Zadania:

1. Nájdite všetky riešenia rovnice $y'(x^2+2x) = y(2x+2) + 3x^2 + 6x$.

2. Nájdite všetky riešenia rovnice $y = xy' + (y')^2 + 2y' + 1$.

3. Nájdite riešenie rovnice $y' + 1 + e^x(x+y)^2 = 0$, spĺňajúce začiatočnú podmienku $y(0) = \frac{1}{2}$.

4. Substitúciami transformujte rovnicu $y' = \frac{2x+y-8}{x-3y-11}$ na rovnicu so separovateľnými premennými.

Riešenia:

1.

a) Lin. homog.: $y'(x^2+2x) = y(2x+2)$, $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2x+2}{x^2+2x}dx$, $\quad\ldots\quad$ $y = k(x)(x^2+2x)$.

b) Nehomog.: $k'(x^2+2x)^2 = 3x^2+6x$, $k' = \frac{3}{x^2+2x} = \frac{3}{x} - \frac{3}{2}\frac{2x+2}{x^2+2x}$, $k = 3\ln|x| - \frac{3}{2}\ln|x^2+2x| + c$.

Výsledok: $y = (3\ln|x| - \frac{3}{2}\ln|x^2+2x| + c)(x^2+2x)$.

2.

Subst. $y' = p$, $y = xp + p^2 + 2p + 1$, zder., $p = p + xp' + 2pp' + 2p'$, $0 = p'(x+2p+2)$, $p_1 = c$, $p_2 = \frac{-x-2}{2}$.

Výsledok: $y_1 = cx + c^2 + 2c + 1$, $y_2 = \frac{-x^2}{4} - x$.

3.

Subst. $t = x + y$, $t' + e^x t^2 = 0$, $\int \frac{dt}{-t^2} = \int e^x dx$, $\quad\ldots\quad$ $t_1 = \frac{1}{e^x+c}$, $t_2 = 0$.

Podmienka: $y(0) = \frac{1}{e^0+c} - 0 = \frac{1}{2}$, teda $c = 1$.

Výsledok: $y = \frac{1}{e^x+1} - x$.

4.

Subst. $x = u + m, y = v + n$ tak, aby $2m + n - 8 = 0$ a $m - 3n - 11 = 0$. Z toho $m = 5, n = -2$. Máme $v' = \frac{2u+v}{u-3v}$, $v' = \frac{2+\frac{v}{u}}{1-3\frac{v}{u}}$. Subst. $\frac{v}{u} = t$, $v' = t + t'u$, dostaneme $t'u + t = \frac{2+t}{1-3t}$.

$\int \frac{dt}{\frac{2+t}{1-3t} - t} = \int \frac{du}{u} \quad \ldots$