Určte viazané extrémy funkcie f

1. $f(x,y) = xy$ na množine zadanej rovnicou $x^2 + y^2 - 1 = 0$.
2. $f(x,y,z) = xyz$ na množine zadanej rovnicami $x+y+z-5=0$ a $xy+yz+zx-8=0$.
3. $f(x,y,z) = x - 2y + z$ na množine zadanej rovnicou $x^2+y^2+z^2-1=0$.

Riešenia:

Všeobecne, ak hľadáme extrémy funkcie $f(x,y)$ na množine zadanej rovnicou $g(x,y)=0$, definujeme funkciu $L(x,y,\lambda) := f(x,y) + \lambda g(x,y)$ a riešime sústavu rovníc

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y} = 0, \quad g(x,y) = 0.$$

♣**1.** Máme $L(x,y,\lambda) := xy + \lambda(x^2+y^2-1)$ a riešime sústavu rovníc

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x} = y + 2\lambda x = 0, \quad \frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y} = x + 2\lambda y = 0, \quad x^2+y^2 = 1.$$

Má štyri riešenia, $(x_1,y_1,\lambda_1) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{2})$, $(x_2,y_2,\lambda_2) = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{2})$, $(x_3,y_3,\lambda_3) = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$, $(x_4,y_4,\lambda_4) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$.
Hodnoty funkcie f v týchto bodoch sú $f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2) = \frac{1}{2}$ (maximum), $f(x_3,y_3) = f(x_4,y_4) = \frac{-1}{2}$ (minimum).

♣**2.** Máme $L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) := xyz + \lambda_1(x+y+z-5) + \lambda_2(xy+yz+zx-8)$ a riešime sústavu rovníc

$$\frac{\partial L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial x} = yz + \lambda_1 + \lambda_2(y+z) = 0, \quad \frac{\partial L(x,y,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial y} = xz + \lambda_1 + \lambda_2(x+z) = 0,$$

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial z} = xy + \lambda_1 + \lambda_2(x+y) = 0, \quad x+y+z = 5, \quad xy+yz+zx = 8.$$

Odčítaním prvej rovnice od druhej, druhej od tretej a tretej od prvej dostaneme tri nové rovnice: $(x-y)(\lambda_2+z) = 0, \quad (y-z)(\lambda_2+x) = 0, \quad (z-x)(\lambda_2+y) = 0$. Z toho $x=y$ alebo $y=z$ alebo $z=x$.
Ak $x=y$, potom zo štvrtej a piatej rovnice dostaneme $2x+z=5$ a $x^2+2x(5-2x)=8$, riešenia sú teda $(x_1,y_1,z_1) = (2,2,1)$ a $(x_2,y_2,z_2) = (\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3})$.
Zo symetrie potom ďalšie riešenia sú $(x_3,y_3,z_3) = (1,2,2)$, $(x_4,y_4,z_4) = (\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$, $(x_5,y_5,z_5) = (2,1,2)$ a $(x_6,y_6,z_6) = (\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3})$.
Hodnoty funkcie f v týchto bodoch sú $f(x_1,y_1,z_1) = f(x_3,y_3,z_3) = f(x_5,y_5,z_5) = 4$ (minimum), $f(x_2,y_2,z_2) = f(x_4,y_4,z_4) = f(x_6,y_6,z_6) = \frac{112}{27} = 4\frac{4}{27}$ (maximum).

♣**3.** Máme $L(x,y,z,\lambda) := x - 2y + z + \lambda(x^2+y^2+z^2-1)$ a riešime sústavu rovníc

$$\frac{\partial L(x,y,z,\lambda)}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0, \quad \frac{\partial L(x,y,z,\lambda)}{\partial y} = -2 + 2\lambda y = 0,$$

$$\frac{\partial L(x,y,z,\lambda)}{\partial z} = 1 + 2\lambda z = 0, \quad x^2+y^2+z^2 = 1.$$

Z toho $(x, y, z) = (\frac{-1}{2\lambda}, \frac{1}{\lambda}, \frac{-1}{2\lambda})$ a $\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 1$. Takže $\lambda_{1,2} = \pm 1$ a $(x_1, y_1, z_1) = (\frac{-1}{2}, 1, \frac{-1}{2})$ a $(x_2, y_2, z_2) = (\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2})$.
Hodnoty funkcie f v týchto bodoch sú $f(x_1, y_1, z_1) = -3$ (minimum) a $f(x_2, y_2, z_2) = 3$ (maximum).