

Lineární algebra a geometrie II — Kontrolní otázky

Kontrolní otázky jsou uspořádány vzhledem k vybraným partiím z učebních textů doc. Zlatoše z Lineární algebry a geometrie II.

Bilineární zobrazení a bilineární formy

- Je každé bilineární zobrazení $F : U \times V \rightarrow W$ lineární?
- Pro které bilineární formy je jejich matice symetrická (antisymetrická)?
- Kdy jsou dvě matice stejného typu maticemi téže bilineární formy?
- Co je duál vektorového prostoru a jaká je jeho souvislost s bilineární formou?
- Kdy je bilineární forma regulární (singulární)?
- Co je kvadratická forma a polární forma kvadratické formy?
- Lze každou kvadratickou formu diagonalizovat?
- Kdy jsou dvě čtvercové matice kongruentní?

U předchozích otázek předpokládejte, že těleso, nad kterým uvažujeme příslušné vektorové prostory resp. matice, bude mít charakteristiku různou od dvou.

Bilineární a kvadratické formy nad tělesem reálných čísel

- Co je signatura reálné čtvercové matice?
- Co tvrdí Sylvestrův zákon setrvačnosti?
- Co je signatura symetrické reálné bilineární formy resp. reálné kvadratické formy?
- Jak se liší situace pro reálné a komplexní symetrické matice?
- Popište formy definitnosti reálné kvadratické formy a charakterizujte pozitivně a negativně definitní matice?
- Jaký je vztah matematické analýzy a definitnosti matic?

Euklidovské prostory

- Co je reálný skalární součin?
- Jak se definuje norma (délka)vektoru?
- Co je euklidovský prostor?
- Která podmínka definuje standardní skalární součin?
- Co je Gramova matice a jaké má vlastnosti? Na čem závisí regularita Gramovy matice?
- Vyjmenujte alespoň dvě v textu zmíněné nerovnosti, ve kterých se vyskytuje norma a/nebo skalární součin.
- Co je odchylka vektorů?
- Zformulujte kosinovou resp. Pythagorovu větu.
- Co je ortogonální resp. ortonormální báze?
- Popište Gram-Schmidtův ortogonalizační proces.-

- Kdy je reálná čtvercová matice ortogonální?

Ortogonalní projekce a prostory

- Co je ortogonalní doplněk (ortokomplement) dané množiny?
- Popište kolmý průmět vektoru do podprostoru.
- Jaké vlastnosti má operátor ortogonalní projekce?
- Jak se určí vzdálenost dvou afinních podprostorů?
- Co je příčka afinních podprostorů?
- Jak je definována odchylka afinních podprostorů resp. nadrovin?
- Definujte polární a sférické souřadnice. Jak vypadá přechod od polárních ke sférickým souřadnicím a naopak?

Unitární prostory

- Co je to seskvilineární (půldruhalineární) forma na komplexním vektorovém prostoru?
- Kdy jsou dvě komplexní čtvercové matice maticemi téže seskvilineární formy?
- Jaký je vztah seskvilineární formy a její reálné a imaginární části? Jaký je vztah reálné části seskvilineární formy k její imaginární části?
- Kdy je seskvilineární forma hermitovská?
- Definujte komplexní skalární součin. Co je to standardní komplexní skalární součin?
- Kdy je komplexní čtvercová matice unitární?

Vlastní čísla a vlastní vektory

- Co jsou podobné matice?
- Definujte stopu matice. Jaké jsou stopy a determinanty podobných matic?
- Kdy je lineární operátor diagonalizovatelný?
- Definujte pojem vlastního čísla a vlastního vektoru lineárního operátoru resp. čtvercové matice.
- Jak se k sobě mají vlastní čísla podobných matic?
- Definujte pojem invariantního podprostoru lineárního operátoru.
- Charakterizujte diagonalizovatelnost lineárního operátoru pomocí vlastních vektorů resp. pomocí invariantních podprostorů.
- Definujte charakteristickou matici dané matice a jí odpovídající charakteristický polynom a charakteristickou rovnici.
- Které skaláry jsou kořeny charakteristické rovnice?

Spektrum operátoru a Jordanův kanonický tvar

- Co je spektrum lineárního operátoru?

- Definujte algebraickou váhu spektra. Co je to jednoduché spektrum?
- Co je vlastní podprostor lineárního operátoru určený vlastní hodnotou? Čím je určena geometrická násobnost dané vlastní hodnoty?
- Jaký je vztah mezi algebraickou a geometrickou násobností? Jaká je algebraická resp. geometrická násobnost dvou podobných matic?
- Definujte pojem Jordanovy buňky řádu n pro daný skalár. Jaká vlastní čísla má Jordanova buňka? Popište jejich algebraickou resp. geometrickou násobnost.
- Co je Jordanův kanonický tvar? Kolik Jordanových buněk má Jordanův kanonický tvar? Které matice jsou podobné matici v Jordanově kanonickém tvaru? Jak Jordanův kanonický tvar najdeme?
- Jaký je geometrický význam komplexních vlastních čísel pro reálné matice?
- Charakterizujte diagonalizovatelnost lineárního operátoru pomocí Jordanových buněk.
- Co jsou zobecněné Jordanovy buňky?