Zadania:

1. Nájdite rovnicu dotykovej roviny ku grafu funkcie $f(x,y) = \ln(7y^2 - 3x)$ v bode $[2,1,0]$.

2. Rozhodnite, či výraz $(3x^2 + y^2)dx + (2xy)dy + dz$ je diferenciálom nejakej funkcie a v prípade, že áno, určte túto funkciu.

3. Určte Taylorov polynóm 6. stupňa so stredom v $[0,0]$ pre funkciu $f(x,y) = e^{x^2}y^2$.

4. Nájdite maximum funkcie $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ na $\triangle ABC : x - y \leq 1, x \geq -1, x + y \leq 1$.

5. Určte rovnicu dotyčnice v bode $[1,1]$ ku krivke určenej rovnicou $x^3y - y^3x = 0$ a rozhodnite, či krivka leží v okolí tohoto bodu pod alebo nad dotyčnicou.

Riešenia:

1. $f_x = \frac{-3}{7y^2-3x} = -3$, $f_y = \frac{14y}{7y^2-3x} = 14$, rovnica roviny je $z = -3x + 14y - 8$.

2. Rozhodneme tak, že overíme, či platí $f_{xy} = f_{yx}$, $f_{xz} = f_{zx}$, $f_{zy} = f_{yz}$. Máme $f_x = 3x^2 + y^2$, $f_y = 2xy$, $f_z = 1$ a vyjde nám, že áno.

Určíme teda funkciu. $f_x(x,y,z) = 3x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad f(x,y,z) = x^3 + xy^2 + c(y,z)$. Z toho máme $f_y(x,y,z) = 2xy + c_y(y,z) = 2xy \quad \Rightarrow \quad c_y(y,z) = 0 \quad \Rightarrow \quad c(y,z) = k(z)$ a $f(x,y,z) = x^3 + xy^2 + k(z)$. Z toho máme $f_z(x,y,z) = k'(z) = 1 \quad \Rightarrow \quad k(z) = z + k_1$ a výsledná funkcia je $f(x,y,z) = x^3 + xy^2 + z + k_1$.

3. Vieme, že TP funkcie e^x so stredom v $[0,0]$ je $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$, a teda TP funkcie e^{x^2} je $1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3!}x^6 + \cdots$. Z toho $f(x,y) = e^{x^2}y^2 = y^2 + x^2y^2 + \frac{1}{2}x^4y^2 + \cdots$.

4. Najskôr zistíme body, kde má funkcia nulové derivácie: $f_x(x,y) = 2x - y = 0$ a $f_y(x,y) = -x + 2y = 0$, je to len v bode $[0,0]$. Ostatné extrémy sú teda na hranici množiny.

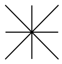
Zistíme body, v ktorých sa nejaká vrstevnica dotýka hranice. Vrstevnice sú dané rovnicou $x^2 - xy + y^2 - c = 0$. Z toho spočítame derivácie (ako pri implicitnej funkcii): $y' = -\frac{2x-y}{-x+2y}$ a $x' = -\frac{-x+2y}{2x-y}$. Hranicu tvoria tri úsečky:

1. $y = x - 1$: $\Rightarrow y' = 1$ a teda $-\frac{2x-y}{-x+2y} = 1 \quad \Rightarrow \quad 2x - y = x - 2y \quad \Rightarrow \quad x = -y$. To spolu s pôvodnou rovnicou, $y = x - 1$, dáva bod $[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$.

2. $x = -1$: $\Rightarrow x' = 0$ a teda $-\frac{-x+2y}{2x-y} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2y$. To spolu s pôvodnou rovnicou, $x = -1$, dáva bod $[-1, -\frac{1}{2}]$.

3. $y = 1 - x$: $\Rightarrow y' = -1$ a teda $-\frac{2x-y}{-x+2y} = -1 \quad \Rightarrow \quad 2x - y = -x + 2y \quad \Rightarrow \quad x = y$. To spolu s pôvodnou rovnicou, $y = 1 - x$, dáva bod $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Okrem toho môže byť extrém aj v niektorom z vrcholov trojuholníka, t.j. bodoch $[-1,-2]$, $[-1,2]$, $[1,0]$. Teraz zistíme, v ktorom z týchto bodov nadobúda funkcia f najväčšiu hodnotu: $f(0,0) = 0$, $f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$, $f(-1, -\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$, $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$, $f(-1, -2) = 3$, $f(-1, 2) = 7$, $f(1, 0) = 1$. Takže maximum je 7.

5. Spočítame deriváciu $y' = -\frac{3x^2y - y^3}{x^3 - 3y^2x} = 1$. Rovnica dotyčnice v bode $[1, 1]$ je teda $y = x$. Druhá derivácia vyjde nulová. Keď skúsime upraviť rovnicu $x^3y - y^3x = 0$ zo zadania, dostaneme: $xy(x^2 - y^2) = 0$. Z toho $x = 0$ alebo $y = 0$ alebo $x = y$ alebo $x = -y$. Čiže naša krivka sú vlastne štyri priamky:  Preto nemôže ležať ani pod, ani nad nájdenou dotyčnicou. (Dotyčnica ku priamke je samotná priamka.)