11. BILINEÁRNE A KVADRATICKÉ FORMY

V predchádzajúcej kapitole sme sa stretli s multilineárnymi zobrazeniami, ktorých príkladmi boli práve determinanty. V tejto kapitole podrobnejšie preskúmame tzv. *bilineárne zobrazenia*, ktoré sú zrejme najjednoduchším netriviálnym prípadom takýchto zobrazení. Z nich sa sústredíme hlavne na *bilineárne formy*, t. j. na bilineárne zobrazenia s hodnotami v príslušnom poli. Od bilineárnych foriem je už len krok k tzv. *kvadratickým formám*. Týmto krokom, prísne vzaté, vystúpime zo sveta objektov lineárnych (t. j. „prvého stupňa“) a dostaneme sa do sveta objektov kvadratických (t. j. „druhého stupňa“). Zatiaľ sa však sústredíme len na algebraickú stránku celej veci. Geometrické aspekty bilineárnych a kvadratických foriem preskúmame až neskôr, keď si na tento účel zadovážime aj ďalšie účinné nástroje.

V celej kapitole K označuje nejaké pevné no inak ľubovoľné pole. Ak sa o tom osobitne nezmienime, pod vektorovým priestorom budeme rozumieť vektorový priestor nad poľom K. Väčšina výsledkov tejto kapitoly však platí len za dodatočnej podmienky, že charakteristika nášho poľa K sa nerovná dvom. Na rozdiel od kapitol 8 a 10, kde nám tento predpoklad slúžil len na zjednodušenie formulácií niektorých definícií, tvrdení a dôkazov, v tejto kapitole už hrá podstatnú úlohu.

11.1. Bilineárne zobrazenia a bilineárne formy

Nech U, V, W sú vektorové priestory nad poľom K. Hovoríme, že $F\colon U \times V \to W$ je *bilineárne zobrazenie*, ak pre všetky $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in U$, $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in V$ a $c_1, c_2 \in K$ platí

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{x}, c_1\boldsymbol{y}_1 + c_2\boldsymbol{y}_2) &= c_1F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1) + c_2F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2), \\ F(c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) &= c_1F(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + c_2F(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}). \end{aligned}$$

Inak povedané, zobrazenie $F\colon U \times V \to W$ je bilineárne práve vtedy, keď pre ľubovoľné pevné $\boldsymbol{x} \in U$ je priradením $\boldsymbol{y} \mapsto F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ definované lineárne zobrazenie $V \to W$ a pre ľubovoľné pevné $\boldsymbol{y} \in V$ je priradením $\boldsymbol{x} \mapsto F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ definované lineárne zobrazenie $U \to W$.

11.1.1. Príklad. (a) Príklad 6.1.4 vlastne hovorí, že pre pevné m, n, p je predpisom $F(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ dané bilineárne zobrazenie $K^{m\times n} \times K^{n\times p} \to K^{m\times p}$. Teda násobenie je bilineárne zobrazenie medzi vektorovými priestormi matíc príslušných rozmerov.

(b) Pre ľubovoľné vektorové priestory U, V je predpisom $F(\varphi, \boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x})$ definované bilineárne zobrazenie $\mathcal{L}(V, U) \times V \to U$. To znamená, že na dosadenie argumentu do funkcie sa možno dívať ako na bilineárne zobrazenie na príslušných vektorových priestoroch (pozri paragraf 6.5). Najdôležitejším prípadom takéhoto bilineárneho zobrazenia je tzv. *dualita* $V^* \times V \to K$.

(c) Pre ľubovoľné vektorové priestory U, V, W je predpisom $F(\varphi, \psi) = \varphi \circ \psi$ definované bilineárne zobrazenie $\mathcal{L}(V, U) \times \mathcal{L}(W, V) \to \mathcal{L}(W, U)$. Teda kompozíciu možno chápať ako bilineárne zobrazenie na uvedených vektorových priestoroch lineárnych zobrazení.

Pod *bilineárnou formou* na vektorových priestoroch U, V rozumieme ľubovoľné bilineárne zobrazenie $F\colon U \times V \to K$.

Nech U, V sú konečnorozmerné vektorové priestory s bázami $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m)$ resp. $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n)$. Potom pre ľubovoľnú maticu $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$ je predpisom

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\alpha}}^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{y})_{\boldsymbol{\beta}} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,$$

kde $(\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\alpha}} = (x_1, \dots, x_m)^T$, $(\boldsymbol{y})_{\boldsymbol{\beta}} = (y_1, \dots, y_n)^T$ sú súradnice vektorov $\boldsymbol{x} \in U$, $\boldsymbol{y} \in V$ v príslušných bázach, definovaná bilineárna forma $F\colon U \times V \to K$ (presvedčte sa o tom). Ukážeme, že tiež naopak, každá bilineárna forma na vektorových priestoroch U, V má uvedený tvar pre jednoznačne určenú maticu $\boldsymbol{A} \in K^{m\times n}$.

Maticou bilineárnej formy $F\colon U \times V \to K$ vzhľadom na bázy $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ nazývame maticu

$$[F]_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = \big(F(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_j)\big) \in K^{m\times n},$$

ktorá je tvorená hodnotami formy F na dvojiciach vektorov báz $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$.

11.1.2. Tvrdenie. *Nech U, V sú konečnorozmerné vektorové priestory s bázami $\boldsymbol{\alpha}$, resp. $\boldsymbol{\beta}$ a $F\colon U \times V \to K$ je bilineárna forma. Potom pre všetky $\boldsymbol{x} \in U$, $\boldsymbol{y} \in V$ platí*

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\alpha}}^T \cdot [F]_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \cdot (\boldsymbol{y})_{\boldsymbol{\beta}}$$

a $\boldsymbol{A} = [F]_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ je jediná matica s touto vlastnosťou.

Dôkaz. Nech $(\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\alpha}} = (x_1, \dots, x_m)^T$, $(\boldsymbol{y})_{\boldsymbol{\beta}} = (y_1, \dots, y_n)^T$ sú súradnice vektorov $\boldsymbol{x} \in U$, $\boldsymbol{y} \in V$ v príslušných bázach $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m)$, $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n)$. S použitím bilinearity F dostávame

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= F(x_1\boldsymbol{u}_1 + \dots + x_m\boldsymbol{u}_m,\ y_1\boldsymbol{v}_1 + \dots + y_n\boldsymbol{v}_n) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j F(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_j) = (\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\alpha}}^T \cdot [F]_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \cdot (\boldsymbol{y})_{\boldsymbol{\beta}}. \end{aligned}$$

Zostáva ukázať, že pre ľubovoľnú maticu $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$ platí

$$\big(\forall\, \boldsymbol{x} \in U\big)\big(\forall\, \boldsymbol{y} \in V\big)\big(F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\alpha}}^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{y})_{\boldsymbol{\beta}}\big) \ \Rightarrow\ \boldsymbol{A} = [F]_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}.$$

Za uvedeného predpokladu voľbou $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_i$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{v}_j$ dostávame

$$F(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_j) = (u_i)_{\boldsymbol{\alpha}}^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{v}_j)_{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{e}_i^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_j = a_{ij}.$$

Teda špeciálne každá bilineárna forma $F\colon K^m \times K^n \to K$ na (stĺpcových) vektorových priestoroch K^m, K^n má tvar

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,$$

kde $\boldsymbol{A} = [F]_{\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)},\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}}$ je matica formy F vzhľadom na kanonické bázy $\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}$.

Teraz preskúmame ako závisí matica bilineárnej formy $F\colon U \times V \to K$ na bázach priestorov U, V, presnejšie, ako sa mení v závislosti od zmien týchto báz.

11.1.3. Tvrdenie. *Nech V_1, V_2 sú konečnorozmerné vektorové priestory nad poľom K, $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\beta}_1$ sú dve bázy priestoru V_1, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\beta}_2$ sú dve bázy priestoru V_2 a $F\colon V_1 \times V_2 \to K$ je bilineárna forma. Potom*

$$[F]_{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2} = \left(\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1}\right)^T \cdot [F]_{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2} \cdot \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2}.$$

Dôkaz. Označme $\boldsymbol{A} = [F]_{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2}$, $\boldsymbol{B} = [F]_{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2}$ matice formy F v príslušných bázach. Pre ľubovoľné vektory $\boldsymbol{x} \in V_1$, $\boldsymbol{y} \in V_2$ platí

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\beta}_1}^T \cdot \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{y})_{\boldsymbol{\beta}_2} = F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= (\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\alpha}_1}^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{y})_{\boldsymbol{\alpha}_2} \\
&= \left(\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1} \cdot (\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\beta}_1}\right)^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \left(\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2} \cdot (\boldsymbol{y})_{\boldsymbol{\beta}_2}\right) \\
&= (\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\beta}_1}^T \cdot \left(\left(\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1}\right)^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2}\right) \cdot (\boldsymbol{y})_{\boldsymbol{\beta}_2}.
\end{aligned}$$

Požadovaná rovnosť

$$\boldsymbol{B} = \left(\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1}\right)^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2}$$

vyplýva z jednoznačnosti matice bilineárnej formy F vzhľadom na bázy $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$ dokázanej v tvrdení 11.1.2.

11.1.4. Príklad. Nech $F\colon K^m \times K^n \to K$ je bilineárna forma a $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ sú nejaké bázy priestorov K^m, resp. K^n. Označme $\boldsymbol{A} = [F]_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$, $\boldsymbol{M} = [F]_{\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)},\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}}$ matice formy F vzhľadom na bázy $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, resp. vzhľadom na kanonické bázy $\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}$. Podľa práve dokázaného tvrdenia platia rovnosti

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \left(\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)},\boldsymbol{\alpha}}\right)^T \cdot \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)},\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\alpha}^T \cdot \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{\beta}, \\
\boldsymbol{M} &= \left(\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}}\right)^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}} = \left(\boldsymbol{\alpha}^{-1}\right)^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\beta}^{-1},
\end{aligned}$$

umožňujúce (po stotožnení každej bázy s maticou tvorenou jej stĺpcami) priamy výpočet jednej z matíc $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{M}$ na základe znalosti príslušných báz a druhej z nich.

Tvrdenie 11.1.3 a príklad 11.1.4 nás priamo nabádajú k porovnaniu s vetou 7.6.1 a príkladom 7.6.2. Analógia s lineárnymi zobrazeniami a ich maticami však siaha ešte ďalej a zahŕňa aj vety 7.6.3 a 7.6.4.

11.1.5. Tvrdenie. *Nech U je m-rozmerný a V je n-rozmerný vektorový priestor nad poľom K. Potom pre ľubovoľné matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B} \in K^{m\times n}$ nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*

(i) $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ sú maticami tej istej bilineárnej formy $F\colon U \times V \to K$ vzhľadom na nejaké dve (možno no nie nutne rôzne) dvojice báz priestorov U, V;
(ii) existujú regulárne matice $\boldsymbol{P} \in K^{m\times m}$, $\boldsymbol{Q} \in K^{n\times n}$ také, že $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{Q}$;
(iii) $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{B})$.

Dôkaz. Podľa tvrdenia 7.2.4 je štvorcová matica regulárna práve vtedy, keď k nej transponovaná matica je regulárna. Ekvivalencia (i) $\Leftrightarrow$ (ii) je tak priamym dôsledkom tvrdení 11.1.3 a 7.5.3. Ekvivalencia (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) je už obsiahnutá v tvrdení 7.6.3.

Na základe uvedeného tvrdenia možno korektne definovať *hodnosť $h(F)$ bilineárnej formy F* na konečnorozmerných vektorových priestoroch ako hodnosť jej matice vzhľadom na ľubovoľnú dvojicu báz. Je totiž zrejmé, že táto hodnota na voľbe príslušných báz nezávisí.

11.1.6. Dôsledok. *Pre každú bilineárnu formu $F: U \times V \to K$ na konečnorozmerných vektorových priestoroch nad poľom K možno zvoliť bázu $\boldsymbol{\alpha}$ priestoru U a bázu $\boldsymbol{\beta}$ priestoru V tak, že F má vzhľadom na bázy $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ maticu v blokovom tvare*

$$[F]_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_h & \boldsymbol{0}_{h,n-h} \\ \boldsymbol{0}_{m-h,h} & \boldsymbol{0}_{m-h,n-h} \end{pmatrix},$$

kde $m = \dim U$, $n = \dim V$ a $h = h(F)$.

Otázkou, ako možno k danej bilineárnej forme F nájsť také bázy $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, sa tu nebudeme zaoberať. Pre zvedavého čitateľa podávame stručný návod v cvičeniach. Za istých okolností sa s ňou však ešte stretneme. No v tejto chvíli obrátime svoju pozornosť trochu iným smerom.

Ak $F: U \times V \to K$ je ľubovoľná bilineárna forma, tak pre každé $\boldsymbol{y} \in V$ je predpisom $\varphi_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ definovaný lineárny funkcionál $\varphi_{\boldsymbol{y}}: U \to K$, t. j. prvok duálu $U^* = \mathcal{L}(U, K)$ vektorového priestoru U (pozri paragraf 6.5). Ak položíme $F^*(\boldsymbol{y}) = \varphi_{\boldsymbol{y}}$, je tým definované zobrazenie $F^*: V \to U^*$. Bude nás zaujímať, pre aké F má *každý* lineárny funkcionál $\varphi \in U^*$ tvar $\varphi = F^*(\boldsymbol{y})$ pre nejaké, prípadne pre jediné $\boldsymbol{y} \in V$.

11.1.7. Veta. *(a) Nech U, V sú vektorové priestory a $F: U \times V \to K$ je bilineárna forma. Potom $F^*: V \to U^*$ je lineárne zobrazenie.*

(b) Ak U, V sú konečnorozmerné, tak $h(F^*) = h(F)$. V dôsledku toho F^* je injektívne práve vtedy, keď $h(F) = \dim V$, a F^* je surjektívne práve vtedy, keď $h(F) = \dim U$.

Dôkaz. S využitím linearity F v druhej zložke možno podmienku (a) overiť priamym výpočtom, ktorý prenechávame ako cvičenie čitateľovi.

(b) Položme $\dim V = n$, zvoľme nejaké bázy $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ priestorov U, resp. V a označme $\boldsymbol{A} = [F]_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ maticu formy F vzhľadom na ne. Potom

$$\operatorname{Ker} F^* = \left\{\boldsymbol{y} \in V;\, (\forall\, \boldsymbol{x} \in U)((\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\alpha}}^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{y})_{\boldsymbol{\beta}} = 0\right\} = \{\boldsymbol{y} \in V;\, \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{y})_{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{0}\},$$

lebo pre ľubovoľné $\boldsymbol{y} \in V$ je predpisom $\boldsymbol{x} \mapsto (\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\alpha}}^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{y})_{\boldsymbol{\beta}}$ určené lineárne zobrazenie $U \to K$, ktoré má vzhľadom na bázy $\boldsymbol{\alpha}$ v U a (1) v K maticou $(\boldsymbol{y})_{\boldsymbol{\beta}}^T \cdot \boldsymbol{A}^T$, a matica lineárneho zobrazenia v daných bázach je určená jednoznačne. Keďže $\boldsymbol{y} \mapsto (\boldsymbol{y})_{\boldsymbol{\beta}}$ je lineárny izomorfizmus $V \to K^n$, z tvrdenia 9.2.2 vyplýva

$$\dim \operatorname{Ker} F^* = \dim \mathcal{R}(\boldsymbol{A}) = n \Leftrightarrow h(\boldsymbol{A}) = n \Leftrightarrow h(F).$$

Podľa vety 6.2.3 o dimenzii jadra a obrazu z toho dostávame

$$h(F^*) = \dim \operatorname{Im} F^* = n \Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker} F^* = h(F).$$

Zvyšok je už triviálnym dôsledkom tejto rovnosti, vety 6.2.2 a tvrdenia 6.5.3.

11.1.8. Dôsledok. *Nech U, V sú konečnorozmerné vektorové priestory rovnakej dimenzie. Potom pre ľubovoľnú bilineárnu formu $F: U \times V \to K$ nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*

(i) *$F^*: V \to U^*$ je lineárny izomorfizmus;*
(ii) *$h(F) = \dim V$;*
(iii) *pre ľubovoľné (pre nejaké) bázy $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ priestorov U, resp. V je $[F]_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ regulárna matica.*

Bilineárna forma $F: U \times V \to K$ sa nazýva *regulárna*, ak spĺňa niektorú (a teda všetky) z podmienok posledného dôsledku; v opačnom prípade sa F nazýva *singulárna*.

11.2. Symetrické bilineárne formy a kvadratické formy

V tomto paragrafe sa budeme zaoberať výlučne bilineárnymi formami, v ktorých prvá aj druhá premenná prebieha ten istý vektorový priestor V, t. j. bilineárnymi formami tvaru $F\colon V \times V \to K$. Budeme ich nazývať *bilineárnymi formami na vektorovom priestore* V.

Bilineárna forma $F\colon V^2 \to K$ sa nazýva *symetrická*, ak pre všetky $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ platí

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = F(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}).$$

Pre istotu ešte pripomíname, že bilineárna forma $F\colon V^2 \to K$ sa nazýva *antisymetrická* (pozri paragraf 10.1), ak pre všetky $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ platí

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -F(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}).$$

11.2.1. Tvrdenie. *Nech F je bilineárna forma na vektorovom priestore V nad poľom K a* $\operatorname{char} K \neq 2$. *Potom F možno rozložiť na súčet*

$$F = F_0 + F_1$$

pre jednoznačne určené bilineárne formy F_0, F_1 na V, pričom F_0 je symetrická a F_1 je antisymetrická.

Dôkaz. Keďže $\operatorname{char} K \neq 2$, v K platí $2 = 1 + 1 \neq 0$, teda existuje prvok $\frac{1}{2} = 2^{-1} \in K$. Pre všetky $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ položme

$$F_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{2}\big(F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + F(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\big),$$
$$F_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{2}\big(F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - F(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\big).$$

Jednoduchými priamymi výpočtami, ktoré prenechávame čitateľovi, možno overiť, že F_0 aj F_1 sú bilineárne formy na V. Na prvý pohľad vidno, že F_0 je symetrická, F_1 je antisymetrická a pre všetky $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ platí

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = F_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + F_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

Zostáva overiť jednoznačnosť F_0 a F_1. Keby $F = G_0 + G_1$ bol druhý taký rozklad, tak zo symetrie F_0, G_0 a z antisymetrie F_1, G_1 by vyplývalo

$$\begin{aligned} F_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - F_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= F_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) + F_1(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \\ &= G_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) + G_1(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = G_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - G_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \end{aligned}$$

pre všetky $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$. Rovnosti

$$F_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + F_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = G_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + G_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),$$
$$F_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - F_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = G_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - G_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

už majú za zrejmý následok $F_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = G_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ a $F_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = G_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

Ak F je bilineárna forma na konečnorozmernom vektorovom priestore V s bázou $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$, tak pod *maticou formy* F vzhľadom na túto bázu budeme rozumieť jej maticu vzhľadom na dvojicu báz $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha}$; značíme ju $[F]_{\boldsymbol{\alpha}}$. Teda

$$[F]_{\boldsymbol{\alpha}} = [F]_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}} = \big(F(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j)\big)_{n\times n}.$$

Toto obmedzenie v porovnaní so všeobecnou definíciou z predošlého paragrafu je prirodzené – naopak, značne umelo by pôsobilo vyjadrovať súradnice prvej a druhej premennej v F, hoci ležia v tom istom priestore V, vzhľadom na rôzne bázy. Matice bilineárnych foriem na vektorovom priestore V vzhľadom na dvojice rôznych báz $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ vo V preto odteraz vylúčime z ďalších úvah. Jedna z výhod takéhoto prístupu spočíva v nasledujúcom zrejmom tvrdení, ktoré by však bez spomínaného obmedzenia neplatilo.

Pripomeňme, že štvorcová matica $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ sa nazýva *symetrická*, ak $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$, t. j. ak pre všetky $i, j \le n$ platí $a_{ij} = a_{ji}$; podobne, $\boldsymbol{A}$ sa nazýva *antisymetrická*, ak $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^T$, t. j. ak pre všetky $i, j \le n$ platí $a_{ij} = -a_{ji}$.

11.2.2. Tvrdenie. *Nech $\boldsymbol{\alpha}$ je ľubovoľná báza konečnorozmerného vektorového priestoru V a $F\colon V^2 \to K$ je bilineárna forma na V. Potom*
(a) F je symetrická práve vtedy, keď jej matica $[F]_{\boldsymbol{\alpha}}$ je symetrická;
(b) F je antisymetrická práve vtedy, keď jej matica $[F]_{\boldsymbol{\alpha}}$ je antisymetrická.

Násobenie v poli možno chápať ako bilineárnu formu $F\colon K^2 \to K$, kde $F(a, b) = ab$ pre $a, b \in K$. Stotožnením prvej a druhej premennej dostávame zobrazenie $q\colon K \to K$, kde $q(a) = F(a, a) = a^2$, t. j. „a-kvadrát“. Zovšeobecnením tohto postupu dospejeme k pojmu kvadratickej formy.

Zobrazenie $q\colon V \to K$ vektorového priestoru V do poľa K sa nazýva *kvadratická forma* na V, ak existuje bilineárna forma $F\colon V^2 \to K$ taká, že pre všetky $\boldsymbol{x} \in V$ platí

$$q(\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}).$$

Hovoríme tiež, že bilineárna forma F *indukuje* kvadratickú formu q.

Vo všeobecnosti existuje k danej kvadratickej forme $q\colon V \to K$ mnoho bilineárnych foriem $F\colon V^2 \to K$, pre ktoré platí uvedená rovnosť. Ak je totiž $F\colon V^2 \to K$ nejaká bilineárna forma a $G\colon V^2 \to K$ je ľubovoľná antisymetrická bilineárna forma, tak, aspoň pokiaľ $\operatorname{char} K \ne 2$,

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}),$$

lebo zrejme $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$. Špeciálne v označení tvrdenia 11.2.1 platí

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = F_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}).$$

To nás privádza na myšlienku pokúsiť sa odstrániť spomínanú nejednoznačnosť dodatočnou požiadavkou symetrie príslušnej bilineárnej formy.

Polárnou formou kvadratickej formy $q\colon V \to K$ nazývame *symetrickú* bilineárnu formu $F\colon V^2 \to K$, ktorá indukuje formu q.

11.2.3. Tvrdenie. *Nech q je kvadratická forma na vektorovom priestore V nad poľom K, pričom* $\operatorname{char} K \neq 2$. *Potom existuje jediná symetrická bilineárna forma $F\colon V^2 \to K$ taká, že*

$$q(\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$$

pre všetky $\boldsymbol{x} \in V$.

Dôkaz. Ak F je ľubovoľná bilineárna forma na V, ktorá indukuje q, tak z tvrdenia 11.2.1 a pred chvíľou učinenej poznámky vyplýva, že hľadaná polárna forma ku q je daná vzťahom $F_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{2}(F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + F(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}))$.

Požadovaná jednoznačnosť polárnej formy je bezprostredným dôsledkom nasledujúceho tvrdenia, ktoré nám poskytuje ďalšiu cennú informáciu o vzťahu medzi ňou a indukovanou kvadratickou formou.

11.2.4. Tvrdenie. *Nech* $\operatorname{char} K \neq 2$, *$q\colon V \to K$ je kvadratická forma a $F\colon V^2 \to K$ je jej polárna forma. Potom pre ľubovoľné $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ platí*

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= \frac{1}{2}\big(q(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - q(\boldsymbol{x}) - q(\boldsymbol{y})\big) \\ &= \frac{1}{2}\big(q(\boldsymbol{x}) + q(\boldsymbol{y}) - q(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\big) \\ &= \frac{1}{4}\big(q(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - q(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\big) \end{aligned}$$

Dôkaz. Najprv si uvedomme, že $\operatorname{char} K \neq 2$ má za dôsledok $4 = 2 \cdot 2 \neq 0$. Každú z rovností

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= \frac{1}{2}\big(F(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})\big) \\ &= \frac{1}{2}\big(F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + F(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) - F(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\big) \\ &= \frac{1}{4}\big(F(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - F(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\big) \end{aligned}$$

možno teraz na základe bilinearity formy F overiť priamym výpočtom, ktorý prenechávame čitateľovi.

Uvedené rovnosti nám tak dávajú k dispozícii hneď tri rôzne formuly, z ktorých každá umožňuje zrekonštruovať polárnu formu na základe znalosti jej kvadratickej formy. Ešte si všimnite, že tieto rovnosti sú len jednoduchým zovšeobecnením známych vzorcov

$$ab = \frac{1}{2}\big((a+b)^2 - a^2 - b^2\big) = \frac{1}{2}\big(a^2 + b^2 - (a-b)^2\big) = \frac{1}{4}\big((a+b)^2 - (a-b)^2\big)$$

platných pre ľubovoľné $a, b \in K$.

Maticou kvadratickej formy $q\colon V \to K$ na konečnorozmernom vektorovom priestore V nad poľom charakteristiky rôznej od dvoch vzhľadom na bázu $\boldsymbol{\alpha}$ nazývame maticu jej polárnej formy vzhľadom na túto bázu a značíme ju $[q]_{\boldsymbol{\alpha}}$. Matica $[q]_{\boldsymbol{\alpha}}$ je touto požiadavkou jednoznačne určená a je to vždy symetrická matica. *Hodnosťou kvadratickej formy* potom nazývame hodnosť jej matice vzhľadom na akúkoľvek bázu a značíme ju $h(q)$. Zrejme hodnosť $h(q)$ nezávisí od voľby bázy a rovná sa hodnosti $h(F)$ príslušnej polárnej formy. Kvadratická forma sa nazýva *regulárna*, resp. *singulárna*, ak má príslušnú vlastnosť jej polárna forma.

Poznámka. Upozorňujeme, že ani jeden z výsledkov uvádzaných v tvrdeniach 11.2.1 a 11.2.3 (t. j. ani existencia ani jednoznačnosť) nie je splnený vo vektorových priestoroch nad poľom charakteristiky 2. Dokonca jednu a tú istú symetrickú bilineárnu, resp. kvadratickú formu možno zadať maticami rôznej hodnosti. Príklady možno nájsť v cvičeniach. V prípade tvrdenia 11.2.4 nedávajú uvedené vzorce nad poľom K charakteristiky 2 vôbec žiadny zmysel.

11.3. Diagonalizácia kvadratických foriem

Ak $F\colon V^2 \to K$ je ľubovoľná bilineárna forma na konečnorozmernom vektorovom priestore V a $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ je jej matica vzhľadom na nejakú bázu $\boldsymbol{\alpha}$ priestoru V, tak pre indukovanú kvadratickú formu $q\colon V \to K$ a všetky $\boldsymbol{x} \in V$ platí

$$q(\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\alpha}}^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\alpha}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j,$$

kde $(\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\alpha}} = (x_1,\dots,x_n)^T$ sú príslušné súradnice. Ak F je navyše symetrická, t. j. ak $\boldsymbol{A}$ je priamo matica formy q v báze $\boldsymbol{\alpha}$, tak uvedený výraz možno ďalej upraviť na tvar

$$q(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 \,+\, 2 \sum_{1\le i<j\le n} a_{ij} x_i x_j.$$

V tomto paragrafe si ukážeme, že voľbou vhodnej bázy, t. j. zavedením „nových súradníc“, sa možno zbaviť všetkých sčítancov $a_{ij}x_ix_j$ obsahujúcich zmiešané členy a upraviť tak celý výraz na *diagonálny tvar*

$$q(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2.$$

Príslušný výpočet možno uskutočniť pomocou tzv. *Lagrangeovej metódy*, ktorá požíva dva typy úprav: jednak metódu *doplnenia na štvorec*, známu už zo strednej školy, jednak substitúciu

$$x_i x_j = \frac{1}{4}(x_i + x_j)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(x_i \Leftrightarrow x_j)^2,$$

ku ktorej sa musíme uchýliť zakaždým, keď pre $i \neq j$ je $a_{ij} \neq 0$, ale $a_{ii} = a_{jj} = 0$. Ako naznačuje posledná identita, Lagrangeova metóda funguje len pre polia charakteristiky rôznej od dvoch. Bez ďalšieho komentára si celý postup ozrejmíme na príklade.

11.3.1. Príklad. Kvadratická forma $q\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ je pre $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$ daná predpisom

$$q(\boldsymbol{x}) = -2x_2^2 + x_1x_2 + 2x_2x_3 - 3x_3x_4 = \boldsymbol{x}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x}\,.$$

Všetky zmiešané členy obsahujúce x_2 pripojíme k členu $-2x_2^2$ a doplníme na štvorec:

$$\begin{aligned} q(\boldsymbol{x}) &= -2\left(x_2^2 - \frac{1}{2}x_1x_2 - x_2x_3\right) - 3x_3x_4 \\ &= -2\left(\left(x_2 - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 - \frac{1}{16}x_1^2 - \frac{1}{4}x_3^2 - \frac{1}{4}x_1x_3\right) - 3x_3x_4 \\ &= -\frac{1}{8}(x_1 - 4x_2 + 2x_3)^2 + \frac{1}{8}x_1^2 + \frac{1}{2}x_3^2 + \frac{1}{2}x_1x_3 - 3x_3x_4\,. \end{aligned}$$

Teraz pripojíme zmiešané členy obsahujúce x_1 k členu $\frac{1}{8}x_1^2$ a doplníme na štvorec. Dostaneme

$$\begin{aligned} q(\boldsymbol{x}) &= -\frac{1}{8}(x_1 - 4x_2 + 2x_3)^2 + \frac{1}{8}(x_1^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_3) - 3x_3x_4 \\ &= -\frac{1}{8}(x_1 - 4x_2 + 2x_3)^2 + \frac{1}{8}(x_1 + 2x_3)^2 - 3x_3x_4\,. \end{aligned}$$

Po použití spomínanej substitúcie konečne máme

$$q(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{8}(x_1 - 4x_2 + 2x_3)^2 + \frac{1}{8}(x_1 + 2x_3)^2 - \frac{3}{4}(x_3 + x_4)^2 + \frac{3}{4}(x_3 - x_4)^2.$$

Ak si na $\mathbb{R}^4$ zavedieme nové súradnice $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T$, kde

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - 4x_2 + 2x_3 \\ y_2 &= x_1 + 2x_3 \\ y_3 &= x_3 + x_4 \\ y_4 &= x_3 - x_4, \end{aligned}$$

tak pôvodná kvadratická forma q v nich nadobudne diagonálny tvar

$$q(\boldsymbol{x}) = q'(\boldsymbol{y}) = -\frac{1}{8}y_1^2 + \frac{1}{8}y_2^2 - \frac{3}{4}y_3^2 + \frac{3}{4}y_4^2\,.$$

Pritom matica

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

ktorá zabezpečuje zmenu súradníc $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{x}$ je maticou prechodu z kanonickej bázy $\boldsymbol{\varepsilon}$ do takej bázy $\boldsymbol{\alpha}$ priestoru $\mathbb{R}^4$, v ktorej pre všetky $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$ platí $(\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{y} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{x}$. To znamená, že $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\alpha}^{-1}$. Teda $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{Q}^{-1}$, presnejšie, hľadaná báza $\boldsymbol{\alpha}$ je tvorená stĺpcami matice

$$\boldsymbol{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

11.3.2. Príklad. Ešte si všimnime veľkú mieru nejednoznačnosti diagonálneho tvaru a príslušnej transformácie súradníc. Napr. kvadratickú formu

$$q(x,y) = 10x^2 + 5y^2 \Leftrightarrow 2xy$$

na $\mathbb{R}^2$ možno pri troche postrehu jednoducho upraviť na diagonálny tvar

$$q(x,y) = (x^2 + 4y^2 + 4xy) + (9x^2 + y^2 \Leftrightarrow 6xy) = (x+2y)^2 + (3x \Leftrightarrow y)^2,$$

zatiaľ čo pri dôslednom dodržiavaní predchádzajúceho receptu dostaneme

$$\begin{aligned} q(\boldsymbol{x}) &= 10\left(x^2 \Leftrightarrow \frac{1}{5}xy\right) + 5y^2 \\ &= 10\left(\left(x \Leftrightarrow \frac{1}{10}y\right)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{100}y^2\right) + 5y^2 \\ &= \frac{1}{10}(10x \Leftrightarrow y)^2 + \frac{49}{10}y^2. \end{aligned}$$

Podobne, ako sme sa pri riešení sústav lineárnych rovníc vyhli manipulácii s premennými a celú úlohu sme previedli na úpravu istej matice pomocou elementárnych riadkových operácii, aj teraz bude našim cieľom upraviť danú kvadratickú či symetrickú bilineárnu formu na diagonálny tvar a zároveň nájsť príslušnú bázu len vhodnými úpravami jej matice. Najprv si však ujasníme, ako vplýva zmena bázy na maticu bilineárnej resp. kvadratickej formy na konečnorozmerom priestore V. Ako špeciálny prípad tvrdenia 11.1.3 okamžite dostávame

11.3.3. Tvrdenie. *Nech $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ sú dve bázy konečnorozmerného vektorového priestoru V a $F\colon V^2 \to K$ je bilineárna forma na V. Potom pre matice $\boldsymbol{A} = [F]_{\boldsymbol{\alpha}}$, $\boldsymbol{B} = [F]_{\boldsymbol{\beta}}$ formy F v týchto bázach platí*

$$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}.$$

Štvorcové matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B} \in K^{n\times n}$ sa nazývajú *kongruentné*, označenie $\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{B}$, ak existuje regulárna matica $\boldsymbol{P} \in K^{n\times n}$ taká, že

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{P}.$$

Zrejme kongruentné matice majú rovnakú hodnosť. Čitateľ by si mal taktiež sám overiť, že pre ľubovoľné matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C} \in K^{n\times n}$ platí

$$\begin{gathered} \boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{A}, \\ \boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{B} \ \Rightarrow\ \boldsymbol{B} \equiv \boldsymbol{A}, \\ \boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{B} \ \&\ \boldsymbol{B} \equiv \boldsymbol{C} \ \Rightarrow\ \boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{C}. \end{gathered}$$

Inak povedané, vzťah kongruencie je *reflexívny*, *symetrický* a *tranzitívny*, t. j. je vzťahom *ekvivalencie* na množine $K^{n\times n}$.

Ďalej nás bude zaujímať len kongruencia symetrických matíc; v celej všeobecnosti sa preto týmto vzťahom viac zaoberať nebudeme.

Jednoducho možno nahliadnuť (prípadne overiť) platnosť implikácie

$$\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{B} \ \&\ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^T \ \Rightarrow\ \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T,$$

t. j. ak je jedna z dvoch kongruentných matíc symetrická, tak je symetrická aj druhá z nich.

Keďže každá regulárna matica jej maticou prechodu medzi vhodnou dvojicou báz, tvrdenie 11.3.3 má za bezprostredný dôsledok nasledujúcu vetu.

11.3.4. Veta. *Nech V je n-rozmerný vektorový priestor nad poľom K charakteristiky $\neq 2$. Potom pre ľubovoľné symetrické matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B} \in K^{n\times n}$ nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*

(i) *$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ sú maticami tej istej symetrickej bilineárnej formy $F\colon V \times V \to K$ vzhľadom na nejaké dve (možno no nie nutne rôzne) bázy priestoru V;*

(ii) *$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ sú maticami tej istej kvadratickej formy $q\colon V \to K$ vzhľadom na nejaké dve (možno no nie nutne rôzne) bázy priestoru V;*

(iii) *$\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{B}$.*

Poznamenajme, že ekvivalencia (i) $\Leftrightarrow$ (iii) platí aj nad poľami charakteristiky 2.

Konečne môžeme systematicky pristúpiť k otázke diagonalizácie symetrických bilineárnych resp. kvadratických foriem. Obe zredukujeme na úpravy príslušnej symetrickej matice na diagonálnu maticu pomocou úprav zachovávajúcich kongruenciu.

Najprv si všimnime, čo to vlastne znamená, že matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B} \in K^{n\times n}$ sú kongruentné prostredníctvom regulárnej matice $\boldsymbol{P} \in K^{n\times n}$. Maticu $\boldsymbol{P}$ možno upraviť na jednotkovú maticu $\boldsymbol{I}_n$ pomocou elementárnych *stĺpcových* úprav, ktorým zodpovedá rozklad matice $\boldsymbol{P}$ na súčin elementárnych matíc

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{E}_1 \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{E}_k.$$

Potom

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{P} &= (\boldsymbol{E}_1 \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{E}_k)^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{E}_1 \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{E}_k)\\ &= \boldsymbol{E}_k^T \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{E}_1^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{E}_1 \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{E}_k\end{aligned}$$

Nech teraz $\boldsymbol{C} \in K^{n\times n}$ je ľubovoľná matica a $\boldsymbol{E} \in K^{n\times n}$ je elementárna matica, zodpovedajúca nejakej ESO. Uvedomme si, v akom vzťahu je matica $\boldsymbol{E}^T \cdot \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{E}$ k pôvodnej matici $\boldsymbol{C}$. Samozrejme, že sú kongruentné, no nielen to. Matica $\boldsymbol{E}^T$ totiž zodpovedá „rovnakej“ ERO, ako bola ESO reprezentovaná maticou $\boldsymbol{E}$. Presnejšie,

(a) ak $\boldsymbol{E}$ zodpovedala výmene i-teho a j-teho stĺpca, tak $\boldsymbol{E}^T$ zodpovedá výmene i-teho a j-teho riadku;

(b) ak $\boldsymbol{E}$ zodpovedala vynásobeniu i-teho stĺpca nenulovým skalárom $c \in K$, tak $\boldsymbol{E}^T$ zodpovedá vynásobeniu i-teho riadku tým istým skalárom c;

(c) ak $\boldsymbol{E}$ zodpovedala pripočítaniu c-násobku i-teho stĺpca k j-temu stĺpcu, tak $\boldsymbol{E}^T$ zodpovedá pripočítaniu c-násobku i-teho riadku k j-temu riadku.

Matica $\boldsymbol{E}^T \cdot \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{E}$ teda vznikne z matice $\boldsymbol{C}$ pomocou dvojice symetricky združených elementárnych úprav – jednej ESO a jednej ERO. Navyše, keďže vďaka asociatívnosti násobenia platí $\boldsymbol{E}^T \cdot (\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{E}) = (\boldsymbol{E}^T \cdot \boldsymbol{C}) \cdot \boldsymbol{E}$, je jedno, v akom poradí obe úpravy vykonáme.

Úprava symetrickej matice $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$ na s ňou kongruentnú diagonálnu maticu $\boldsymbol{B} \in K^{n\times n}$ sa teda realizuje v konečnej postupnosti krokov, z ktorých každý pozostáva z jednej ESO a s ňou symetricky združenej ERO. Postupnosťou len príslušných ESO vykonaných na jednotkovej matici $\boldsymbol{I}_n$ získame tiež príslušnú maticu prechodu $\boldsymbol{P}$ takú, že platí $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{P}$. Celý postup možno stručne zachytiť pomocou schémy

$$\boldsymbol{A} \;\overset{\text{ESO}}{\underset{\text{ERO}}{\longleftrightarrow}}\; \boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{I}_n \;\overset{\text{ESO}}{\longleftrightarrow}\; \boldsymbol{P}$$

Ak teda $\boldsymbol{A}$ bola maticou nejakej symetrickej bilineárnej formy, prípadne kvadratickej formy v báze $\boldsymbol{\alpha}$, tak $\boldsymbol{B}$ je maticou tejto formy v báze $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{P}$ (t. j. $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}}$). Špeciálne, ak $\boldsymbol{A}$ je maticou príslušnej formy na (stĺpcovom) vektorovom priestore K^n v kanonickej báze $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}$, tak $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{P}$, t. j. vektory novej bázy $\boldsymbol{\beta}$ sú priamo stĺpce matice $\boldsymbol{P}$.

Zostáva dokázať, že uvedený postup vždy vedie k cieľu.

11.3.5. Veta. *Nech* $\operatorname{char} K \neq 2$ *a* V *je konečnorozmerný vektorový priestor nad poľom* K. *Potom*

(a) *každá symetrická matica* $\boldsymbol{A} \in K^{n \times n}$ *je kongruentná s nejakou diagonálnou maticou;*

(b) *každá symetrická bilineárna forma* $F\colon V^2 \to K$ *má vo vhodnej báze priestoru* V *diagonálnu maticu;*

(c) *každá kvadratická forma* $q\colon V \to K$ *má vo vhodnej báze priestoru* V *diagonálnu maticu.*

Dôkaz. Stačí dokázať len tvrdenie (a), tvrdenia (b), (c) sú už jeho bezprostrednými dôsledkami. Popíšeme algoritmus, ktorý nám hovorí, aké ESO a ERO treba postupne aplikovať na maticu $\boldsymbol{A}$. V celom postupe sa používajú dva typy úprav:

(1) Nech $i \leq n$ je najmenší index taký, že $a_{ii} \neq 0$. Potom postupne pre každé $j \leq n$ také, že $j \neq i$ a $a_{ij} = a_{ji} \neq 0$, pripočítame k j-temu stĺpcu matice $\left(-\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right)$-násobok i-teho stĺpca a v takto získanej matici pripočítame $\left(-\frac{a_{ji}}{a_{ii}}\right)$-násobok i-teho riadku k j-temu riadku. Inak povedané, pomocou diagonálneho prvku $a_{ii} \neq 0$ vynulujeme všetky ostatné nenulové prvky i-teho riadku aj stĺpca.

(2) Nech pre každé $i \leq n$ platí: ak $a_{ii} \neq 0$, tak $a_{ij} = a_{ji} = 0$ pre každé $j \neq i$. Nech $k \leq n$ je najmenší index taký, že $a_{kk} = 0$, ale k-ty riadok nie je identicky nulový. Nech ďalej $j \leq n$ je najmenší index taký, že $a_{kj} = a_{jk} \neq 0$. Potom ku k-temu stĺpcu matice pripočítame jej j-ty stĺpec a ku k-temu riadku takto získanej matice pripočítame jej j-ty riadok. (Výsledná matica má na mieste (k, k) prvok $a_{kj} + a_{jk} = 2a_{jk} \neq 0$.)

Úpravy typu (1) majú prednosť, t. j. vykonávame ich tak dlho, ako je to len možné alebo kým nezískame diagonálnu maticu. V opačnom prípade aplikujeme jednu úpravu typu (2). Po nej nikdy nedostaneme diagonálnu maticu a vždy možno aplikovať úpravu typu (1). Takto postupujeme, kým sa to len dá. Ak už nemožno aplikovať žiadnu z úprav (1), (2), znamená to, že sme dospeli k diagonálnej matici. Keďže po každej úprave typu (1) pribudnú aspoň dva nulové prvky mimo diagonály a prípadné nenulové prvky mimo diagonály, ktoré pribudli v dôsledku nej alebo jednej úpravy typu (2), budú vynulované ďalšími úpravami typu (1), celý postup nevyhnutne skončí po konečnom počte krokov.

Okrem úprav (1), (2) možno použiť ďalšie dva typy úprav, bez ktorých sa síce možno zaobísť, no s ich pomocou možno docieliť „krajší“ tvar diagonálnej matice formy prípadne matice prechodu.

(3) Výmena i-teho a j-teho stĺpca matice a vzápätí aj jej i-teho a j-teho riadku.

(4) Vynásobenie i-teho stĺpca a vzápätí aj i-teho riadku matice ľubovoľným nenulovým skalárom $c \in K$ (diagonálny prvok a_{ii} sa tým zmení na $c^2 a_{ii}$).

Význam úprav (3) a (4) je jasný: (3) zodpovedá zámene poradia súradníc $x_i \leftrightarrow x_j$ a (4) substitúcii x_i/c miesto x_i. Čitateľ by si mal sám premyslieť, ako zodpovedá úprava typu (1) doplneniu na štvorec a úprava typu (2) (spolu s následnou úpravou typu (1)) substitúcii súčtu štvorcov miesto x_ix_j. Aby sme mu uľahčli premýšľanie, upravíme práve opísanou metódou maticu kvadratickej formy z príkladu 11.3.1 na s ňou kongruentný diagonálny tvar a zároveň nájdeme príslušnú bázu.

11.3.6. Príklad. Budeme upravovať symetrickú maticu

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

na s ňou kongruentný diagonálny tvar. Začneme úpravami typu (1). Najprv vynulujeme pomocou prvku $a_{22} = -2$ zvyšné nenulové prvky druhého stĺpca a riadku. Za tým účelom pripočítame $\frac{1}{4}$-násobok druhého stĺpca k prvému stĺpcu a vzápätí vykonáme rovnakú operáciu s riadkami. Potom pripočítame $\frac{1}{2}$-násobok druhého stĺpca k tretiemu stĺpcu a to isté urobíme s riadkami. Postupne dostaneme

$$\boldsymbol{A} \equiv \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vykonaním príslušných ESO na jednotkovej matici dostaneme

$$\boldsymbol{I}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \wr \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \wr \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pričom znakom $\wr$ označujeme *stĺpcovú* ekvivalenciu matíc. Ďalej vynulujeme pomocou prvku $a_{11} = \frac{1}{8}$ zvyšné nenulové prvky prvého stĺpca a riadku, t. j. odpočítame dvojnásobok prvého stĺpca od tretieho a to isté urobíme s riadkami. Príslušnú stĺpcovú operáciu vykonáme aj na matici získanej z $\boldsymbol{I}_4$. Vyjdú nám matice

$$\boldsymbol{A} \equiv \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{I}_4 \wr \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Keďže úpravu typu (1) nemožno viac aplikovať, použijeme úpravu typu (2). Pripočítame štvrtý stĺpec k tretiemu a to isté aj pre riadky. Potom už opäť môžeme použiť úpravu typu (1). Odpočítame $\frac{1}{2}$-násobok tretieho stĺpca od štvrtého a to isté urobíme s riadkami. Po vykonaní príslušných ESO na matici získanej z $\boldsymbol{I}_4$ dostaneme výsledok

$$\boldsymbol{A} \equiv \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Leftrightarrow 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Leftrightarrow 3 & \Leftrightarrow 3/2 \\ 0 & 0 & \Leftrightarrow 3/2 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Leftrightarrow 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Leftrightarrow 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B},$$

$$\boldsymbol{I}_4 \wr \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Leftrightarrow 2 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \wr \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Leftrightarrow 2 & 1 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Leftrightarrow 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}.$$

Vidíme, že napriek úpornej snahe pridŕžať sa maticových úprav zodpovedajúcich úpravam kvadratickej formy z príkladu 11.3.1, nám obe matice vyšli mierne odlišné. Úplnú zhodu možno dosiahnuť práve „kozmetickými“ úpravami (3) a (4). Najprv prehodíme prvý a druhý prvok na diagonále. Tomu zodpovedá výmena prvého a druhého stĺpca v matici prechodu $\boldsymbol{P}$. Potom vynásobíme prvý diagonálny prvok skalárom $\frac{1}{16} = \left(\Leftrightarrow\frac{1}{4}\right)^2$, tretí skalárom $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ a štvrtý skalárom $1 = (\Leftrightarrow 1)^2$. Tomu zodpovedá vynásobenie prvého stĺpca príslušnej matice prechodu skalárom $\Leftrightarrow\frac{1}{4}$, tretieho skalárom $\frac{1}{2}$ a štvrtého skalárom $\Leftrightarrow 1$. Teda

$$\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{B} \equiv \begin{pmatrix} \Leftrightarrow 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Leftrightarrow 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \Leftrightarrow 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Leftrightarrow 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{I}_4 \wr \boldsymbol{P} \wr \begin{pmatrix} 0 & 1 & \Leftrightarrow 2 & 1 \\ 1 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Leftrightarrow 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \wr \begin{pmatrix} 0 & 1 & \Leftrightarrow 1 & \Leftrightarrow 1 \\ \Leftrightarrow 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & \Leftrightarrow 1/2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{Q}^{-1}.$$

„Našinec“ by asi dal prednosť tvarom bez zlomkov a „s menej mínusmi“

$$\boldsymbol{A} \equiv \begin{pmatrix} \Leftrightarrow 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Leftrightarrow 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{I}_4 \wr \begin{pmatrix} 0 & 4 & \Leftrightarrow 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Leftrightarrow 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rozmyslite si, akými úpravami ich možno získať. Keďže však inverznou maticou k poslednej matici prechodu je matica

$$\begin{pmatrix} \Leftrightarrow 1/4 & 1 & \Leftrightarrow 1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & \Leftrightarrow 1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

cenou za „pekný“ tvar diagonálnej matice formy a matice prechodu (t. j. príslušnej bázy) sú zlomky a „viac mínusov“ v matici transformácie súradníc, čo sa prejaví vo vnútri zátvoriek v algebraickom vyjadrení pôvodnej formy:

$$\begin{aligned}
q(\boldsymbol{x}) &= -2x_2^2 + x_1x_2 + 2x_2x_3 - 3x_3x_4 \\
&= -\frac{1}{8}(x_1 - 4x_2 + 2x_3)^2 + \frac{1}{8}(x_1 + 2x_3)^2 - \frac{3}{4}(x_3 + x_4)^2 + \frac{3}{4}(x_3 - x_4)^2 \\
&= -2\left(-\frac{1}{4}x_1 + x_2 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 + 2\left(\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 \\
&\quad - 3\left(\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4\right)^2 + 3\left(-\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4\right)^2.
\end{aligned}$$

Je už len otázkou vkusu, čomu dáme prednosť.

Pre poučenie si všimnite, že v prípade, ak je matica formy v diagonálnom tvare, možno stĺpce matice prechodu „beztrestne“ násobiť skalárom -1. Vynásobenie skalárom $(-1)^2 = 1$ sa totiž na diagonále neprejaví.

Celkom na záver ešte poznamenajme, že každá kvadratická forma na *riadkovom* vektorovom priestore K^n má tvar

$$q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}^T$$

pre nejakú maticu $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$. Diagonalizácia (symetrickej matice) takejto formy (ak $\operatorname{char} K \neq 2$) funguje rovnako ako v stĺpcovom priestore K^n, s jediným rozdielom, že príslušnú bázu, vzhľadom na ktorú má q diagonálnu maticu, dostaneme pomocou zodpovedajúcich *riadkových* úprav na jednotkovej matici; presnejšie, táto báza je tvorená *riadkami* takto získanej výslednej matice prechodu.