Algebra 2 27.5.2005

Jméno: ....

Hodnocení						$\sum$	

Na každý příklad získáte nezáporný počet bodů.
Minimum je 25 bodů.
Na práci máte 90 minut.

1. (10krát ± 1 bod — správně 1 bod, chybně -1, bez odpovědi 0)
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano** — **ne** Lineární diofantická rovnice $ax = b$ má pro libovolná $a, b \in \mathbb{Z}$ splňující $a \mid b$ nekonečně mnoho řešení.

(b) **ano** — **ne** Kongruence $ax^2 \equiv b \pmod{m}$, kde $a, b, m \in \mathbb{N}$, nemá řešení, pokud $(a, m) \nmid b$.

(c) **ano** — **ne** Jsou-li p, q lichá prvočísla taková, že platí $p \equiv 1 \pmod{4}$, pak $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$.

(d) **ano** — **ne** Primitivní kořeny neexistují modulo žádné složené číslo větší než 4.

(e) **ano** — **ne** Číslo 5 je jediným řešením rovnice $\varphi(m) = 4$.

(f) **ano** — **ne** Pro každé $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ platí: $[x + n] = [x] + n$.

(g) **ano** — **ne** Soustava kongruencí

$$\begin{aligned} a_1 x &\equiv b_1 \pmod{m_1} \\ a_2 x &\equiv b_2 \pmod{m_2} \end{aligned}$$

je řešitelná právě když $(m_1, m_2) \mid (b_1 - b_2)$.

(h) **ano** — **ne** Pro Jacobiho symbol $\left(\frac{a}{b}\right)$, kde $2 \nmid b$, platí: je-li $\left(\frac{a}{b}\right) = -1$, pak kongruence $x^2 \equiv a \pmod{b}$ není řešitelná.

(i) **ano** — **ne** Polynomiální kongruence $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$, kde p je prvočíslo, má nejvýše $\mathrm{st}(f)$ kořenů.

(j) **ano** — **ne** Pro každé $a, m \in \mathbb{N}$, $(a, m) = 1$ je řád čísla a modulo m násobkem $\varphi(m)$.

2. (8 bodů) Rozhodněte, které z následujících kongruencí (resp. soustav kongruencí) jsou řešitelné.

(a) $x \equiv 1 \pmod{3}$
$x \equiv -1 \pmod{9}$

(b) $4x \equiv 1 \pmod{1234567891011}$

(c) $x \equiv 3 \pmod{29}$
$x \equiv 5 \pmod{47}$

(d) $x^2 \equiv 3 \pmod{29}$
$x^2 \equiv 5 \pmod{47}$

(e) $x^2 \equiv 5 \pmod{29}$
$x^2 \equiv 3 \pmod{47}$

(f) $x^{10} \equiv 7 \pmod{3^{10}}$

3. (8 bodů) Učitel matematiky se zmínil, že dnes mají narozeniny obě jeho děti. Když se ho žáci zeptali na jejich věk, odpověděl hádankou: „Součet trojnásobku druhé mocniny dceřina věku a sedminásobku součinu věků obou dětí je o 16 větší než šestinásobek druhé mocniny synova věku.“ Určete věk obou dětí (všechny možnosti).

4. (8 bodů) Řešte rovnici $\varphi(pm) = \varphi(qm)$ (pro neznámé $m \in \mathbb{N}$ a prvočísla p, q)

5. (8 bodů) Určete, pro která prvočísla p je řešitelná kongruence

$$x^2 + 2 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Je těch prvočísel, pro která je kongruence řešitelná, konečně nebo nekonečně mnoho? Zdůvodněte.

6. (8 bodů) Určete, pro která $n \in \mathbb{N}$ platí $6^n - 1 \mid 7^n - 1$.