Γ imag. energie/útlum ekviv. s τ dobou života/rozpad.časem
 Jeho empirický význam: FWHM v energiích, nenulový sklon v čase

$$\Gamma = 0.5$$

$$\hbar = 1$$



19.10.2005

Archetyp: Lorentzova spektrální hustota

$$A(E) = \frac{\Gamma / \pi}{E^2 + \Gamma^2}$$

komplexní póly:
energie QP

resonance v nule

$$(E - E_0)^2$$

$$E_0 \pm i\Gamma$$

$$G(t) = \int dE e^{-i/\hbar \cdot Et} A(E) = e^{-\Gamma t / \hbar}$$

$$W(t) = e^{-2\Gamma t / \hbar} \equiv e^{-t/\tau}$$

doba života QP

$$\tau = \frac{\hbar}{2\Gamma}$$

$$(\Delta E)^2 = \int dE \frac{\Gamma / \pi}{E^2 + \Gamma^2} \cdot E^2 \rightarrow \infty$$

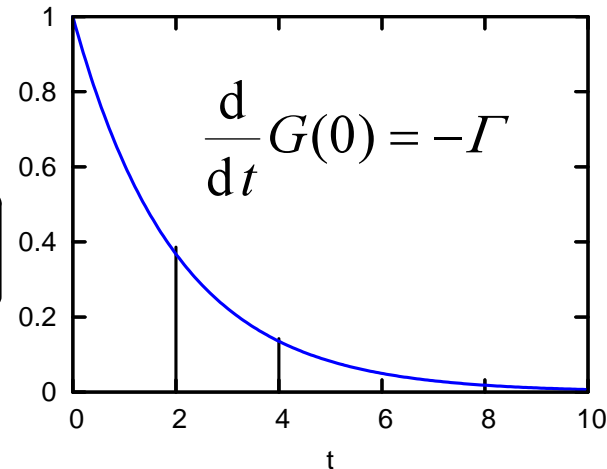
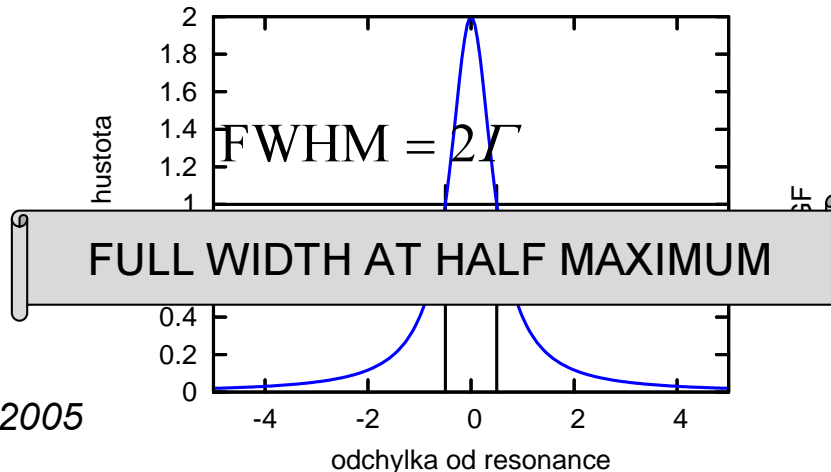
$$\Gamma \cdot \tau = \frac{\hbar}{2}$$

"RELACE NEURČITOSTI"

Jediný parametr Γ imag. energie/útlum ekviv. s τ dobou života/rozpad.časem
 Jeho empirický význam: FWHM v energiích, nenulový sklon v čase

$\Gamma = 0.5$

$\hbar = 1$



19.10.2005

Archetyp: Lorentzova spektrální hustota

$$A(E) = \frac{\Gamma / \pi}{E^2 + \Gamma^2}$$

komplexní póly:
energie QP

resonance v nule

$$(E - E_0)^2$$

$$E_0 \pm i\Gamma$$

$$G(t) = \int dE e^{-i/\hbar \cdot Et} A(E)$$

$$= e^{-\Gamma t / \hbar}$$

$$W(t) = e^{-2\Gamma t / \hbar} \equiv e^{-t/\tau}$$

doba života QP

$$\tau = \frac{\hbar}{2\Gamma}$$

$$(\Delta E)^2 = \int dE \frac{\Gamma / \pi}{E^2 + \Gamma^2} \cdot E^2 \rightarrow \infty$$

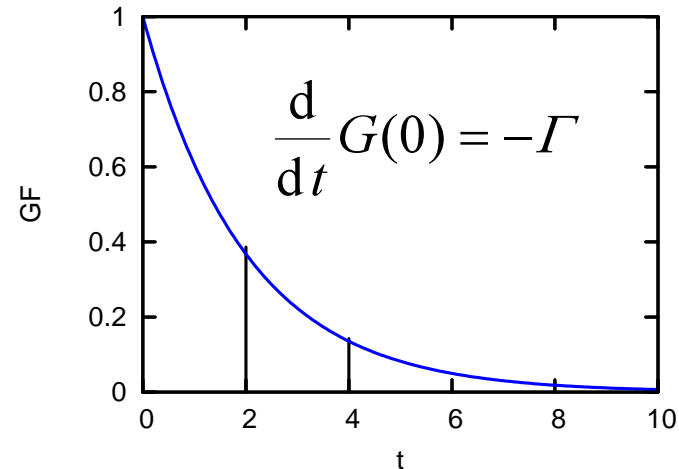
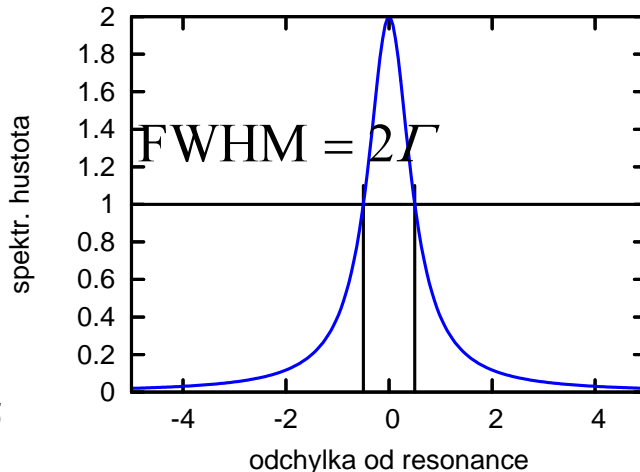
$$\Gamma \cdot \tau = \frac{\hbar}{2}$$

**"RELACE
NEURČITOSTI"**

Jediný parametr Γ imag. energie/útlum ekviv. s τ dobou života/rozpad.časem
 Jeho empirický význam: FWHM v energiích, nenulový sklon v čase

$$\Gamma = 0.5$$

$$\hbar = 1$$



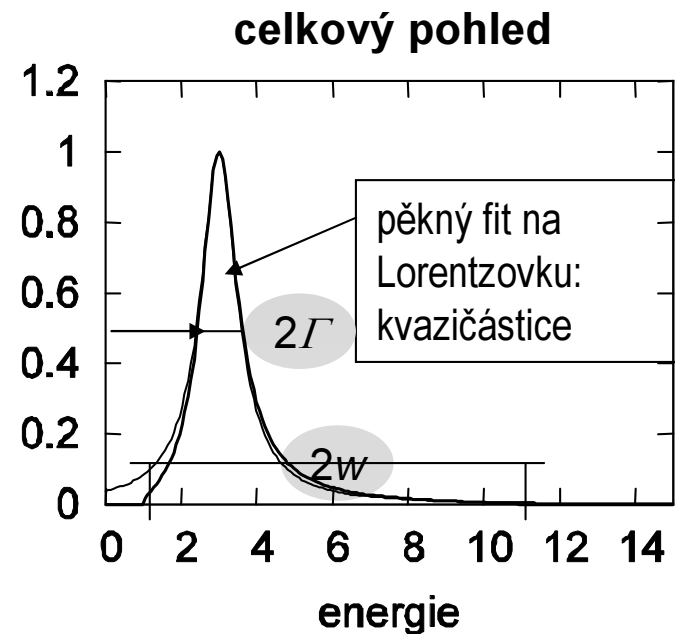
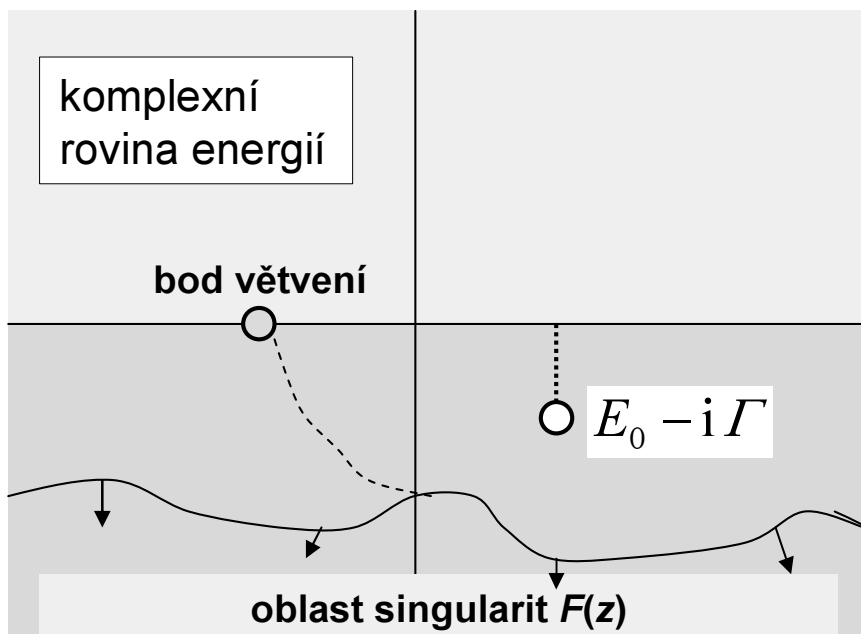
19.10.2005

Model pro kvazičástici: modifikovaný Lorentz

DEFINICE KVAZIČÁSTICE

$$A(E) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left(\frac{Z}{E - E_0 + i\Gamma} + F(E + i0) \right)$$

pólová + regulární část



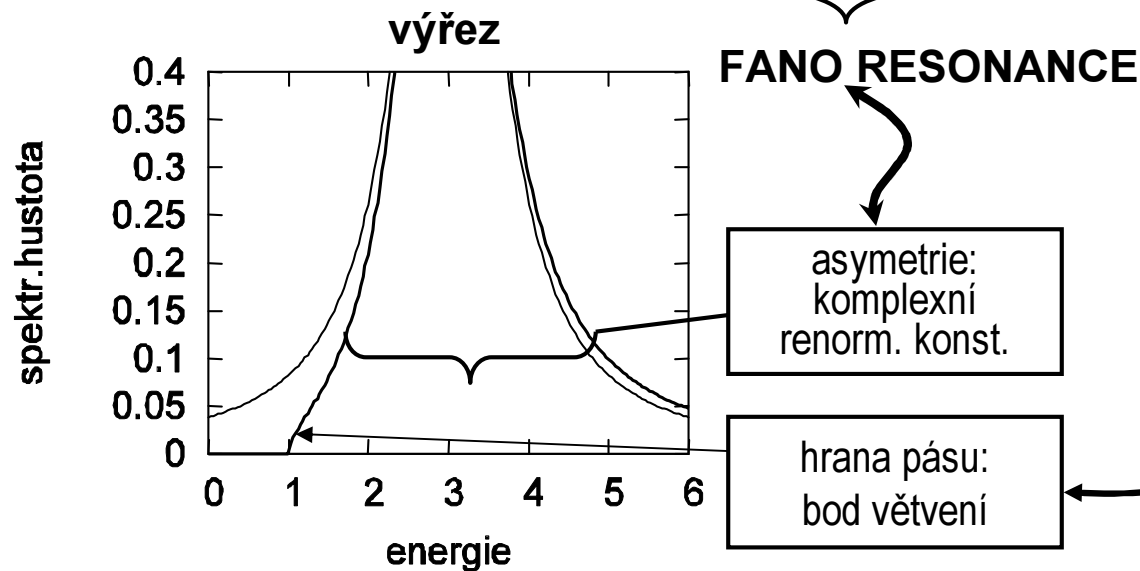
Model pro kvazičástici: modifikovaný Lorentz

DEFINICE KVAZIČÁSTICE

komplexní renormalizační konstanta

$$A(E) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left(\frac{Z}{E - E_0 + i\Gamma} + F(E + i0) \right)$$

$$= \operatorname{Re} Z \cdot \frac{\Gamma / \pi}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2} + \operatorname{Im} Z \cdot \frac{(E - E_0) / \pi}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2} + R(E)$$



Model pro kvazičástici: modifikovaný Lorentz

RESONANCI POSUNEME DO NULOVÉ ENERGIE

$$\begin{aligned} A(E) &= -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left(\frac{Z}{E - E_0 + i\Gamma} + F(E + i0) \right) \\ &= \operatorname{Re} Z \cdot \frac{\Gamma / \pi}{(E - \cancel{E}_0)^2 + \Gamma^2} + \operatorname{Im} Z \cdot \frac{(E - \cancel{E}_0) / \pi}{(E - \cancel{E}_0)^2 + \Gamma^2} + R(E) \end{aligned}$$

Model pro kvazičástici: modifikovaný Lorentz

renormalizační konstantu volíme REÁLNOU: symetrická resonance

$$\begin{aligned} A(E) &= -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left(\frac{Z}{E - E_0 + i\Gamma} + F(E + i0) \right) \\ &= \operatorname{Re} Z \cdot \frac{\Gamma / \pi}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2} + \cancel{\operatorname{Im} Z} \cdot \frac{(E - E_0) / \pi}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2} + R(E) \end{aligned}$$

Model pro kvazičástici: modifikovaný Lorentz

PŘEDBĚŽNÝ ROZBOR VLASTNOSTÍ MODELU

$$A(E) = Z \cdot \frac{\Gamma / \pi}{E^2 + \Gamma^2} + R(E)$$

$E \rightarrow 0$	pól je dominantní FWHM odpovídá zhruba 2Γ	definuje spojité pozadí
	kvazičásticový útlum určuje dlouhočasové chování	může se uplatnit po zániku kvazičásticového stavu jako slabé nekoherentní oscilace
$E \rightarrow \infty$	pokles úměrný $1/E^2$ je pomalý ... nefyzikální chování	kompensuje $1/E^2$ a vytváří celkovou strukturu spektrální funkce včetně bodů větvení
	vede na nenulový sklon při časech konvergujících k nule	dominuje krátkočasové chování v přechodném režimu formo- vání kvazičásticového stavu

Model pro kvazičástici: modifikovaný Lorentz

... "dobrá" spektrální hustota má pól blízko reálné osy, ale vyhovuje ostatním podmínkám

Model pro kvazičástici: kompenzovaný Lorentz

KONKRÉTNÍ MODEL: DVĚ LORENTZOVY HUSTOTY

dva parametry $\Gamma, p > 1$

dvě podmínky
součtové pravidlo

asymptotika $E \rightarrow \infty$

$$A(E) = Z \cdot \frac{\Gamma / \pi}{E^2 + \Gamma^2} + C \cdot \frac{p\Gamma / \pi}{E^2 + p^2 \Gamma^2}$$

$$Z + C = 1 \quad \text{aby platilo} \quad \int dE A(E) = 1$$

$$Z + pC = 0 \quad \text{kompensace} \quad Z \cdot \frac{\Gamma / \pi}{E^2} + C \cdot \frac{p\Gamma / \pi}{E^2} = 0$$

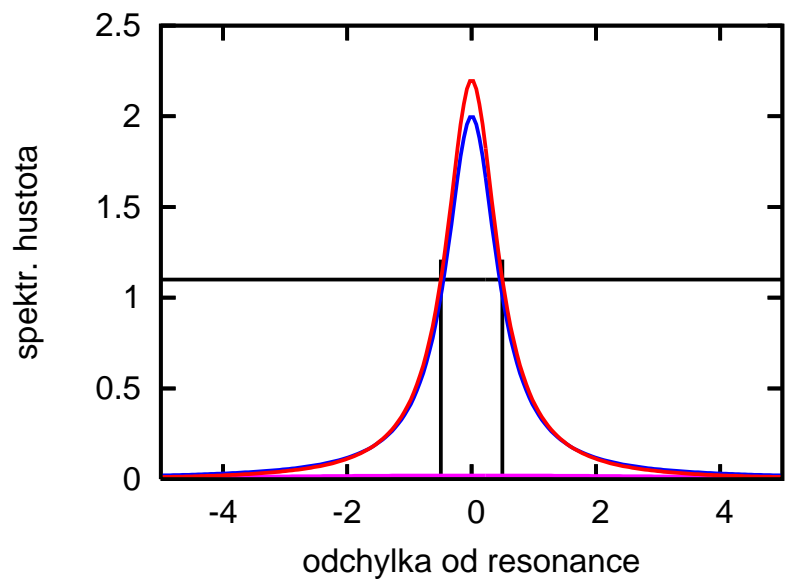
VÝSLEDEK

$$Z = \frac{p}{p-1}, \quad C = -\frac{1}{p-1} = -\frac{1}{p} \cdot Z$$

Dvojitý tvar spektrální hustoty

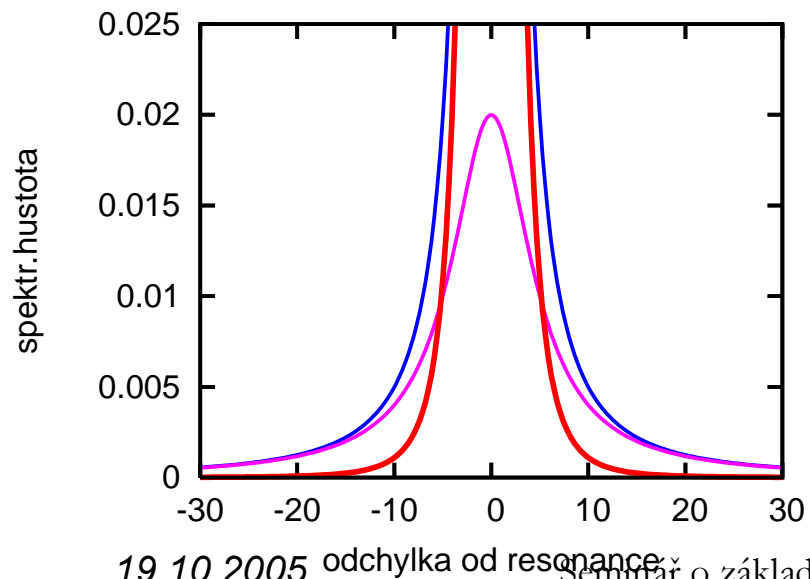
$$A(E) = Z \cdot \frac{\Gamma / \pi}{E^2 + \Gamma^2} - \frac{1}{p-1} \cdot \frac{p\Gamma / \pi}{E^2 + p^2 \Gamma^2} = Z \cdot \left(\frac{\Gamma / \pi}{E^2 + \Gamma^2} - \frac{\Gamma / \pi}{E^2 + p^2 \Gamma^2} \right)$$

Modelová spektrální hustota



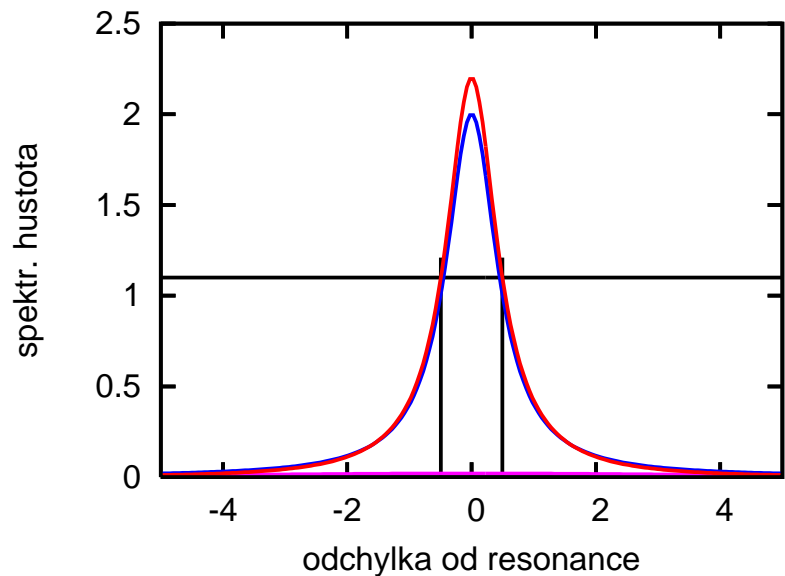
dva parametry $\Gamma = 0.5$, $p = 10$

Malá změna při pohledu na jádro resonance



V širokém oboru energií je patrna
kompensace mezi oběma Lorentzovými tvary

Modelová spektrální hustota

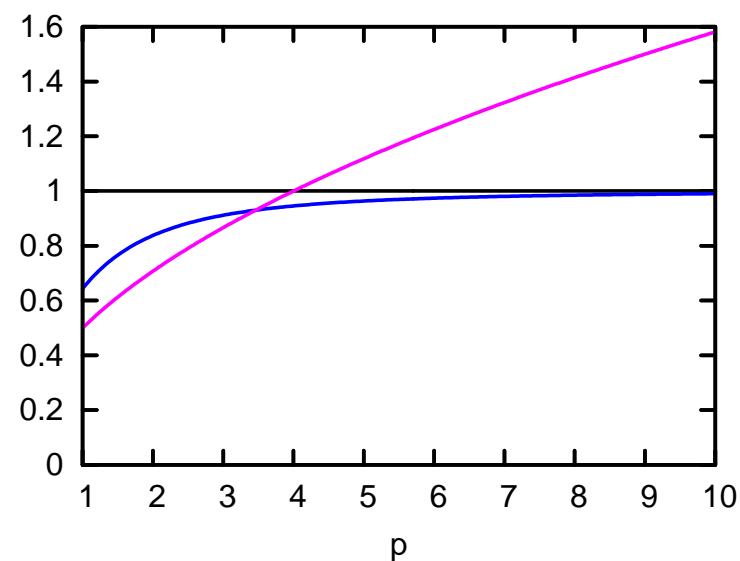
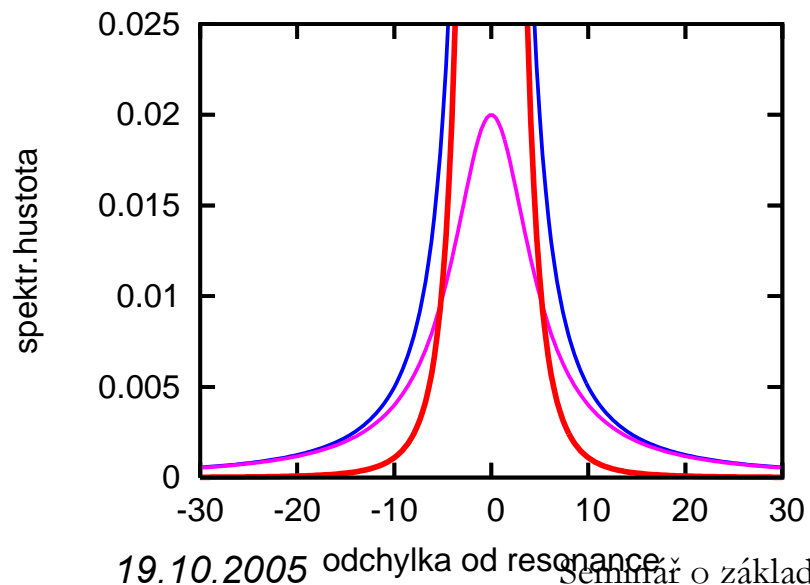


dva parametry $\Gamma = 0.5$, $p = 10$

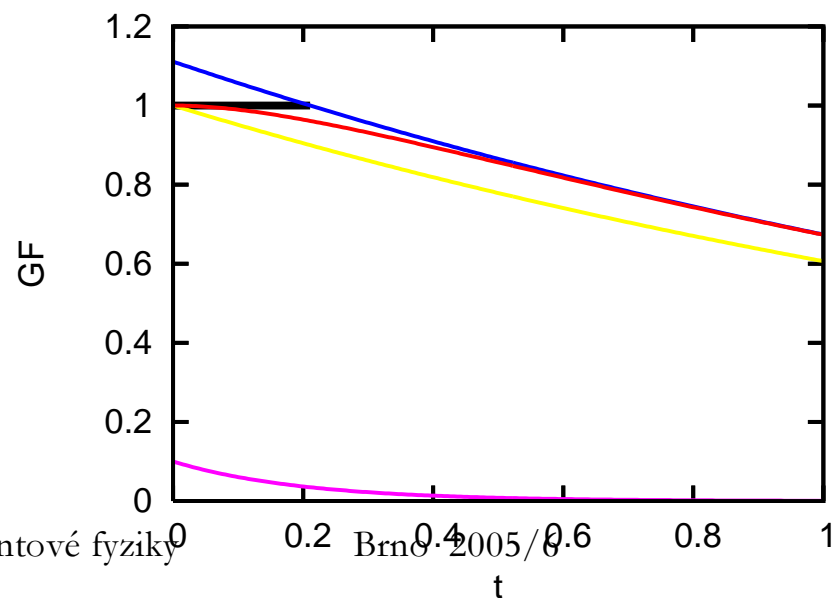
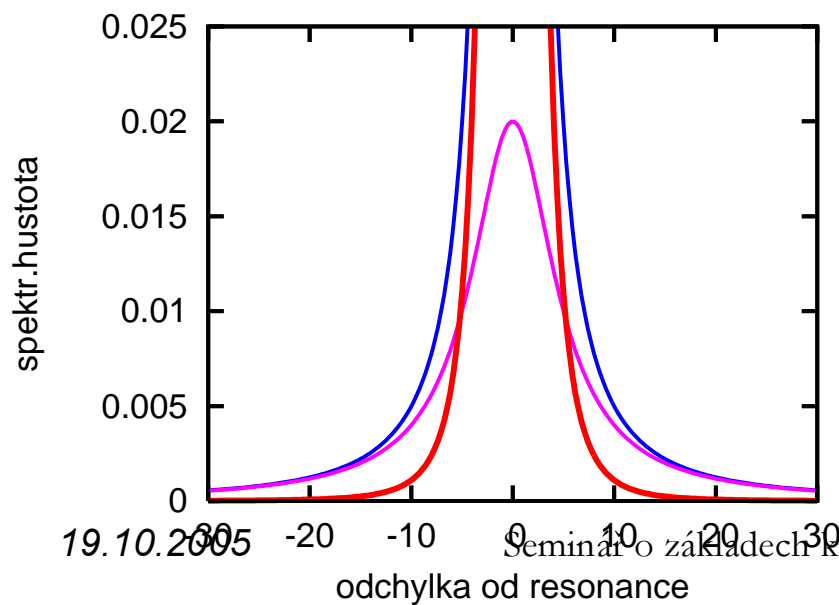
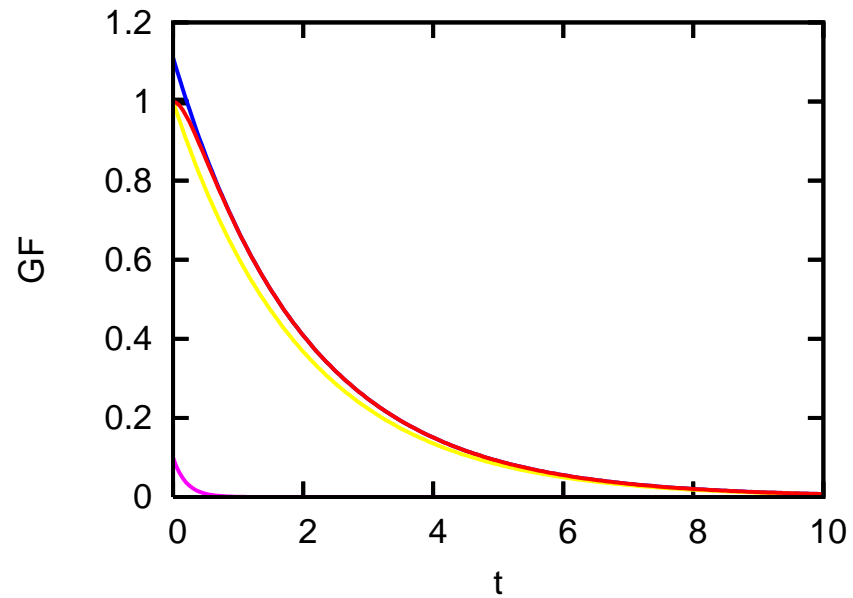
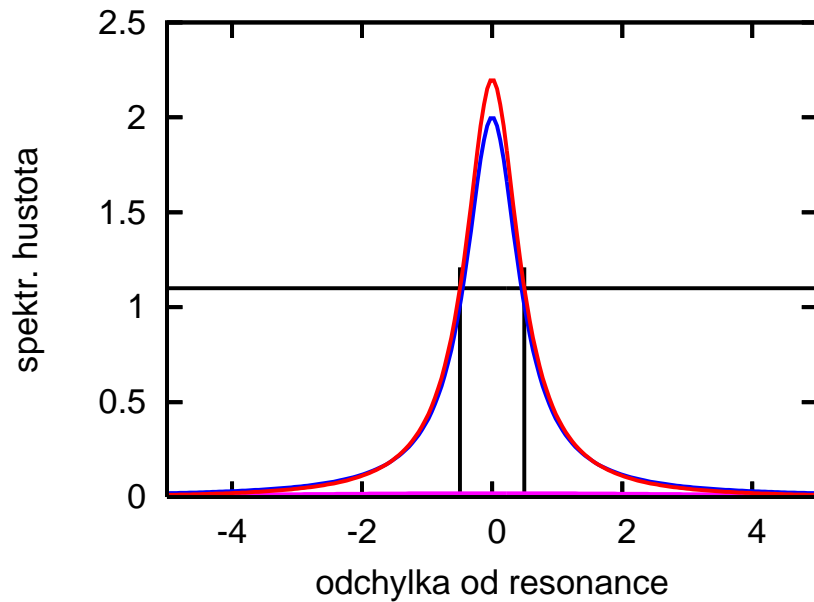
DVĚ CHARAKTERISTIKY

$$\Delta E = \sqrt{p \cdot \Gamma}$$

$$\text{FWHM} = 2 \sqrt{\frac{2p^2}{1+p^2 + \sqrt{(1+p^2)^2 + 4p^2}}} \cdot \Gamma$$



Spektrální hustota a Greenova funkce



Greenova funkce: Dlouhé a krátké časy

GREENOVA FUNKCE PŘESNĚ

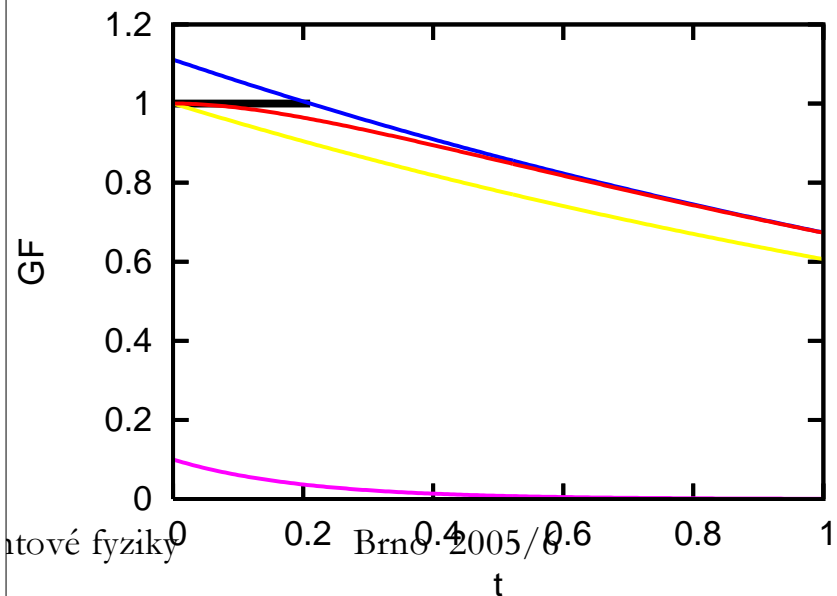
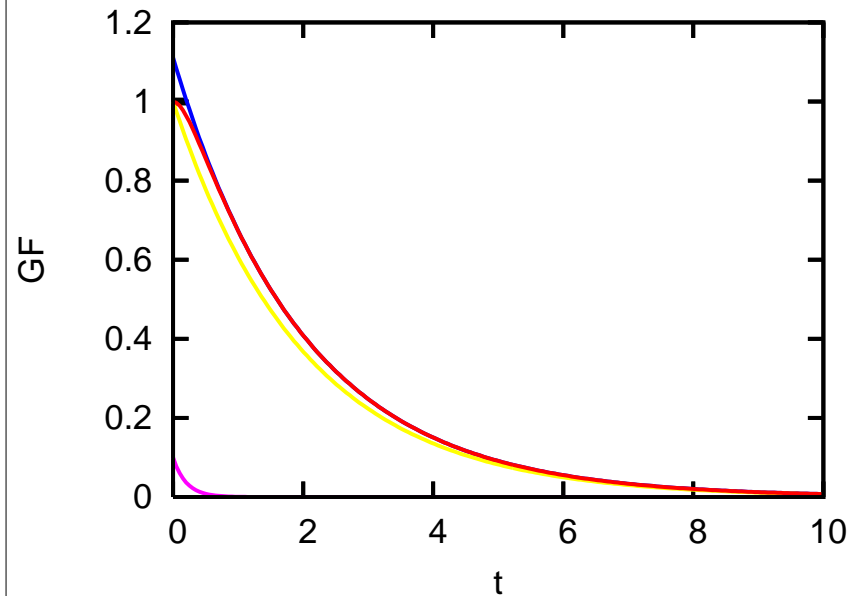
$$G(t) = Z \cdot e^{-\Gamma t/\hbar} - p^{-1} Z \cdot e^{-p\Gamma t/\hbar}$$

$$Z = \frac{p}{p-1}$$

KRÁTKOČASOVÝ ROZVOJ

$$G(t) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{t}{\tau_H} \right)^2 + \dots$$

$$\tau_H = \frac{2}{\sqrt{p}} \cdot \tau$$



Greenova funkce: Charakteristické doby

DLOUHOČASOVÉ CHOVÁNÍ

$$\tau = \frac{\hbar}{2\Gamma}$$

KRÁTKOČASOVÉ CHOVÁNÍ

formovací čas

(collision duration time)

$$\tau_C = \frac{\tau}{p}$$

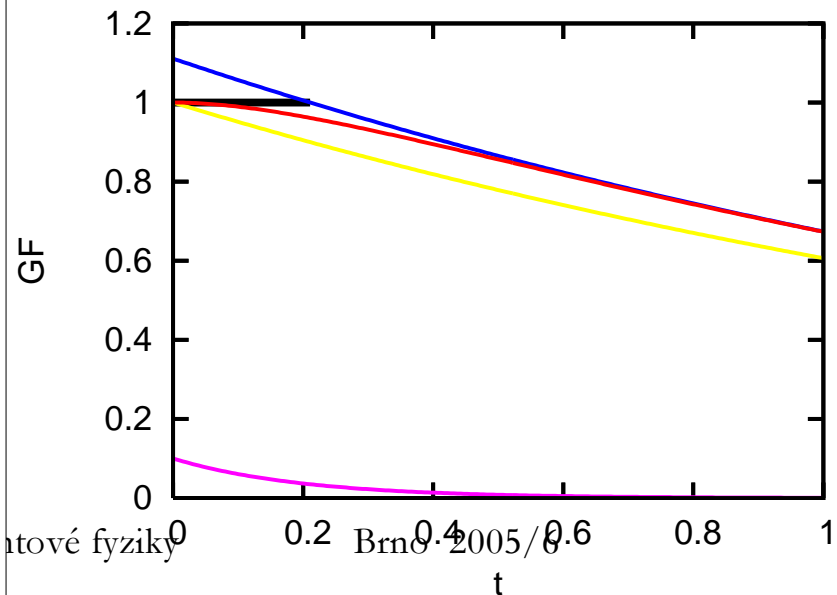
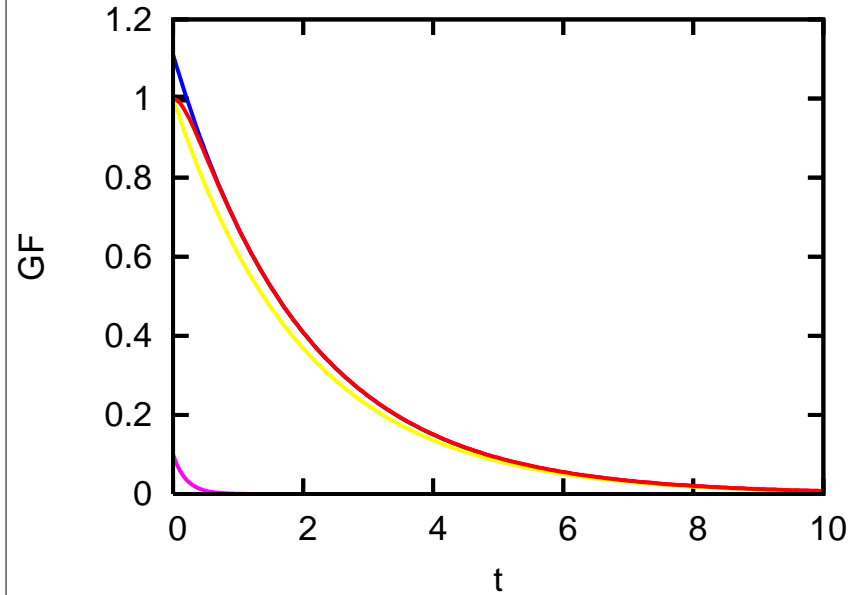
zpoždění

(Wigner delay time)

$$\tau_D = \frac{\ln Z}{2} \cdot \tau$$

počáteční evoluce

$$\tau_H = \frac{2}{\sqrt{p}} \cdot \tau$$



Model pro kvazičástici: kompenzovaný Lorentz

... empiricky se skutečná spektrální hustota sotva dá odlišit od ideální WW kvazičástice

Modelové příklady: pokračování

Postup: zvolíme *modelovou spektrální hustotu* $A(E)$.

K ní dopočteme Fourierovou transformací $G(t)$ a $W(t)$.

Volba spektrální hustoty: základní vlastnosti **1**, **2**, k tomu zjednodušení **3**

① $A(E) \geq 0$ nezáporná ② $\int dE A(E) = 1$ sumační pravidlo

③ $A(+E) = A(-E)$ sudá ③' $\Leftrightarrow G(t)$ je reálná (bez fázových faktorů)

I. Spojité modely

- ✓ Čistá Lorentzova sp. hustota – pól 1. řádu
- ✓ Model kvazičástice – kompensovaná Lorentzova hustota
 - Gaussova sp. hustota – analytická funkce
 - Obdélníková hustota
 - Parabolická hustota – koncové body (body větvení)

II. Diskrétní modely

- Obdélníkový hřeben
- Termodynamická limita

Pro jednoduchost

$$\hbar = 1$$

Modelové příklady: pokračování

Postup: zvolíme *modelovou spektrální hustotu* $A(E)$.

K ní dopočteme Fourierovou transformací $G(t)$ a $W(t)$.

Volba spektrální hustoty: základní vlastnosti **1**, **2**, k tomu zjednodušení **3**

① $A(E) \geq 0$ nezáporná ② $\int dE A(E) = 1$ sumační pravidlo

③ $A(+E) = A(-E)$ sudá ③' $\Leftrightarrow G(t)$ je reálná (bez fázových faktorů)

I. Spojité modely

spojité modely, které nevedou na kvazičástice

- Gaussova sp. hustota – analytická funkce
- Obdélníková hustota
- Parabolická hustota – koncové body (body větvení)

II. Diskrétní modely

- Obdélníkový hřeben
- Termodynamická limita

Pro jednoduchost

$$\hbar = 1$$

Gaussova spektrální hustota

$$A(E) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-\frac{E^2}{a^2}}$$

- analytická v celé komplexní rovině
- nemá póly
- má podstatnou singularitu v ∞

jednoparametrická funkce

Gaussova spektrální hustota

$$A(E) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-\frac{E^2}{a^2}}$$

$$\Delta H = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\text{FWHM} \equiv 2\Gamma = 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{\ln 2}}$$

- analytická v celé komplexní rovině

- nemá póly

- má podstatnou singularitu v ∞

jednparametrická funkce

měřitkový parametr

pro srovnatelnost převedeme na **FWHM**

Gaussova spektrální hustota

$$A(E) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-\frac{E^2}{a^2}}$$

$$\Delta H = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\text{FWHM} \equiv 2\Gamma = 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{\ln 2}}$$

$$G(t) = \int dE e^{-i/\hbar \cdot Et} A(E)$$

$$= e^{-\left(\frac{a}{2\hbar}\right)^2 t^2} \quad t > 0$$

$$\equiv e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot t^2 + \dots$$

Gaussova spektrální hustota

$$A(E) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-\frac{E^2}{a^2}}$$

$$\Delta H = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\text{FWHM} \equiv 2\Gamma = 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{\ln 2}}$$

$$G(t) = \int dE e^{-i/\hbar \cdot Et} A(E)$$

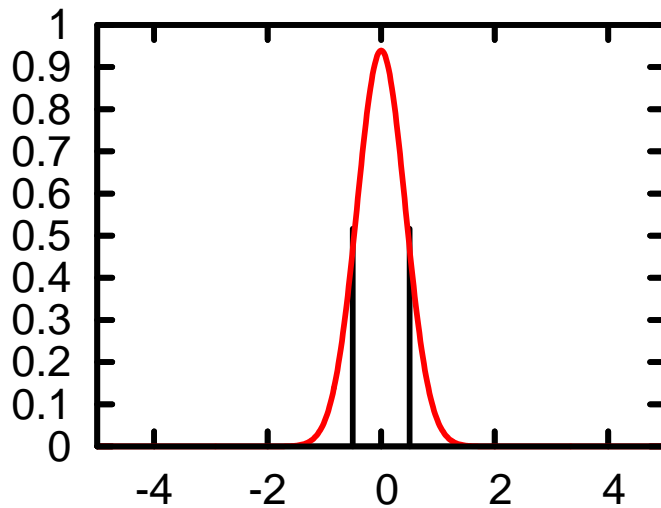
$$= e^{-\left(\frac{a}{2\hbar}\right)^2 t^2} \quad t > 0$$

$$\equiv e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot t^2 + \dots$$

$$\Gamma = 0.5$$

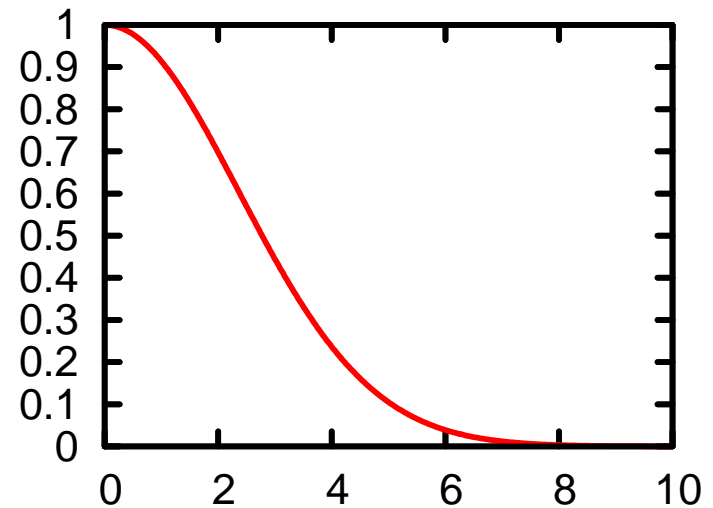
$$\hbar = 1$$

spektr. hustota



odchylka od resonance

GF



t

40

Gaussova spektrální hustota

$$A(E) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-\frac{E^2}{a^2}}$$

$$\Delta H = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\text{FWHM} \equiv 2\Gamma = 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{\ln 2}}$$

$$G(t) = \int dE e^{-i/\hbar \cdot Et} A(E)$$

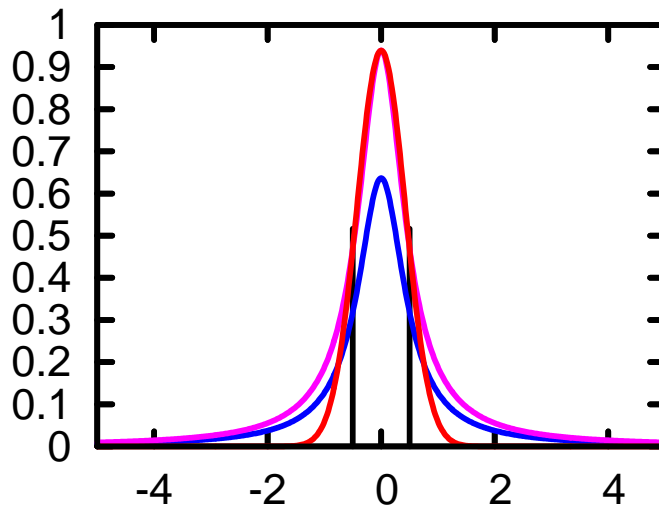
$$= e^{-\left(\frac{a}{2\hbar}\right)^2 t^2} \quad t > 0$$

$$\equiv e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot t^2 + \dots$$

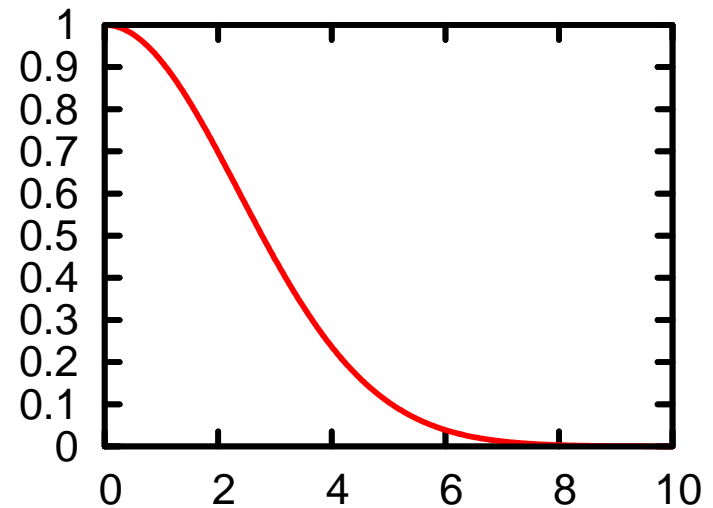
$$\Gamma = 0.5$$

$$\hbar = 1$$

spektr. hustota



GF



19.10.2005

odchylka od resonance

t

41

Obdélníková spektrální hustota

$$A(E) = \frac{1}{2a} \mathcal{G}(E - a) \mathcal{G}(a - E)$$

- nenulová jen na konečném nosiči $\langle -a, a \rangle$
- nemá póly
- má hrany-skoky, tj. body větvení

jednparametrická funkce

Obdélníková spektrální hustota

$$A(E) = \frac{1}{2a} \mathcal{G}(E - a) \mathcal{G}(a - E)$$

$$\Delta H = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\text{FWHM} \equiv 2\Gamma = 2 \cdot a$$

- nenulová jen na konečném nosiči $\langle -a, a \rangle$

- nemá póly

- má hrany- zlomy, tj. body větvení

jednoparametrická funkce

měřitkový parametr

pro srovnatelnost převedeme na **FWHM**

Obdélníková spektrální hustota

$$A(E) = \frac{1}{2a} \mathcal{G}(E - a) \mathcal{G}(a - E) \quad G(t) = \int dE e^{-i/\hbar \cdot Et} A(E)$$
$$\Delta H = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad = \frac{\sin(at\hbar^{-1})}{at\hbar^{-1}} \quad t > 0$$
$$\text{FWHM} \equiv 2\Gamma = 2 \cdot a \quad \equiv \frac{\sin(t/\tau)}{t/\tau} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{3} \cdot t^2 + \dots$$

Obdélníková spektrální hustota

$$A(E) = \frac{1}{2a} \mathcal{G}(E - a) \mathcal{G}(a - E) \quad G(t) = \int dE e^{-i/\hbar \cdot Et} A(E)$$

$$\Delta H = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\text{FWHM} \equiv 2\Gamma = 2 \cdot a$$

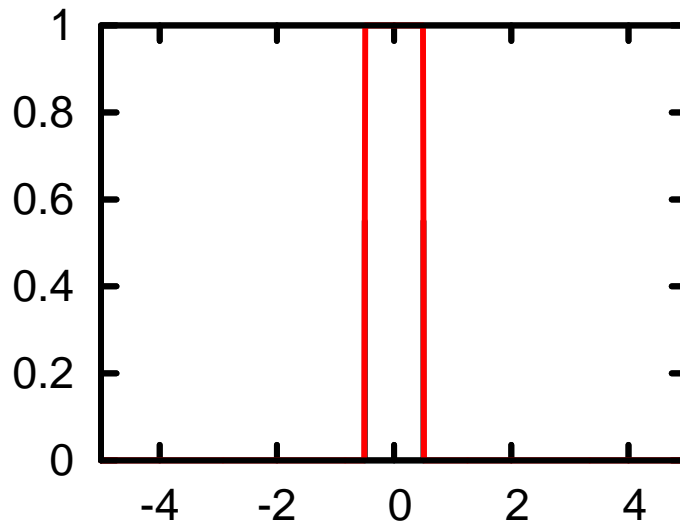
$$= \frac{\sin(at\hbar^{-1})}{at\hbar^{-1}} \quad t > 0$$

$$\equiv \frac{\sin(t/\tau)}{t/\tau} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{3} \cdot t^2 + \dots$$

$\Gamma = 0.5$

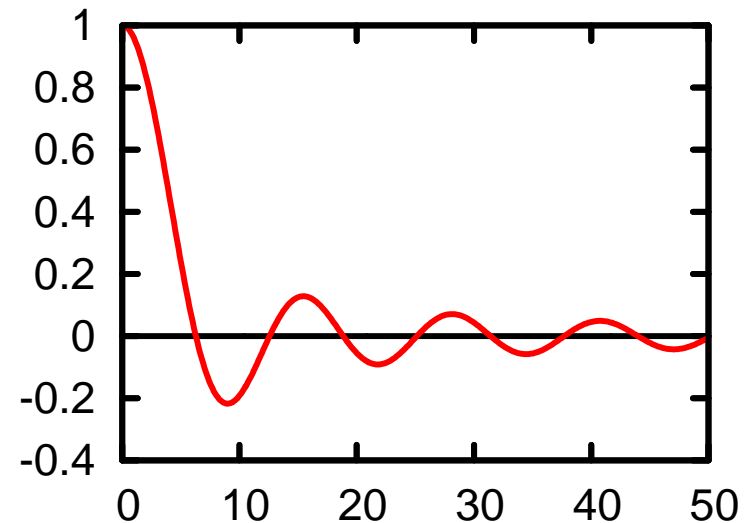
$\hbar = 1$

spektr. hustota



odchylka od resonance

GF



t

19.10.2005

45

Obdélníková spektrální hustota

$$A(E) = \frac{1}{2a} \mathcal{G}(E - a) \mathcal{G}(a - E) \quad G(t) = \int dE e^{-i/\hbar \cdot Et} A(E)$$

$$\Delta H = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\text{FWHM} \equiv 2\Gamma = 2 \cdot a$$

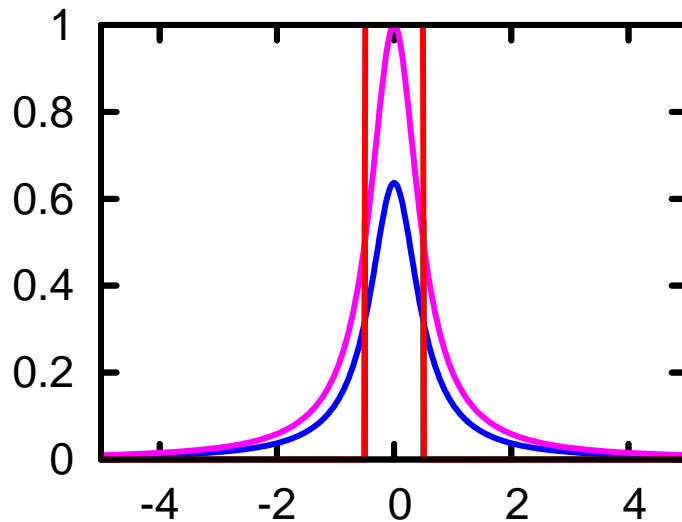
$$= \frac{\sin(at\hbar^{-1})}{at\hbar^{-1}} \quad t > 0$$

$$\equiv \frac{\sin(t/\tau)}{t/\tau} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{3} \cdot t^2 + \dots$$

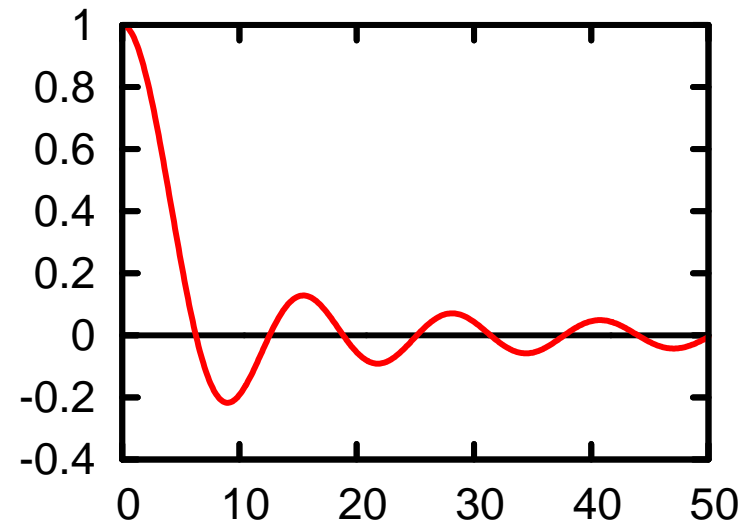
$\Gamma = 0.5$

$\hbar = 1$

spektr. hustota



GF



19.10.2005

odchylka od resonance

t

46

Parabolická spektrální hustota

$$A(E) = \frac{3}{4a^3} (E - a)_+ (a - E)_+$$

- nenulová jen na konečném nosiči $\langle -a, a \rangle$
- nemá póly
- má hrany- zlomy, tj. body větvení

jednoparametrická funkce

Parabolická spektrální hustota

$$A(E) = \frac{3}{4a^3} (E - a)_+ (a - E)_+$$

$$\Delta H = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

$$\text{FWHM} \equiv 2\Gamma = 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}$$

- nenulová jen na konečném nosiči $\langle -a, a \rangle$

- nemá póly

- má hrany- zlomy, tj. body větvení

jednparametrická funkce

měřitkový parametr

pro srovnatelnost převedeme na **FWHM**

Parabolická spektrální hustota

$$A(E) = \frac{3}{4a^3} (E - a)_+ (a - E)_+$$

$$\Delta H = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

$$\text{FWHM} \equiv 2\Gamma = 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$G(t) = \int dE e^{-i/\hbar \cdot Et} A(E)$$

$$= \frac{\sin(at\hbar^{-1}) - at\hbar^{-1} \cos(at\hbar^{-1})}{(at\hbar^{-1})^3}$$

$$\equiv \frac{\sin(t/\tau) - \dots}{(t/\tau)^3} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{5} \cdot t^2 + \dots$$

Parabolická spektrální hustota

$$A(E) = \frac{3}{4a^3} (E - a)_+ (a - E)_+$$

$$\Delta H = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

$$\text{FWHM} \equiv 2\Gamma = 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$G(t) = \int dE e^{-i/\hbar \cdot Et} A(E)$$

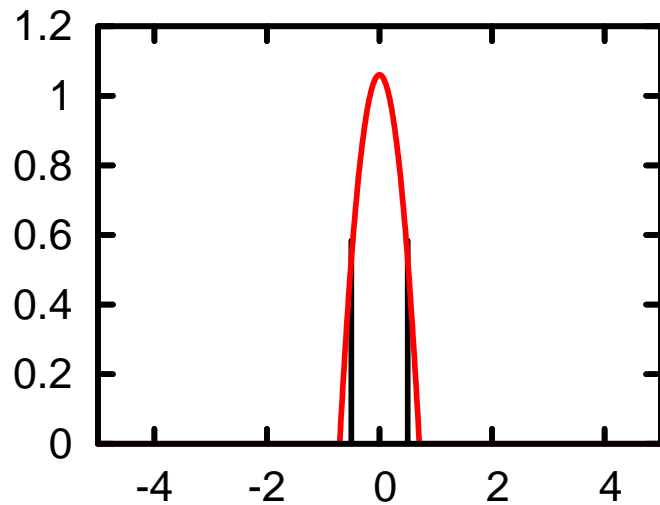
$$= \frac{\sin(at\hbar^{-1}) - at\hbar^{-1} \cos(at\hbar^{-1})}{(at\hbar^{-1})^3}$$

$$\equiv \frac{\sin(t/\tau) - \dots}{(t/\tau)^3} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{5} \cdot t^2 + \dots$$

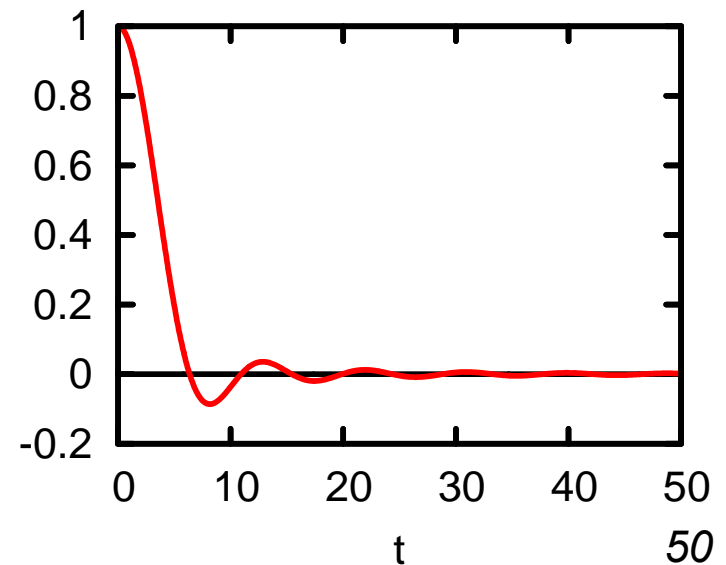
$$\Gamma = 0.5$$

$$\hbar = 1$$

spektr. hustota



GF



19.10.2005

odchylka od resonance

t

50

Parabolická spektrální hustota

$$A(E) = \frac{3}{4a^3} (E - a)_+ (a - E)_+$$

$$\Delta H = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

$$\text{FWHM} \equiv 2\Gamma = 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$G(t) = \int dE e^{-i/\hbar \cdot Et} A(E)$$

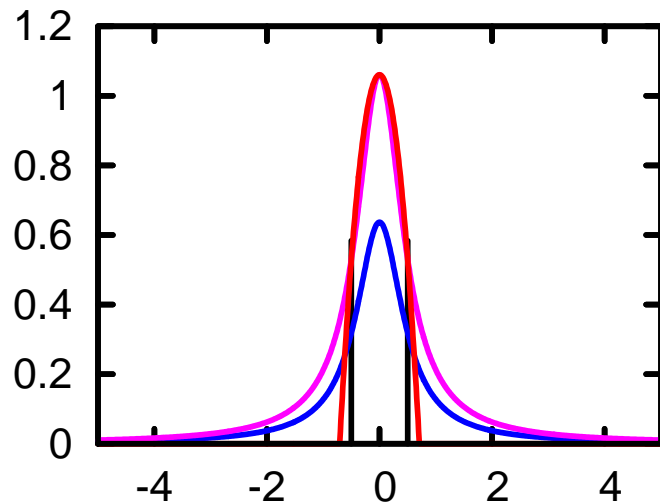
$$= \frac{\sin(at\hbar^{-1}) - at\hbar^{-1} \cos(at\hbar^{-1})}{(at\hbar^{-1})^3}$$

$$\equiv \frac{\sin(t/\tau) - \dots}{(t/\tau)^3} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{5} \cdot t^2 + \dots$$

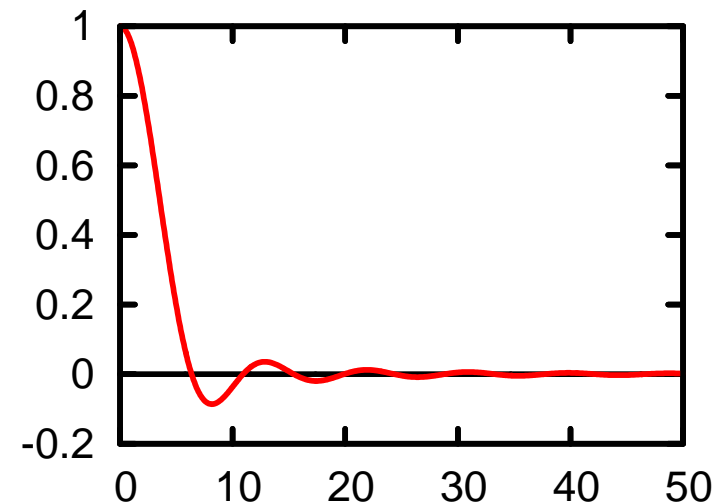
$$\Gamma = 0.5$$

$$\hbar = 1$$

spektr. hustota



GF



19.10.2005

odchylka od resonance

t

51

Různé spojité modely

... vznik WW kvazičástice závisí kriticky na
podrobnostech spektrální hustoty. Hezoučský
"pík" nestačí.

Modelové příklady: pokračování II.

Postup: zvolíme *modelovou spektrální hustotu* $A(E)$.

K ní dopočteme Fourierovou transformací $G(t)$ a $W(t)$.

Volba spektrální hustoty: základní vlastnosti **1**, **2**, k tomu zjednodušení **3**

① $A(E) \geq 0$ nezáporná ② $\int dE A(E) = 1$ sumační pravidlo

③ $A(+E) = A(-E)$ sudá ③' $\Leftrightarrow G(t)$ je reálná (bez fázových faktorů)

I. Spojité modely

- ✓ Čistá Lorentzova sp. hustota – pól 1. řádu
- ✓ Model kvazičástice – kompensovaná Lorentzova hustota
- ✓ Gaussova sp. hustota – analytická funkce
- ✓ Obdélníková hustota
- Parabolická hustota – koncové body (body větvení)

II. Diskrétní modely

- Obdélníkový hřeben
- Termodynamická limita

Pro jednoduchost

$$\hbar = 1$$

Modelové příklady: pokračování II.

Postup: zvolíme *modelovou spektrální hustotu* $A(E)$.

K ní dopočteme Fourierovou transformací $G(t)$ a $W(t)$.

Volba spektrální hustoty: základní vlastnosti **1**, **2**, k tomu zjednodušení **3**

① $A(E) \geq 0$ nezáporná ② $\int dE A(E) = 1$ sumační pravidlo

③ $A(+E) = A(-E)$ sudá ③' $\Leftrightarrow G(t)$ je reálná (bez fázových faktorů)

I. Spojité modely

- ✓ Čistá Lorentzova sp. hustota – pól 1. řádu
- ✓ Model kvazičástice – kompensovaná Lorentzova hustota
- ✓ Gaussova sp. hustota – analytická funkce
- ✓ Obdélníková hustota
- Parabolická hustota – koncové body (body větvení)

II. Diskrétní modely

- Obdélníkový hřeben
- Termodynamická limita

Pro jednoduchost

$$\hbar = 1$$

Diskrétní modely

Jednoduché: máme **Fourierovu řadu** místo **Fourierova integrálu**

Připomínka:

$$\bullet A_D(E) = \sum a_\lambda \delta(E - E_\lambda) \leftrightarrow G_D(t) = \sum a_\lambda e^{-i/\hbar \cdot E_\lambda t}$$

nemá limitu při $t \rightarrow \infty$

ekvidistantní energie
periodická funkce
perioda ...
vzdálenost hladin

nesouměřitelné energie
vícenásobně periodická
funkce (A. Sommerfeld)
téměř periodická funkce
(Harald Bohr *bratr*)

Ve fyzice ale běžně provádíme

termodynamickou limitu:

Hodně hustě shloučené hladiny jakoby

splynou na spojitý pás.

Otázky:

- dá se to formalisovat pro $A(E)$?
- jak dopadne $G(t)$ při $t \rightarrow \infty$?

Diskrétní modely

Jednoduché: máme **Fourierovu řadu** místo **Fourierova integrálu**

Připomínka:

$$\bullet \quad A_D(E) = \sum a_\lambda \delta(E - E_\lambda) \leftrightarrow G_D(t) = \sum a_\lambda e^{-i/\hbar \cdot E_\lambda t}$$

nemá limitu při $t \rightarrow \infty$

ekvidistantní energie
periodická funkce
perioda ...
vzdálenost hladin

nesouměřitelné energie
vícenásobně periodická
funkce (A. Sommerfeld)
téměř periodická funkce
(Harald Bohr *bratr*)

Ve fyzice ale běžně provádíme

termodynamickou limitu:

Hodně hustě shloučené hladiny jakoby

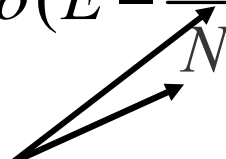
splynou na spojitý pás.

Otázky:

- dá se to formalisovat pro $A(E)$?
- jak dopadne $G(t)$ při $t \rightarrow \infty$?

• ve fyzice se s tím setkáme v
pásové teorii
• v numerické matematice je to
problém Diskrétní Fourierovy transf.

Obdélníkový hřeben

$$A(E) = \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^N \delta\left(E - \frac{na}{N}\right)$$


DVA PARAMETRY

rozdělení nerealistické, ale

snadno zpracovatelné, limita je obdélník

Obdélníkový hřeben

$$A(E) = \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^N \delta\left(E - \frac{na}{N}\right)$$

DVA PARAMETRY

rozdělení nerealistické, ale

snadno zpracovatelné, limita je obdélník

$$G(t) = \int dE e^{-i/\hbar \cdot Et} A(E)$$

$$= \frac{1}{2N+1} \frac{\sin\left(\frac{at}{\hbar} \cdot \frac{2N+1}{2N}\right)}{\sin\left(\frac{at}{\hbar} \cdot \frac{1}{2N}\right)}$$

$$\square \frac{\sin(at\hbar^{-1})}{at\hbar^{-1}} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{3} \cdot t^2 + \dots$$

Obdélníkový hřeben

$$A(E) = \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^N \delta\left(E - \frac{na}{N}\right)$$

DVA PARAMETRY

rozdělení nerealistické, ale

snadno zpracovatelné, limita je obdélník

$$G(t) = \int dE e^{-i/\hbar \cdot Et} A(E)$$

$$= \frac{1}{2N+1} \frac{\sin\left(\frac{at}{\hbar} \cdot \frac{2N+1}{2N}\right)}{\sin\left(\frac{at}{\hbar} \cdot \frac{1}{2N}\right)}$$

$$\square \frac{\sin(at\hbar^{-1})}{at\hbar^{-1}} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{3} \cdot t^2 + \dots$$

o tom více

Obdélníkový hřeben

$$A(E) = \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^N \delta\left(E - \frac{na}{N}\right)$$

$$G(t) = \int dE e^{-i/\hbar \cdot Et} A(E)$$

DVA PARAMETRY

rozdělení nerealistické, ale

snadno zpracovatelné, limita je obdélník

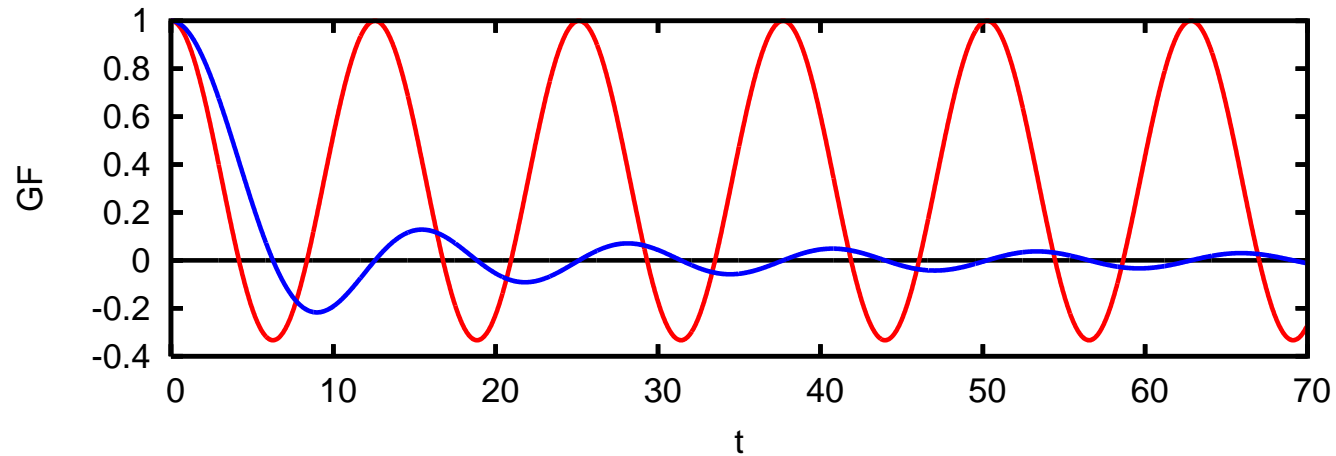
$$= \frac{1}{2N+1} \frac{\sin\left(\frac{at}{\hbar} \cdot \frac{2N+1}{2N}\right)}{\sin\left(\frac{at}{\hbar} \cdot \frac{1}{2N}\right)}$$

ϕ

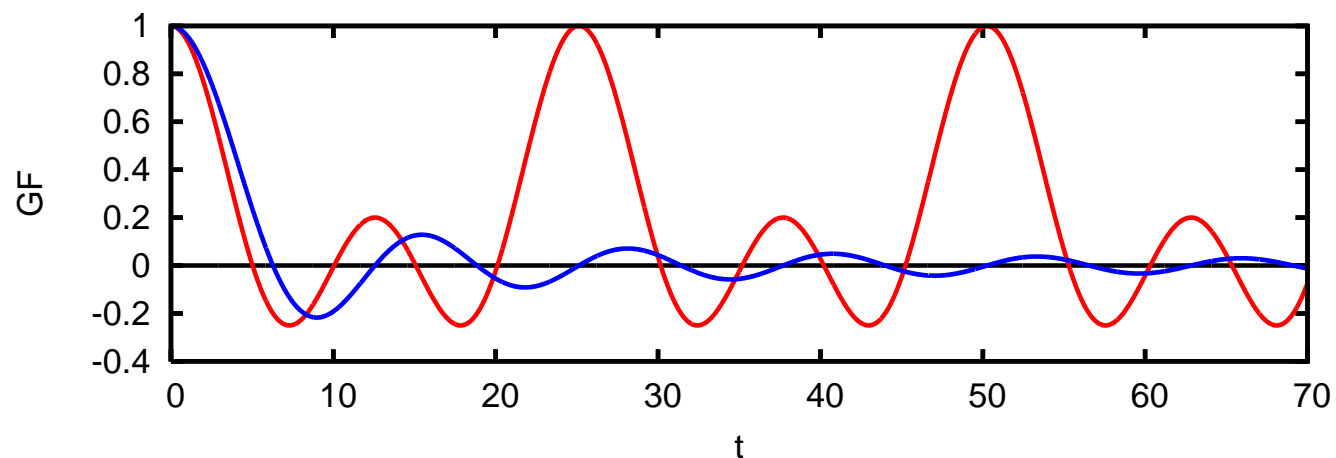
$$G(t) = \frac{1}{2N+1} \frac{\sin(2N+1)\phi}{\sin\phi} = \frac{1}{2N+1} \left\{ \sin 2N\phi \frac{\cos\phi}{\sin\phi} + \cos 2N\phi \right\}$$

Obdélníkový hřeben

— $G_N(t)$ — $G_{\text{Rectangle}}(t)$



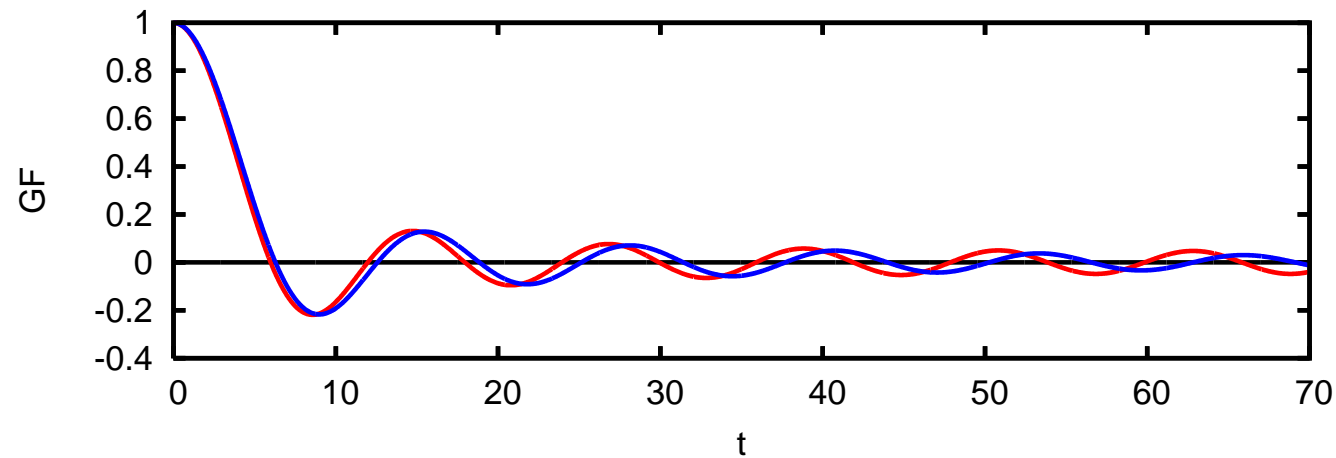
$N = 1$



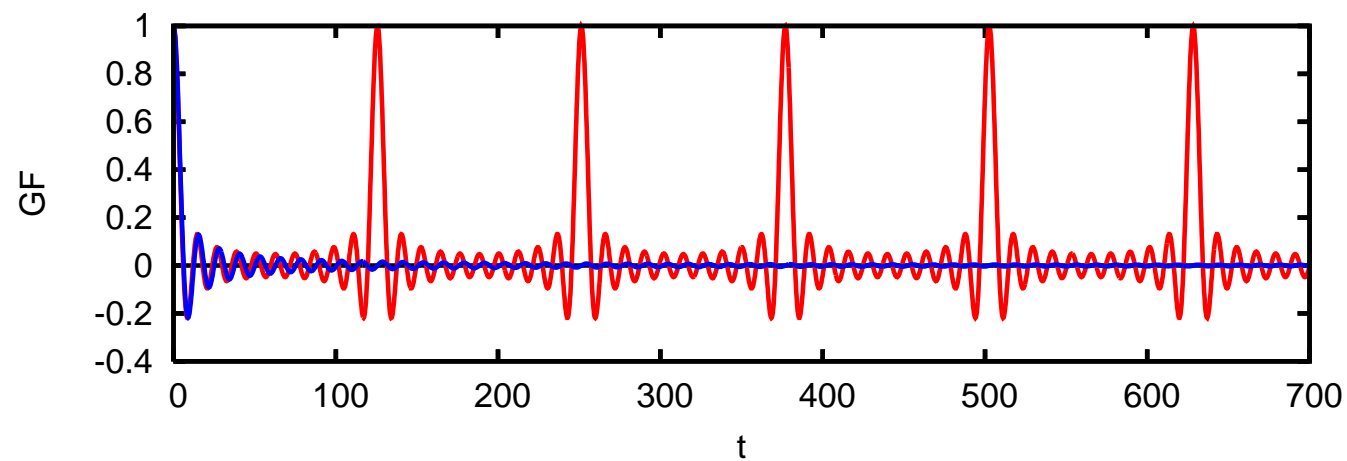
$N = 2$

Obdélníkový hřeben

— $G_N(t)$ — $G_{\text{Rectangle}}(t)$

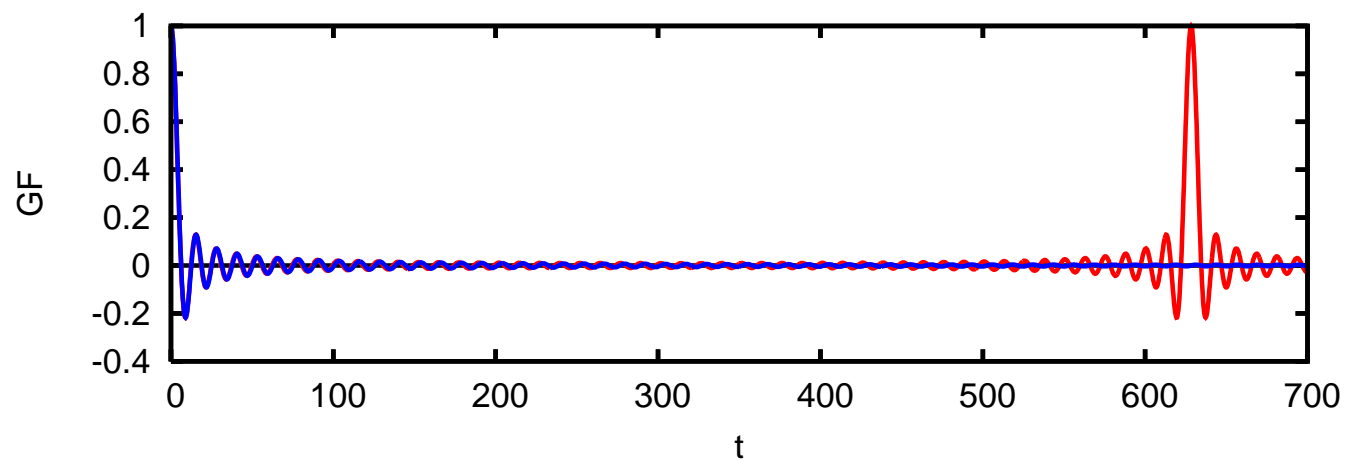
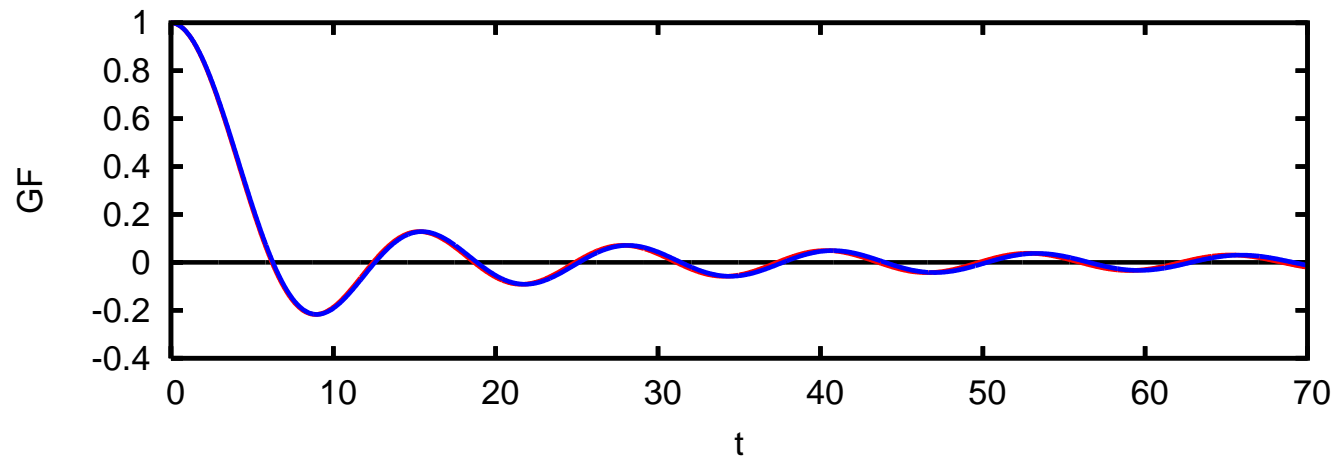


$N = 10$



Obdélníkový hřeben

———— $G_N(t)$ ———— $G_{\text{Rectangle}}(t)$



Termodynamická limita

... hladiny musejí být tak husté, že Poincarého cyklus je nejdelší doba v celé úloze.

Hlavně delší, než pozorovací doba.

The end

Modelové příklady: úvodní poznámky

JEDNOTKY

... vlastně na nich nezáleží, ale pro názornost volím jednotky vhodné pro GF v CM

energie	1 eV	$1,602 \times 10^{-19}$ J
čas	1 fs	$1,000 \times 10^{-15}$ s
\hbar	$0,6582 \sim \frac{2}{3}$ eV.fs	$1,055 \times 10^{-34}$ J.s

Modelové příklady: úvodní poznámky

JEDNOTKY

... vlastně na nich nezáleží, ale pro názornost volím jednotky vhodné pro GF v CM

energie	1 eV	$1,602 \times 10^{-19}$ J
čas	1 fs	$1,000 \times 10^{-15}$ s
\hbar	$0,6582 \sim \frac{2}{3} \text{ eV} \cdot \text{fs}$	$1,055 \times 10^{-34}$ J.s
délka	1 nm	$1,000 \times 10^{-9}$ m
c	299,8 nm/fs	$2,998 \times 10^8$ m/s
α	1/137,0	1/137,0
m_e	5,685	$9,109 \times 10^{-31}$ kg
e^2	1,440	$2,306 \times 10^{-34}$ J.m