Algebra 2 10.6.2005

Jméno: ....

Hodnocení						$\sum$	

Na každý příklad získáte nezáporný počet bodů.
Minimum je 25 bodů.
Na práci máte 90 minut.

1. (10krát ± 1 bod — správně 1 bod, chybně -1, bez odpovědi 0)
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano** — **ne** Mají-li dvě přirozená čísla stejnou poslední číslici, pak jejich desáté mocniny mají stejné dvě poslední číslice dekadického zápisu.

(b) **ano** — **ne** Mezi čísly 1 až 60 existuje $\varphi(\varphi(60)) = 8$ primitivních kořenů modulo 60.

(c) **ano** — **ne** Diofantická rovnice $x^3 + y^3 = 9$ nemá řešení v množině přirozených čísel.

(d) **ano** — **ne** Lineární kongruence $ax \equiv b \pmod{m}$, kde $a, b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$, má vždy řešení modulo m, platí-li $a \mid b$.

(e) **ano** — **ne** Binomická kongruence $x^n \equiv a \pmod{p}$, kde $a, n \in \mathbb{N}$ a p je prvočíslo splňující $(n, p-1) = 1$, má jediné řešení modulo p.

(f) **ano** — **ne** Relace dělitelnosti je na množině přirozených čísel relací uspořádání.

(g) **ano** — **ne** Zobrazení $f : x \to x^3$ je bijekcí na libovolné redukované soustavě zbytků modulo 31.

(h) **ano** — **ne** Pro všechna lichá čísla n platí $\varphi(2n) = \varphi(n)$.

(i) **ano** — **ne** Je-li p prvočíslo, pak má libovolná polynomiální kongruence $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ nejvýše $\mathrm{st}(f)$ řešení modulo m.

(j) **ano** — **ne** Je-li $n > 4$ složené, pak $n \mid (n-1)!$.

2. (8 bodů) Určete počet řešení kongruence $x^2 \equiv 2541 \pmod{4673}$, víte-li, že 4673 je prvočíslo.

3. (8 bodů) Pro číslo $n = 1080$ určete **počet** a **součet** jeho kladných dělitelů a rovněž počet přirozených čísel $x \leq n$, pro která $(x, n) = 1$.

4. (8 bodů) Rozhodněte, pro která přirozená čísla n je číslo $2^{2^n} - 2^{n^2}$ dělitelné sedmi.

5. (8 bodů) Dokažte nebo vyvraťte tvrzení: „pro každé prvočíslo $p \neq 5$ platí, že alespoň jedno z čísel $p^2 + 4$, $p^2 + 6$ není prvočíslo.“

6. (8 bodů) Řešte diofantickou rovnici $7x^2 + 25y + 13 = 0$.