

Určte viazané extrémny funkcie f

1. $f(x, y) = xy$ na množine zadanej rovnicou $x^2 + y^2 - 1 = 0$.
2. $f(x, y, z) = xyz$ na množine zadanej rovnicami $x + y + z - 5 = 0$ a $xy + yz + zx - 8 = 0$.
3. $f(x, y, z) = x - 2y + z$ na množine zadanej rovnicou $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

Riešenia:

Všeobecne, ak hľadáme extrémny funkcie $f(x, y)$ na množine zadanej rovnicou $g(x, y) = 0$, definujeme funkciu $L(x, y, \lambda) := f(x, y) + \lambda g(x, y)$ a riešime sústavu rovníc

$$\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial y} = 0, \quad g(x, y) = 0.$$

♣1. Máme $L(x, y, \lambda) := xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ a riešime sústavu rovníc

$$\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial x} = y + 2\lambda x = 0, \quad \frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial y} = x + 2\lambda y = 0, \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Má štyri riešenia, $(x_1, y_1, \lambda_1) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{2})$, $(x_2, y_2, \lambda_2) = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{2})$, $(x_3, y_3, \lambda_3) = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$, $(x_4, y_4, \lambda_4) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$.

Hodnoty funkcie f v týchto bodoch sú $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) = \frac{1}{2}$ (maximum), $f(x_3, y_3) = f(x_4, y_4) = \frac{-1}{2}$ (minimum).

♣2. Máme $L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) := xyz + \lambda_1(x + y + z - 5) + \lambda_2(xy + yz + zx - 8)$ a riešime sústavu rovníc

$$\frac{\partial L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial x} = yz + \lambda_1 + \lambda_2(y + z) = 0, \quad \frac{\partial L(x, y, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial y} = xz + \lambda_1 + \lambda_2(x + z) = 0,$$

$$\frac{\partial L(x, y, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial z} = xy + \lambda_1 + \lambda_2(x + y) = 0, \quad x + y + z = 5, \quad xy + yz + zx = 8.$$

Odčítaním prvej rovnice od druhej, druhej od tretej a tretej od prvej dostaneme tri nové rovnice: $(x - y)(\lambda_2 + z) = 0$, $(y - z)(\lambda_2 + x) = 0$, $(z - x)(\lambda_2 + y) = 0$. Z toho $x = y$ alebo $y = z$ alebo $z = x$.

Ak $x = y$, potom zo štvrtej a piatej rovnice dostaneme $2x + z = 5$ a $x^2 + 2x(5 - 2x) = 8$, riešenia sú teda $(x_1, y_1, z_1) = (2, 2, 1)$ a $(x_2, y_2, z_2) = (\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3})$.

Zo symetrie potom ďalšie riešenia sú $(x_3, y_3, z_3) = (1, 2, 2)$, $(x_4, y_4, z_4) = (\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$, $(x_5, y_5, z_5) = (2, 1, 2)$ a $(x_6, y_6, z_6) = (\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3})$.

Hodnoty funkcie f v týchto bodoch sú $f(x_1, y_1, z_1) = f(x_3, y_3, z_3) = f(x_5, y_5, z_5) = 4$ (minimum), $f(x_2, y_2, z_2) = f(x_4, y_4, z_4) = f(x_6, y_6, z_6) = \frac{112}{27} = 4\frac{4}{27}$ (maximum).

♣3. Máme $L(x, y, z, \lambda) := x - 2y + z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ a riešime sústavu rovníc

$$\frac{\partial L(x, y, z, \lambda)}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0, \quad \frac{\partial L(x, y, z, \lambda)}{\partial y} = -2 + 2\lambda y = 0,$$

$$\frac{\partial L(x, y, z, \lambda)}{\partial z} = 1 + 2\lambda z = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Z toho $(x, y, z) = (\frac{-1}{2\lambda}, \frac{1}{\lambda}, \frac{-1}{2\lambda})$ a $\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 1$. Takže $\lambda_{1,2} = \pm 1$ a $(x_1, y_1, z_1) = (\frac{-1}{2}, 1, \frac{-1}{2})$
a $(x_2, y_2, z_2) = (\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2})$.

Hodnoty funkcie f v týchto bodoch sú $f(x_1, y_1, z_1) = -3$ (minimum) a $f(x_2, y_2, z_2) = 3$ (maximum).