

# VI.

*KVAZISTACIONÁRNÍ STAVY a RELACE  $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$   
TUNELOVÁNÍ Z REZONANČNÍCH STAVŮ  
Oppenheimerova formule a Bardeenova teorie*

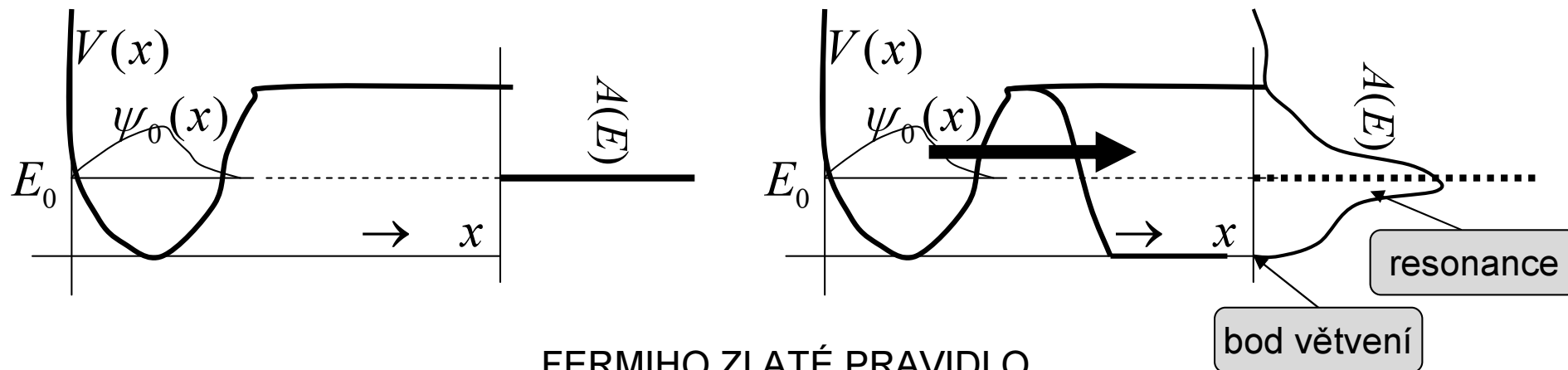
8.3.2006

*PŘIPOMENUTÍ A KRITICKÉ  
SHRNUTÍ ÚVAH Z MINULA*

# 5.10.2005: Modelové příklady

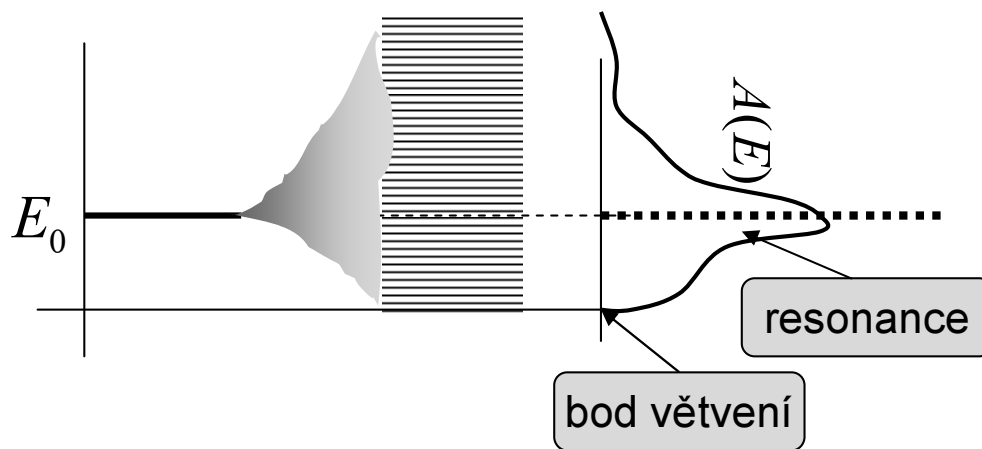
## TUNELOVÁNÍ ( $\alpha$ -ROZPAD)

... bariera v reálném prostoru odděluje konečnou a nekonečnou oblast



## FERMIHO ZLATÉ PRAVIDLO

... diskretní hladina je slabě vázána na překrývající kontinuum stavů



## 2.11.2005: *Modelové příklady*

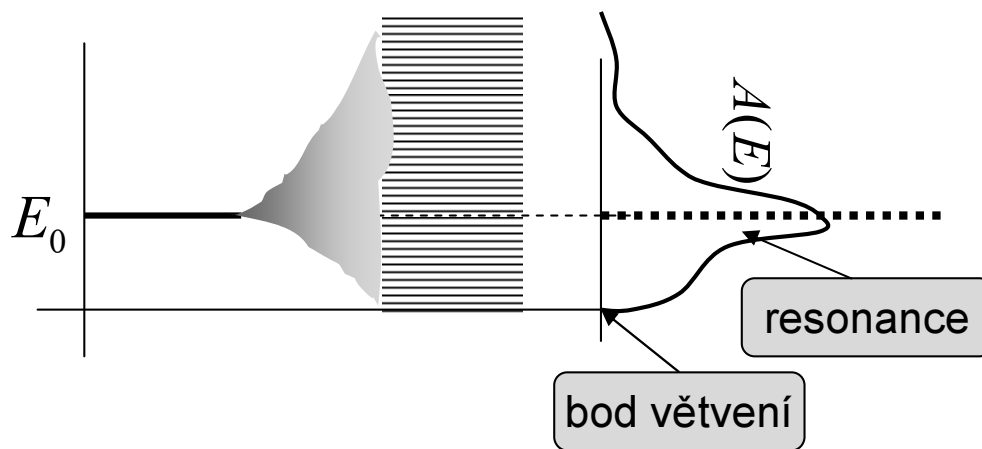
### TUNELOVÁNÍ ( $\alpha$ -ROZPAD)

... bariera v reálném prostoru odděluje konečnou a nekonečnou oblast



### MODELOVÝ HAMILTONIÁN

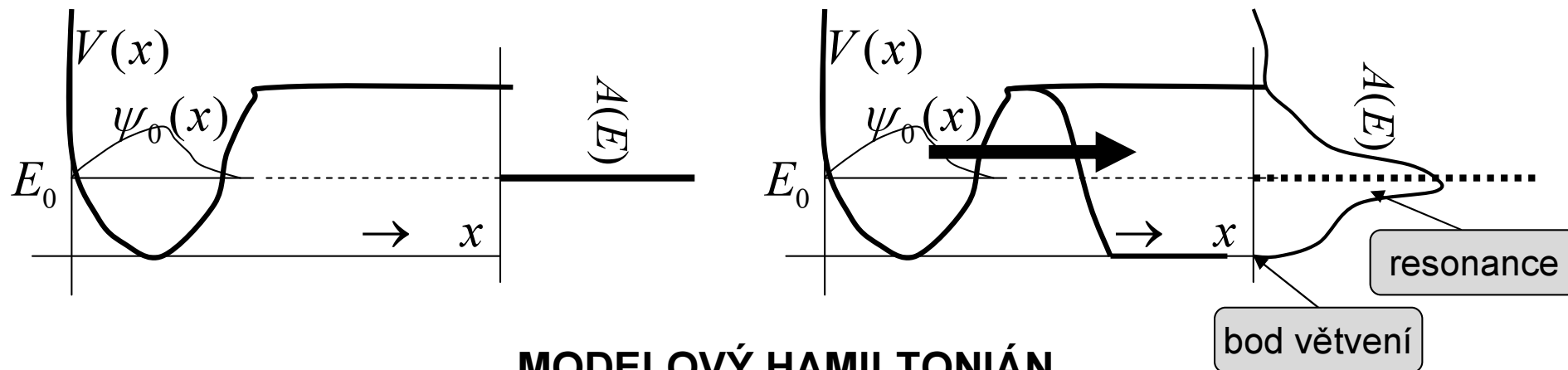
... diskretní hladina je slabě vázána na překrývající kontinuum stavů



# 9.11.2005: *Modelové příklady*

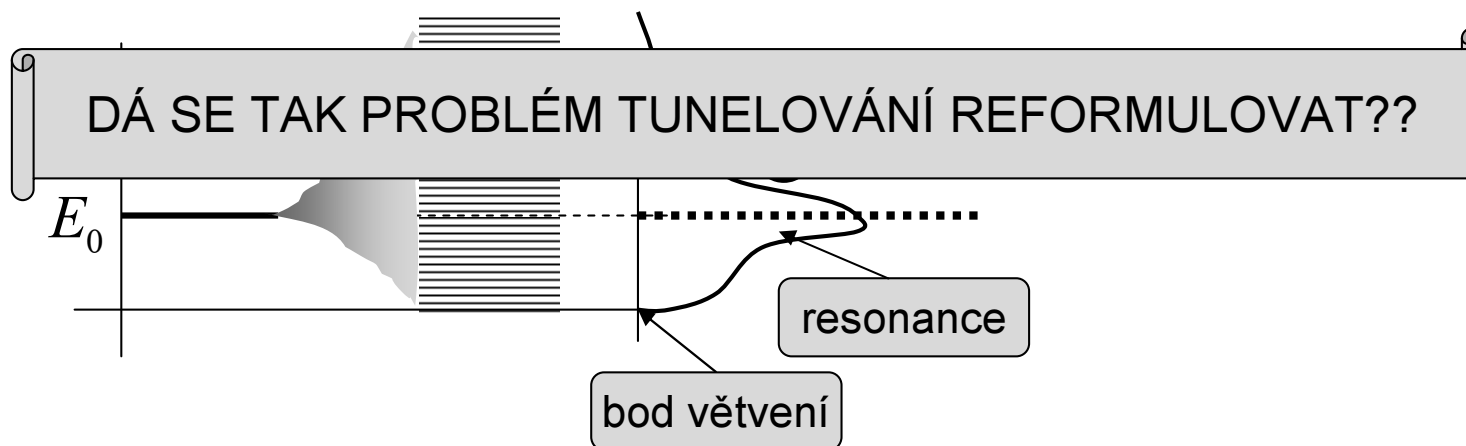
## TUNELOVÁNÍ ( $\alpha$ -ROZPAD)

... bariera v reálném prostoru odděluje konečnou a nekonečnou oblast

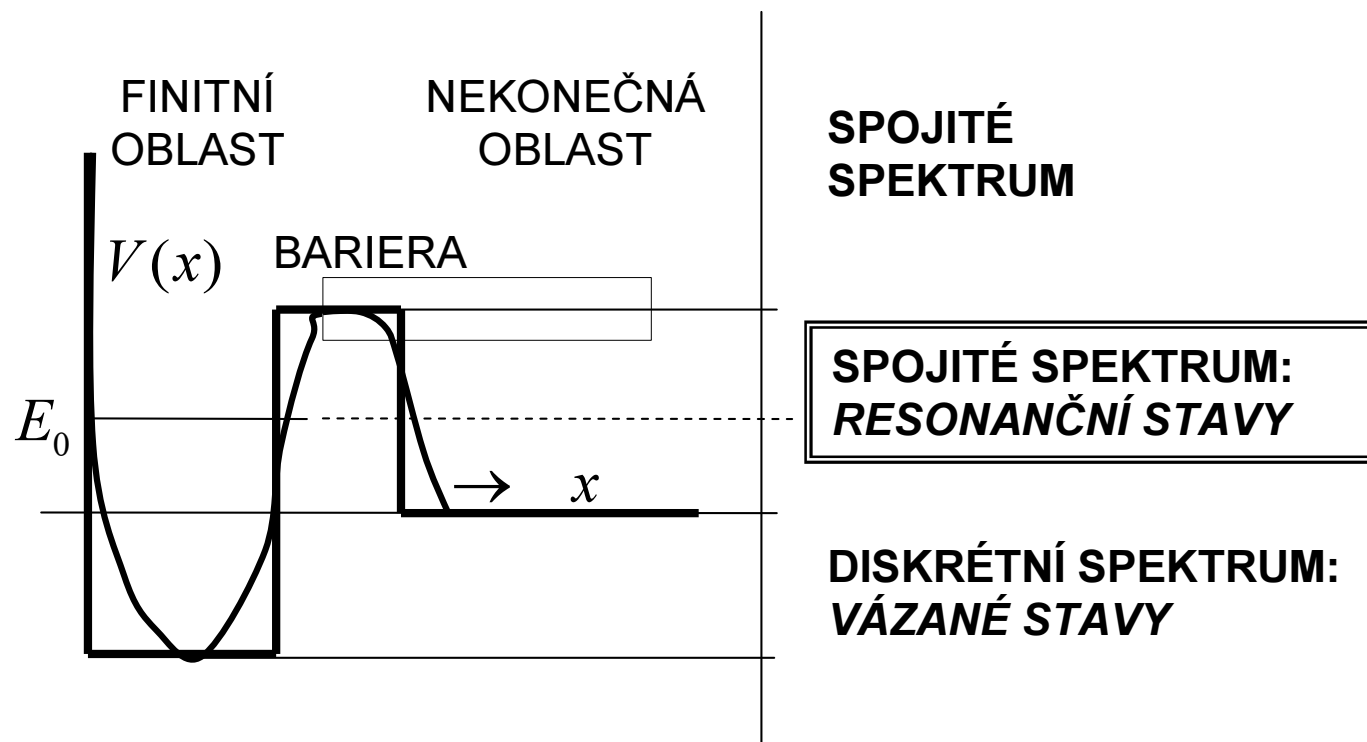


## MODELOVÝ HAMILTONIÁN

... diskretní hladina je slabě vázána na překrývající kontinuum stavů



## 9.11.2005: *Model tunelovacího rozpadu: pravoúhelná bariéra*

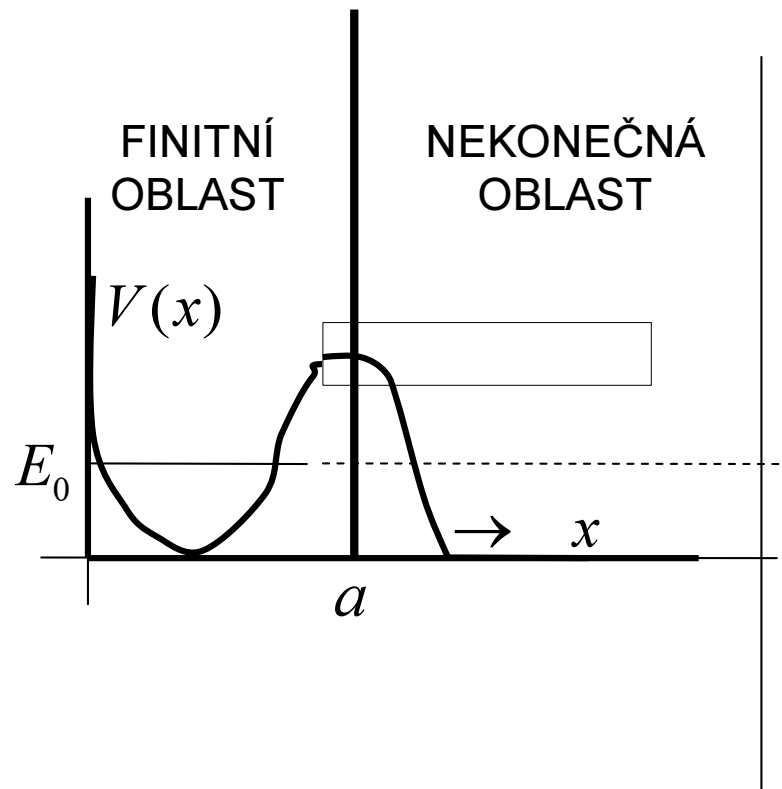


vystihuje dobře

- prostorovou strukturu modelu
- rozložení spektrálních oblastí

kvalitativní rozdíl: ostré hrany bariery jsou "ultrakvantové"

# 9.11.2005: Model tunelovacího rozpadu: delta bariera



**SPOJITÉ SPEKTRUM:  
RESONANČNÍ STAVY**

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{m} K \delta(x - a)$$

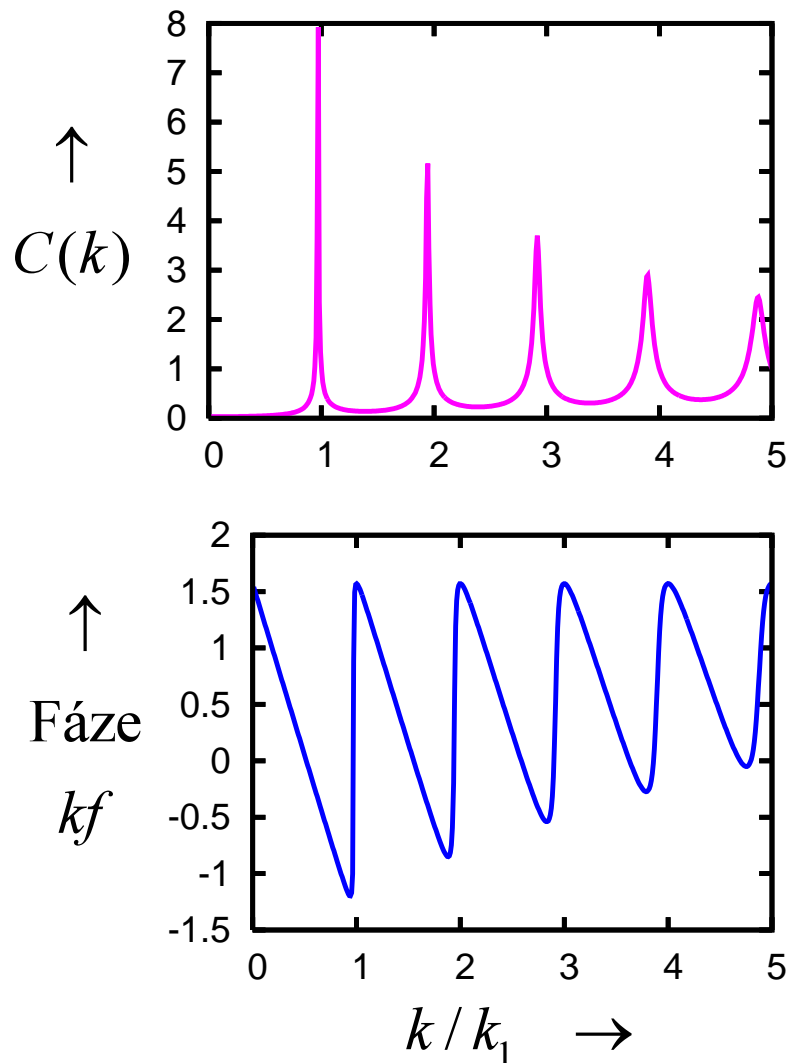
vystihuje jen kvalitativně

- prostorovou strukturu modelu
- spektrální oblast rezonančních stavů

nejjednodušší myslitelný model, jen dva parametry

# 9.11.2005: *delta* bariera: numerická ilustrace

$$K = 4$$

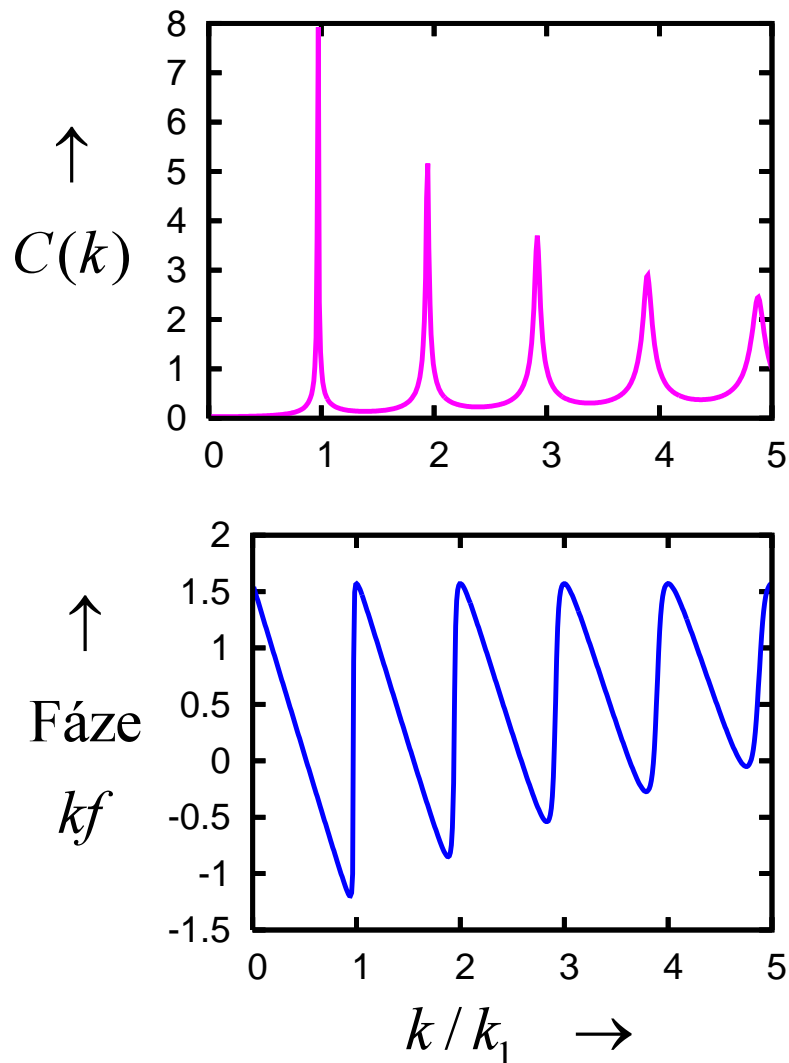


serie resonancí

- blízko diskretních stavů izolované jámy
- poloha renormalisována směrem dolů
- s rostoucím  $n$  se resonance rozšiřují
- skok fáze – ideálně  $\pi$  -- se postupně zmenšuje



# 9.11.2005: *delta bariera: numerická ilustrace*



$$K = 4$$

serie resonancí

- blízko diskretních stavů izolované jámy
- poloha renormalisována směrem dolů
- s rostoucím  $n$  se resonance rozšiřují
- skok fáze – ideálně  $\pi$  -- se postupně zmenšuje

$$\psi_k(x) = C \sin kx \quad \Bigg| \quad \psi_k(x) = \sin k(x - f)$$

$$0 < x < a \quad \Bigg| \quad a < x < \infty$$

## 9.11.2005: Slabé kvantování (kvazistacionární stavy)

Zkusíme tlumenou kvazistacionární vlnovou funkci

$$\Psi(x, t) = \psi(x) \times e^{-i(E-i\Gamma)t/\hbar}, \quad \Gamma > 0$$

Dosazením do Schrödingerovy rovnice dostáváme

$$\psi(x) = F \sin \tilde{k}x \quad \text{pro } 0 < x < a$$

$$\psi(x) = e^{i\tilde{k}x} \quad \text{pro } a < x < \infty$$

$F$  komplexní,

$$\tilde{k} = k' - ik'', \quad E - i\Gamma = \frac{\hbar^2}{2m} (k' - ik'')^2$$



rozbíhavá  
vlna

## 9.11.2005: Slabé kvantování (kvazistacionární stavy)

### FYZIKÁLNÍ VÝZNAM KVAZISTACIONÁRNÍHO STAVU

- V každé konečné oblasti pravděpodobnosti exponenciálně ubývá (*rozpad stavu*)

- Asymptoticky

$$\Psi(x, t) = e^{+i(k' - ik'')x} \times e^{-i(E - i\Gamma)t/\hbar}$$

$$= e^{+ik'(x - \frac{\hbar}{2m}k't)} \times e^{+k''(x - \frac{\hbar}{m}k't)}$$

fázová rychlost

grupová rychlost

## 5.12.2005: *Kritický pohled*

- Veličiny  $C$  a  $f$  jsou
  - ♠ modelově závislé charakteristiky
  - ♠ vlnových funkcí kontinua
  - ♠ resonance jsou patrné, ale souvislost s rozpadem ne
- Pracná cesta ke spektrální hustotě – z definice sumací po vlastních funkcích, ne úplně jasná – a proto ani nenastoupená
- Metoda slabého kvantování je
  - ♠ intuitivně lákavá a inspirující, ale
  - ♠ přesný význam zůstává nejasný
  - ♠ nevede k systematickému kvantitativnímu formalismu

**PANACEA (VŠELÉK):  
METODA RESOLVENTY "GREENOVY FUNKCE"**

## 5.12.2005: O resolventě (trochu rozšířené opakování)

DEFINICE

$$\hat{G}(z) = \frac{1}{z - \hat{H}} c$$

holomorfní pro  $z \in \mathbf{C} \div \mathbf{R}$

$$\hat{G}(z^*) = \hat{G}^\dagger(z)$$

na reálné ose jako limitní funkce, ale distribuce

$$\hat{G}(E \pm i0) = \hat{G}'(E \pm i0) + i\hat{G}''(E \pm i0) = \frac{\wp}{E - \hat{H}} \mp i\pi\delta(E - \hat{H})$$

Fourierova transformace : retardovaná evoluce včetně rozpadu

$$\hat{G}(t) = \int \frac{dE}{2\pi\hbar} e^{-i/\hbar \cdot Et} \hat{G}(E + i0) \leftrightarrow \hat{G}(E + i0) = \int dt e^{+i/\hbar \cdot Et} \hat{G}(t)$$

Výraz pro spektrální hustotu

$$A(E) = \langle 0 | \hat{A}(E) | 0 \rangle \quad \text{pro libovolný } |0\rangle$$

$$\hat{A}(E) = \delta(E - \hat{H}) = \mp \frac{1}{\pi} \hat{G}''(E \pm i0)$$

## 5.12.2005: *Přímá metoda (direct method) sestavení resolventy*

Hodí se hlavně pro 1D problémy, ale ne jenom

Definiční rovnice

$$(z - \hat{H})\hat{G}(z) = \hat{1}, \quad \hat{G}(z)(z - \hat{H}) = \hat{1}$$

přepíšeme v souřadnicové reprezentaci jako nehomog. Schrödingerovy rovnice

$$\left( z + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} - U(x) \right) G(x, x'; z) = \delta(x - x'), \quad \left( z + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx'^2} - U(x') \right) G(x, x'; z) = \delta(x - x')$$

GF je v obou proměnných symetrická.

Pro každé  $z$  má homog. SR dvě nezávislá řešení. Zvolíme ta, která splňují vždy jednu z obou okrajových podmínek,

$$\psi^<(x) \text{ vlevo, } \psi^>(x) \text{ vpravo}$$

Pak

$$G(x, x'; z) = C \times \left\{ \psi^>(x) \psi^<(x') \mathcal{G}(x - x') + \psi^>(x') \psi^<(x) \mathcal{G}(x' - x) \right\}$$

## 5.12.2005: *Přímá metoda (direct method) sestavení resolventy*

konstantu najdeme sešitím na nehomogenitě. Integrací v okolí delta funkce:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{d}{dx} G(x'+0, x'; z) - \frac{d}{dx} G(x'-0, x'; z) \right) = 1$$
$$C \times \frac{\hbar^2}{2m} \underbrace{\left\{ \frac{d}{dx} \psi^>(x') \psi^<(x') - \psi^>(x') \frac{d}{dx} \psi^<(x') \right\}}_{\text{Wronskián SR ... je konstantní!!!}} = 1$$

## 5.12.2005: *Resolventa pro model s delta bariérou*

$$C = \frac{2m}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{-K - 2B \sin Ka e^{iKa}} = -\frac{2m}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{K + B \sin 2Ka + iB(1 - \cos 2Ka)}$$

### MOŽNOSTI

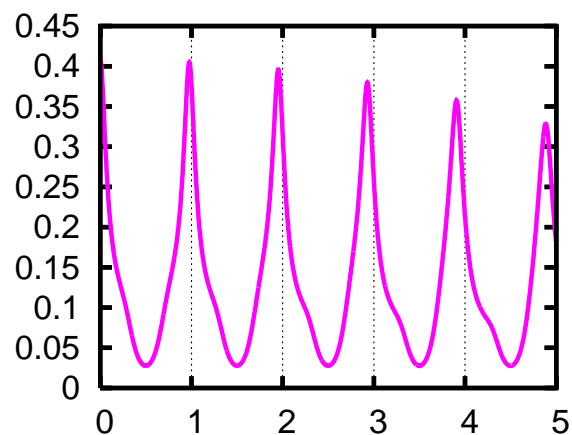
1. kvalitativní rozbor
2. numerický výpočet podél reálné osy
3. hledání komplexních pólů



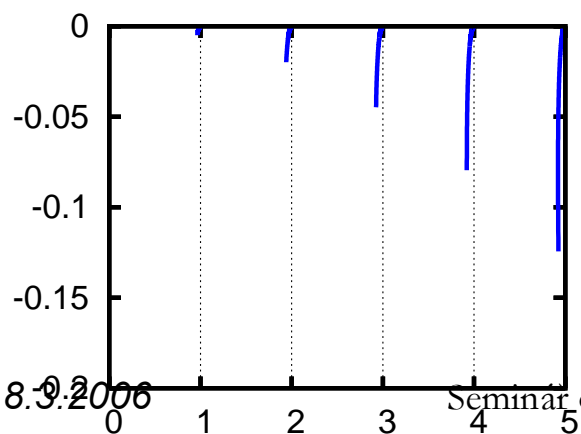
# 5.12.2005: Resolventa pro model s delta barierou

$$C = \frac{2m}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{-K - 2B \sin Ka e^{iKa}} = -\frac{2m}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{K + B \sin 2Ka + iB(1 - \cos 2Ka)}$$

AD hledání pólů GF ... z rovnice  $C^{-1} = 0$



$|C|$  pro  $B = 5$



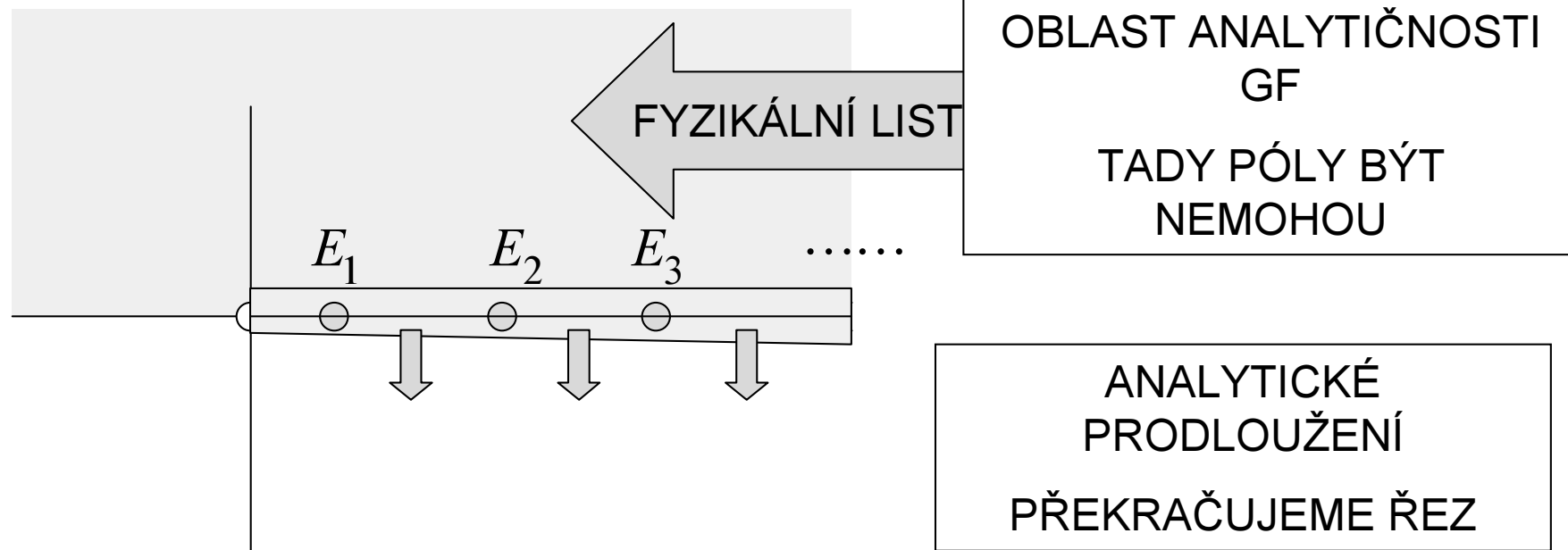
trajektorie pólů  $K_n(B)$

pro  $B = 100 \square 5$  (nejprůhlednější)

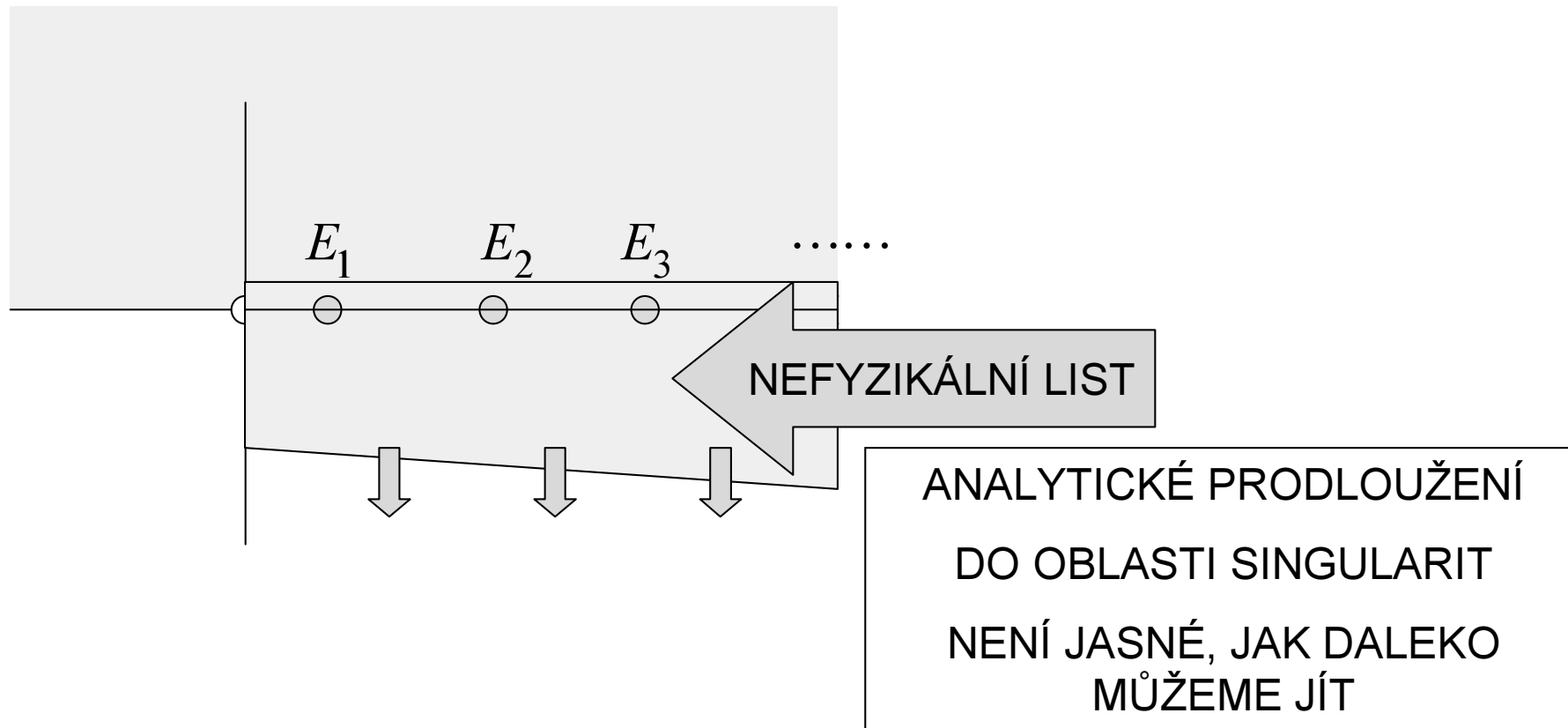
povšimněte si roztažené imaginární osy!!

● póly lezou do záporné poloroviny. To je milé pro energie, podivné, ale nutné pro  $k$ -vektory

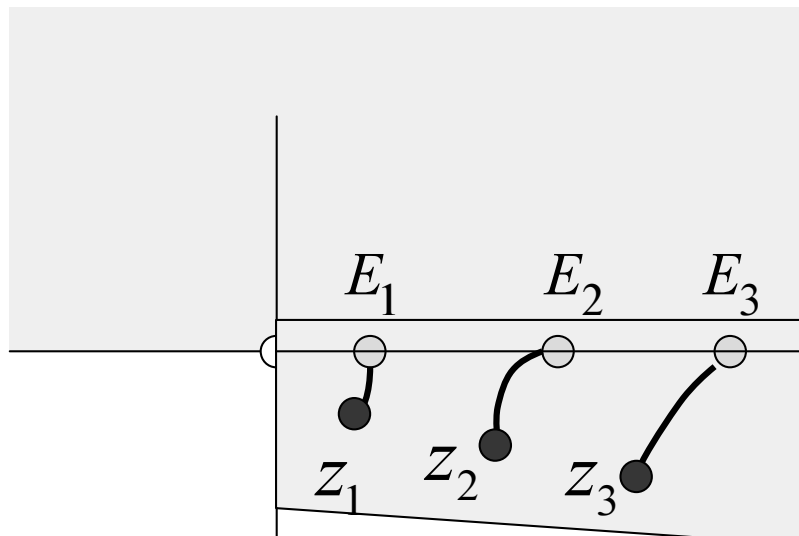
## 5.12.2005: *Póly GF na nefyzikálním listu*



## 5.12.2005: *Póly GF na nefyzikálním listu*



## 5.12.2005: *Póly GF na nefyzikálním listu*



ZAPNUTÍ INTERAKCÍ  
ISOLOVANÉ PÓLY SE  
NA REÁLNÉ OSE ROZPLYNOU  
V RESONANČNÍ KONTINUUM  
**TO ODRÁŽÍ PÓLY LEŽÍCÍ NA  
NEFYZIKÁLNÍM LISTU**

v okolí pólu máme

$$\hat{G}(z) = \frac{\text{Res} \hat{G}(z_n)}{z - z_n} + \hat{O}(1)$$

$$\text{Res} \hat{G}(z_n) = (z - z_n) \hat{G}(z) + (z - z_n) \hat{O}(1)$$

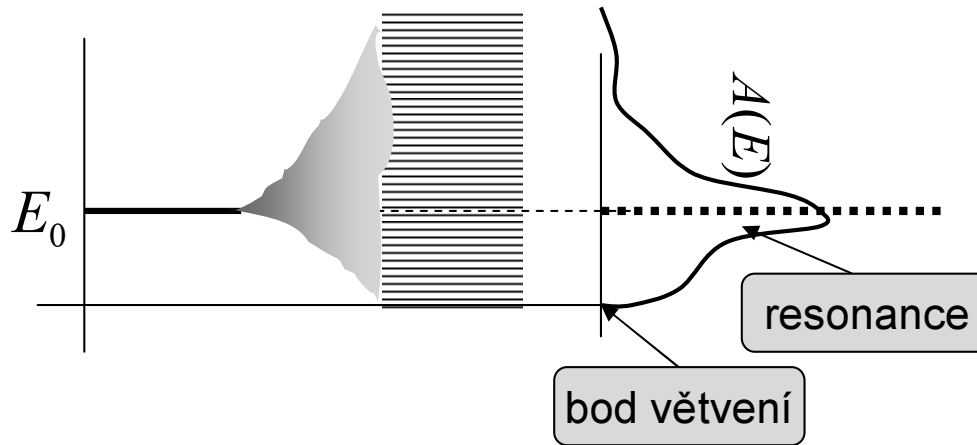
$$(z - \hat{H}) \text{Res} \hat{G}(z_n) = (z - z_n) \hat{1} + (z - \hat{H})(z - z_n) \hat{O}(1)$$

v limitě

$$(z_n - \hat{H}) \text{Res} \hat{G}(z_n) = 0$$

## 2.11.2005: *Modelový Hamiltonián*

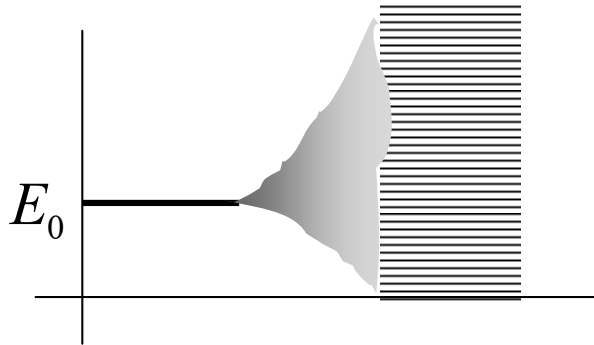
... diskretní hladina je vázána na kontinuum stavů



$$\hat{H} = \underbrace{|a\rangle E_a \langle a| + \sum_b |b\rangle E_b \langle b|}_{\hat{H}_0} + \underbrace{\sum_b \{|a\rangle u_b \langle b| + |b\rangle u_b^* \langle a|\}}_{\hat{U}}$$

## 2.11.2005: *Modelový Hamiltonián*

... diskretní hladina je vázána  
na kontinuum hladin



V Hilbertově prostoru stavů zavedu  
projektory na oba ortogonální podprostory

	$P$	$Q$
$P$	$H_0$	$U$
$Q$	$U$	$H_0$

$$\hat{P} = |a\rangle\langle a|$$

$$\hat{Q} = \sum_b |b\rangle\langle b|$$

$$\hat{P}^2 = \hat{Q} \quad \hat{Q}^2 = \hat{Q}$$

$$\hat{P}\hat{Q} = \hat{Q}\hat{P} = 0$$

$$\hat{H} = \underbrace{|a\rangle E_a \langle a| + \sum_b |b\rangle E_b \langle b|}_{\hat{H}_0} + \underbrace{\sum_b \{ |a\rangle u_b \langle b| + |b\rangle u_b^* \langle a| \}}_{\hat{U}}$$

$$\hat{H} = \hat{P}\hat{H}_0\hat{P} + \hat{Q}\hat{H}_0\hat{Q} + \hat{P}\hat{U}\hat{Q} + \hat{Q}\hat{U}\hat{P}$$

# 2.11.2005: Pólová aproximace (Wigner-Weisskopf)

holá energie

renormalizace

$$G(E + i0) = \frac{1}{E + i0 - E_a - \Sigma(E + i0)}$$

přesně

$$G(E + i0) = \frac{1}{E + i0 - E_a - \Sigma_a - \Sigma'_a \cdot (E - E_a)}$$

$$= \frac{Z_a}{E + i0 - z_a}$$

linearisace

renorm.  
konst.

pól

$$\Sigma_a = \Sigma(E_a + i0) \quad \Sigma'_a = \frac{\partial}{\partial E} \Sigma(E_a + i0)$$

$$Z_a = \frac{1}{1 - \Sigma'_a} \quad z_a = E_a + \frac{\Sigma_a}{1 - \Sigma'_a}$$

## 2.11.2005: Zacházení s Dysonovou rovnicí

VLASTNÍ ENERGIE

V časech

$$\Sigma(t-t') = \langle a | \hat{U} \hat{Q} \hat{G}_0(t-t') \hat{Q} \hat{U} | a \rangle$$

Explicitně

$$= \frac{1}{i\hbar} \sum_b |u_b|^2 e^{-iE_b(t-t')/\hbar} \mathcal{G}(t-t')$$

V energiích

$$\Sigma(E+i0) = \sum_b \frac{|u_b|^2}{E - E_b + i0}$$

Spektrální  
representace

$$= \int d\eta \frac{1}{E + i0 - \eta} \underbrace{\sum_b |u_b|^2 \delta(\eta - E_b)}_{\Gamma(\eta)}$$



**Máme všechno**

Analogie spektrální hustoty pro GF:  
Jediná funkce, určuje vše ostatní



*Vztah modelů v reálném prostoru  
a  
abstraktního Andersona*

... vlastně „tunneling Hamiltonian“ a explicitních  
barierových modelů

## *Celková situace*

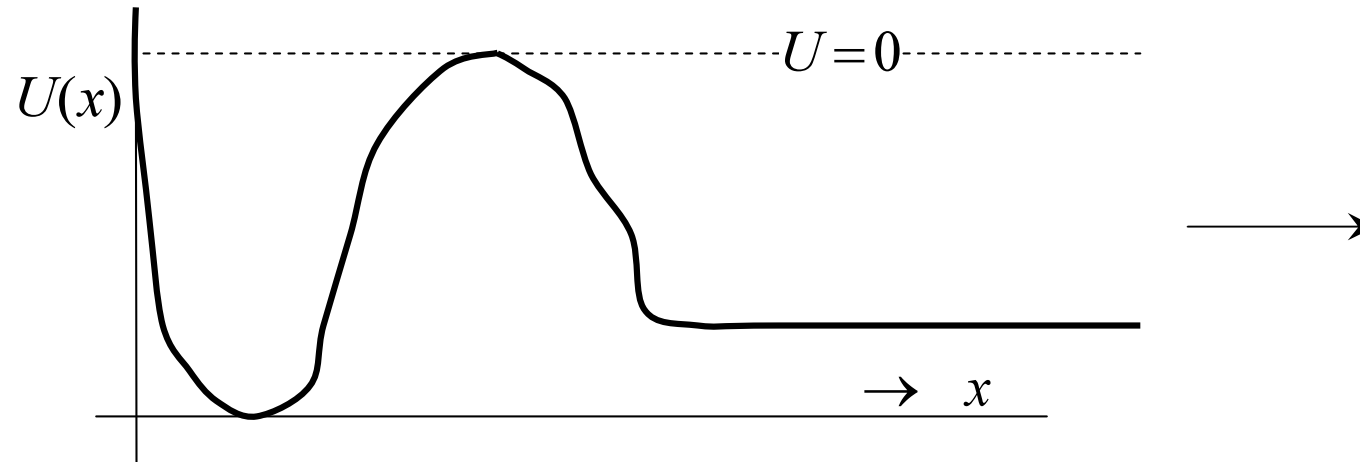
- Pro tunelování z vázaného stavu máme několik technik, z nichž univerzální a spolehlivá je metoda hledání komplexních pólů resolventy na nefyzikálním listu.
- Pro rozpad stavu do kontinua máme modelový Hamiltonián (abstraktní Anderson), který je vlastně zvláštní případ tzv. tunelovacích Hamiltoniánů
- Také ten vede nakonec na hledání pólů (své) resolventy, kterou umíme explicitně napsat v obecném případě.
- Obojí přístup ale zůstává nespojený, protože tunelování v reálném prostoru není zapsáno ve formě (slabé) poruchy spojující vnitřek a vnějšek oddělené bariérou.

Dnes předvedu propoj na úrovni Fermiho Zlatého Pravidla

- Oppenheimerovu formuli
- Bardeenovu teorii transfer Hamiltoniánu

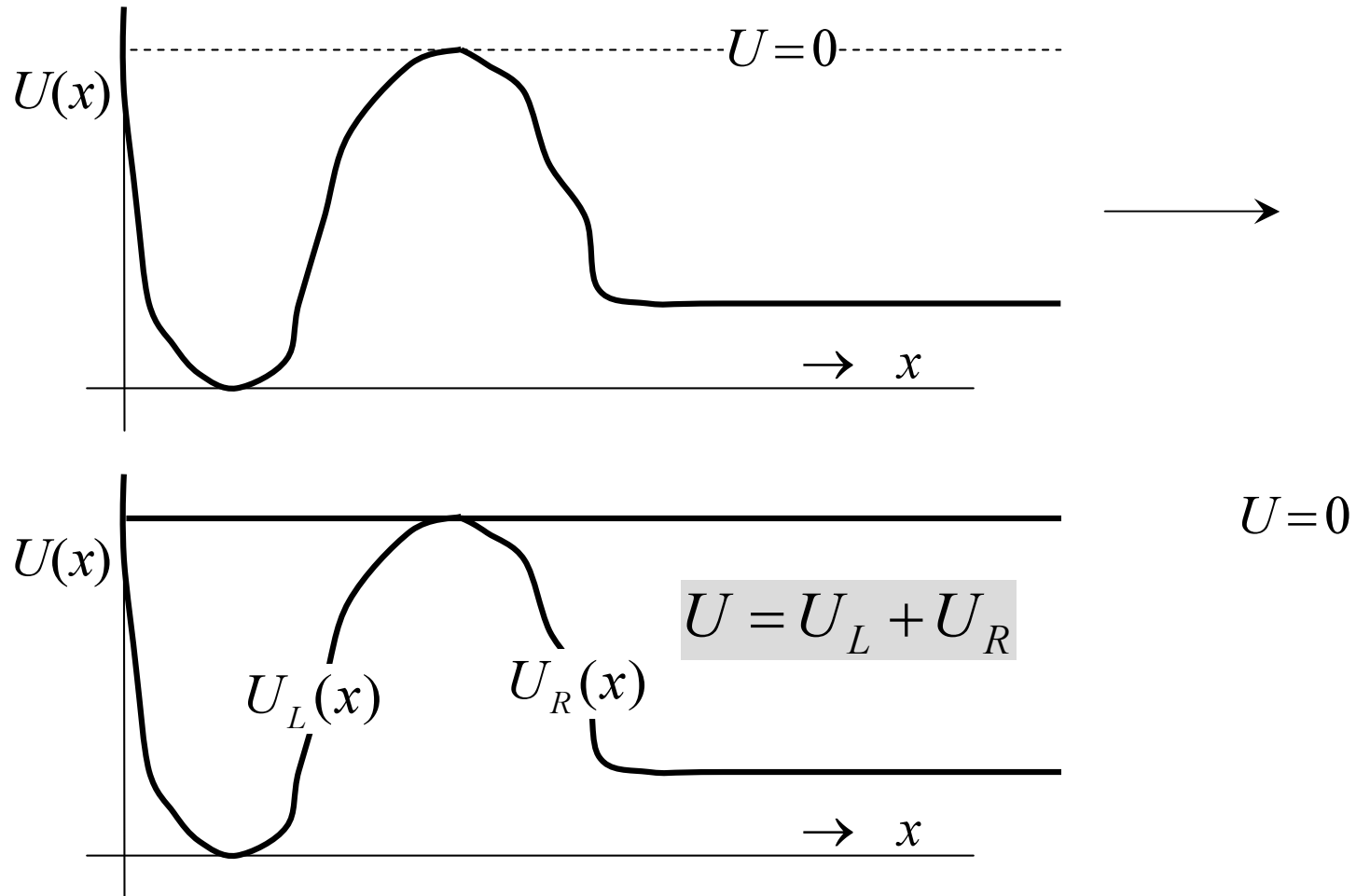
# *Hamiltoniány: rozklad potenciální energie*

UPOZORNĚNÍ Výklad bude sledovat ideje původců, ale není věrně historický



# Hamiltoniány: rozklad potenciální energie

UPOZORNĚNÍ Výklad bude sledovat ideje původců, ale není věrně historický



# Hamiltoniány

$$H = W + U(x),$$

$$W = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta$$

$$H = W + U_L + U_R$$

Oppenheimerův rozklad

$$H = \underbrace{W + U_L}_{H_L} + \underbrace{W + U_R}_{H_R} - W$$

Bardeenův rozklad

# Hamiltoniány

$$H = W + U(x), \quad W = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta$$

$$H = W + U_L + U_R \quad \text{Oppenheimerův rozklad}$$

$$H = \underbrace{W + U_L}_{H_L} + \underbrace{W + U_R}_{H_R} - W \quad \text{Bardeenův rozklad}$$

$$H_L \psi_0 = E_0 \psi_0 \quad \text{bound state}$$

$$H_R \psi_\nu = E_\nu \psi_\nu \quad \text{continuum}$$

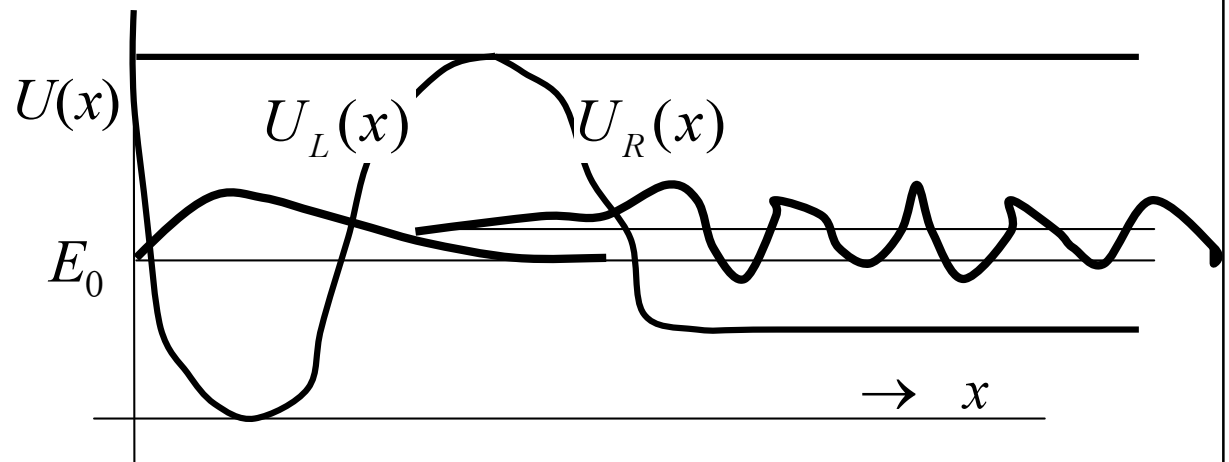
dva spektrální rozklady

dvě base

Hilbertova prostoru  $L_2(\langle 0, \infty))$

nejsou ortogonální

„ale ne moc“ *Oppenheimer*



# Oppenheimerův postup

POZNÁMKA levé vlnové funkce jsou v principu lineární kombinace pravých  
pracujeme tedy s „overcomplete basis“

Časový formalismus

$$i\partial_t\psi(t) = H\psi(t), \quad \psi(0) = \psi_0$$

Ansatz

$$\psi(t) = \psi_0 e^{-iE_0t} + \sum c_\nu(t)\psi_\nu e^{-iE_\nu t}$$

Postup je jako u obyčejné variace konstant. Přesný ekvivalent Schröding. rovn.:

$$i\partial_t c_\nu = \langle \nu | U_R | 0 \rangle e^{i(E_\nu - E_0)t} + \int d\mu \langle \nu | U_L | \mu \rangle c_\mu e^{i(E_\nu - E_\mu)t}$$

porucha pro  $L$  funkci

porucha pro  $R$  funkce

# Oppenheimerův postup

POZNÁMKA levé vlnové funkce jsou v principu lineární kombinace pravých  
pracujeme tedy s „overcomplete basis“

Časový formalismus

$$i\partial_t\psi(t) = H\psi(t), \quad \psi(0) = \psi_0$$

Ansatz

$$\psi(t) = \psi_0 e^{-iE_0t} + \sum c_\nu(t)\psi_\nu e^{-iE_\nu t}$$

Postup je jako u obyčejné variace konstant. Přesný ekvivalent Schröding. rovn.:

$$i\partial_t c_\nu = \langle \nu | U_R | 0 \rangle e^{i(E_\nu - E_0)t} + \int d\mu \langle \nu | U_L | \mu \rangle c_\mu e^{i(E_\nu - E_\mu)t}$$

zanedbáme do nejnižšího řádu



## Oppenheimerův postup

$$i\partial_t c_\nu = \langle \nu | U_R | 0 \rangle e^{i(E_\nu - E_0)t}$$

$$c_\nu(t) = -i \langle \nu | U_R | 0 \rangle \int_0^t d\bar{t} e^{i(E_\nu - E_0)\bar{t}}$$

## Oppenheimerův postup

$$i\partial_t c_\nu = \langle \nu | U_R | 0 \rangle e^{i(E_\nu - E_0)t}$$

$$c_\nu(t) = -i \langle \nu | U_R | 0 \rangle \int_0^t d\bar{t} e^{i(E_\nu - E_0)\bar{t}}$$

$$|c_\nu(t)|^2 = 4 |\langle \nu | U_R | 0 \rangle|^2 \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(E_\nu - E_0)t}{(E_\nu - E_0)^2}$$

## Oppenheimerův postup

$$i\partial_t c_\nu = \langle \nu | U_R | 0 \rangle e^{i(E_\nu - E_0)t}$$

$$c_\nu(t) = -i \langle \nu | U_R | 0 \rangle \int_0^t d\bar{t} e^{i(E_\nu - E_0)\bar{t}}$$

$$|c_\nu(t)|^2 = 4 |\langle \nu | U_R | 0 \rangle|^2 \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(E_\nu - E_0)t}{(E_\nu - E_0)^2}$$

$$\rightarrow 2\pi |\langle \nu | U_R | 0 \rangle|^2 \delta(E_\nu - E_0) \times t$$

první odvození Zl. pravidla v historii

## Oppenheimerova formule

$$i\partial_t c_\nu = \langle \nu | U_R | 0 \rangle e^{i(E_\nu - E_0)t}$$

$$c_\nu(t) = -i \langle \nu | U_R | 0 \rangle \int_0^t d\bar{t} e^{i(E_\nu - E_0)\bar{t}}$$

$$|c_\nu(t)|^2 = 4 |\langle \nu | U_R | 0 \rangle|^2 \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(E_\nu - E_0)t}{(E_\nu - E_0)^2}$$

$$\rightarrow 2\pi |\langle \nu | U_R | 0 \rangle|^2 \delta(E_\nu - E_0) \times t$$

první odvození Zl. pravidla v historii

$$\mathcal{W}_{\nu \leftarrow 0} = 2\pi |\langle \nu | U_R | 0 \rangle|^2 \delta(E_\nu - E_0)$$

hustota pravděpodobnosti přechodu/sec/joule

# Oppenheimerova formule vs. Fermiho Zlaté Pravidlo

## OPPENHEIMEROVA FORMULE

$$W_{\nu \leftarrow 0} = 2\pi \left| \langle \nu | U_R | 0 \rangle \right|^2 \delta(E_\nu - E_0)$$

$$\begin{aligned}
 H &= W + U(x) & H_L \psi_0 &= E_0 \psi_0 \\
 H &= \underbrace{W + U_L + U_R}_{H_L} & H_R \psi_\nu &= E_\nu \psi_\nu \\
 & & \langle \nu | 0 \rangle &\neq 0
 \end{aligned}$$

Formálně dobře do tohoto 1.řádu

Zpřesnění i jen na Wignera-Weisskopfa nejasné (J R Op. ... 2.řád)

Využití pro tunelování jasné a korektní

Podmínka platnosti

slabá neortogonalita ... málo průhledná bariera

## FERMIHO ZLATÉ PRAVIDLO

$$W_{\nu \leftarrow 0} = 2\pi \left| \langle \nu | U | 0 \rangle \right|^2 \delta(E_\nu - E_0)$$

$$\begin{aligned}
 H &= H_0 + U & H_{0L} \psi_0 &= E_0 \psi_0 \\
 &\underbrace{H_{0L} + H_{0R}} & H_{0R} \psi_\nu &= E_\nu \psi_\nu \\
 & & \langle \nu | 0 \rangle &= 0
 \end{aligned}$$

Formálně dobře do 1.řádu

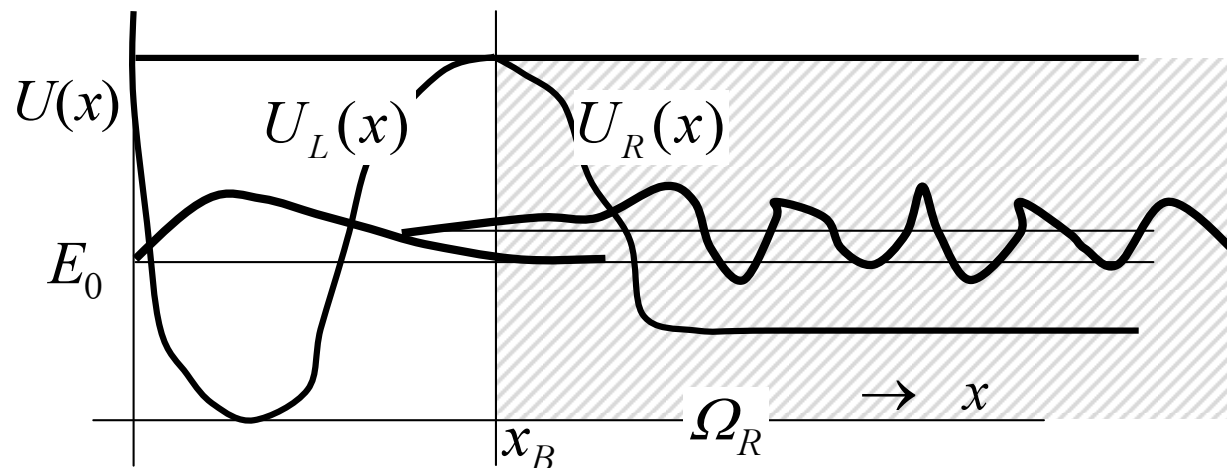
Zpřesnění na W-W i stanovení celé Greenovy funkce exaktní a přímočaré

Využití pro tunelování fenomenologické

Podmínka platnosti

slabá vazba L--R ... malý operátor  $U$

## *Ke kritériu pro Oppenheimerovu formuli*



$$\langle \nu | U_R | 0 \rangle = \int_{\Omega_R} dx \psi_\nu^*(x) U_R(x) \psi_0(x)$$

Aby maticový element byl malý, je nutná souhra všech tří faktorů.

Nejvíce však záleží na tom, jak hluboko  $\psi_0$  proniká do oblasti  $\Omega_R$ .

Kvalitativní závěr je, že málo transparentní bariera dává malý element.

# Od Oppenheimera k Bardeenovi

$$\begin{aligned}
 \langle \nu | U_R | 0 \rangle &= \int_{\Omega_R} d\mathbf{x} \psi_\nu^*(\mathbf{x}) U_R(\mathbf{x}) \psi_0(\mathbf{x}) \\
 &= \int_{\Omega_R} d\mathbf{x} \psi_\nu^*(\mathbf{x}) (H - H_L) \psi_0(\mathbf{x}) \\
 &= \int_{\Omega_R} d\mathbf{x} \psi_\nu^*(\mathbf{x}) (H - H_L) \psi_0(\mathbf{x}) - \overbrace{\int_{\Omega_R} d\mathbf{x} \psi_\nu^*(\mathbf{x}) (H - H_R) \psi_0(\mathbf{x})}^{\text{S Bardeenem přidáme 0}} \\
 &= \int_{\Omega_R} d\mathbf{x} \psi_\nu^*(\mathbf{x}) (W - \cancel{E_0}) \psi_0(\mathbf{x}) - \int_{\Omega_R} d\mathbf{x} \left[ (W - \cancel{E_\nu}) \psi_\nu(\mathbf{x}) \right]^* \psi_0(\mathbf{x}) \\
 &\quad \text{ruší se navzájem ... jsme on shell} \\
 &= \int_{\Omega_R} d\mathbf{x} \psi_\nu^*(\mathbf{x}) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi_0(\mathbf{x}) \right] - \int_{\Omega_R} d\mathbf{x} \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi_\nu(\mathbf{x}) \right]^* \psi_0(\mathbf{x})
 \end{aligned}$$

pro zřetelnost chvíli vypisují Planckovu konstantu

# Od Oppenheimera k Bardeenovi

$\langle \nu | U_R | 0 \rangle = \dots$  pokračování ...

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\Omega_R} dx \psi_\nu^*(x) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi_0(x) \right] - \int_{\Omega_R} dx \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi_\nu(x) \right]^* \psi_0(x) \\
 &= -i\hbar \int_{\Omega_R} dx \frac{d}{dx} \left\{ -\frac{i\hbar}{2m} \left[ \psi_\nu^*(x) \frac{d}{dx} \psi_0(x) - \frac{d}{dx} \psi_\nu^*(x) \psi_0(x) \right] \right\} = \\
 &= i\hbar \times \underbrace{\left\{ -\frac{i\hbar}{2m} \left[ \psi_\nu^*(x_B) \frac{d}{dx} \psi_0(x_B) - \frac{d}{dx} \psi_\nu^*(x_B) \psi_0(x_B) \right] \right\}}_{\langle \nu | \mathbf{j}_x(x_B) | 0 \rangle}
 \end{aligned}$$

operátor proudové hustoty

To je 1D verze Bardeenova transferového Hamiltoniánu



*The end*