

Zobecněný lineární regresní model

Zobecněný lineární regresní (jednorovnicový) model je charakterizován následujícími vlastnostmi modelových veličin :

- A) **Centrovanost náhodných složek** $E\varepsilon = 0$
- B) **Obecnost kovarianční matice náhodných složek:** $Cov(\varepsilon, \varepsilon') = \Sigma$ (obecná, nestochastická matice)
- 1b) **heteroskedasticita**
- 2b) **autokorelovanost** náhodných složek
- C) **Nekorelovanost náhodných složek s nezávisle proměnnými** $EX'\varepsilon = 0$
- D) **Plná hodnota matice vysvětlujících proměnných** $h(X) = k$

Odhadová funkce zobecněné metody nejmenších čtverců (GLS) v zobecněném lineárním regresním modelu

(tzv. Aitkenovo zobecnění MNČ/OLS)

poskytuje odhad ${}_{GLS}\hat{\beta}$ regresních koeficientů β ve tvaru

$${}_{GLS}\hat{\beta} = (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}y$$

a má v zobecněném lineárním regresním modelu následující vlastnosti :

1. odhad ${}_{GLS}\hat{\beta}$ je nestranný (pro libovolnou velikost vzorku T)

$$\begin{aligned} E({}_{GLS}\hat{\beta}) &= E(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}y = E(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}(X\beta + \varepsilon) = \\ &= E(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}X\beta + E(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}\varepsilon = \\ &= E\beta + (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}E\varepsilon = \beta + 0 = \beta \end{aligned}$$

2. odhad ${}_{GLS}\hat{\beta}$ je lineární (vůči y)

neboť je lineární formou pozorování závisle proměnné ${}_{GLS}\hat{\beta} = (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}y$ s maticí $C' = (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}$ koeficientů příslušné lineární formy. Poznamenejme, že vždy platí $C'X = (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}X = I_k$, kde I_k je jednotková matice řádu k .

3. kovarianční matice příslušná odhadové funkci má tvar

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Cov}_{(GLS)}(\hat{\beta}) &= \mathbf{E}[(\hat{\beta} - \mathbf{E}\hat{\beta}) \cdot (\hat{\beta} - \mathbf{E}\hat{\beta})'] = \mathbf{E}[(\hat{\beta} - \beta) \cdot (\hat{\beta} - \beta)'] = \\
 &= \mathbf{E}\left[\left((X' \Sigma^{-1} X)^{-1} X' \Sigma^{-1} y - \beta\right) \left[\left((X' \Sigma^{-1} X)^{-1} X' \Sigma^{-1} y - \beta\right)'\right]\right] = \\
 &= \mathbf{E}\left[\left((X' \Sigma^{-1} X)^{-1} X' \Sigma^{-1} (X\beta + \varepsilon) - \beta\right) \left[\left((X' \Sigma^{-1} X)^{-1} X' \Sigma^{-1} (X\beta + \varepsilon) - \beta\right)'\right]\right] = \\
 &= \mathbf{E}\left[\beta + (X' \Sigma^{-1} X)^{-1} X' \Sigma^{-1} \varepsilon - \beta\right] \left[\beta + (X' \Sigma^{-1} X)^{-1} X' \Sigma^{-1} \varepsilon - \beta\right]' = \\
 &= \mathbf{E}\left[(X' \Sigma^{-1} X)^{-1} X' \Sigma^{-1} \varepsilon\right] \left[(X' \Sigma^{-1} X)^{-1} X' \Sigma^{-1} \varepsilon\right]' = \\
 &= (X' \Sigma^{-1} X)^{-1} X' \Sigma^{-1} \mathbf{E}[\varepsilon \varepsilon'] \Sigma^{-1} X (X' \Sigma^{-1} X)^{-1} = \\
 &= (X' \Sigma^{-1} X)^{-1} (X' \Sigma^{-1} \Sigma \Sigma^{-1} X) (X' \Sigma^{-1} X)^{-1} = (X' \Sigma^{-1} X)^{-1} \quad \square.
 \end{aligned}$$

4. odhad ${}_{GLS} \hat{\beta}$ **je nejlepší** ve smyslu *minimální kovarianční matice* $\mathbf{Cov}_{(GLS)}(\hat{\beta})$,
neboť pro kovarianční matici kterékoliv jiné (lineární) odhadové funkce $\tilde{\beta}$
platí:

$$\mathbf{Cov}(\tilde{\beta}) - \mathbf{Cov}_{(GLS)}(\hat{\beta}) = \Omega$$

kde Ω je nějaká pozitivně semidefinitní matice řádu k (rozměrů $k \times k$).

Ověření Bez újmy na obecnosti můžeme matici \mathbf{D} libovolné jiné lineární odhadové funkce $\tilde{\beta}$ vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{D} = (X' \Sigma^{-1} X)^{-1} X' \Sigma^{-1} + \mathbf{G}'$$

Poznámka Vzhledem k požadavku na nestrannost ${}_{GLS} \hat{\beta}$ musí s ohledem na platnost $\mathbf{D}' \mathbf{X} = (X' \Sigma^{-1} X)^{-1} X' \Sigma^{-1} X + \mathbf{G}' X = \mathbf{I}_T$, vždy platit $\mathbf{G}' X = 0$.

Pr*o libovolnou jinou (lineární, nestrannou) odhadovou funkci tedy musí platit

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Cov}(\tilde{\beta}) &= \mathbf{E}\left[(\tilde{\beta} - \mathbf{E}\tilde{\beta}) \cdot (\tilde{\beta} - \mathbf{E}\tilde{\beta})'\right] = \mathbf{E}\left[(\tilde{\beta} - \beta) \cdot (\tilde{\beta} - \beta)'\right] = \\
 &= \mathbf{E}\left[\left((X' \Sigma^{-1} X)^{-1} X' \Sigma^{-1} + \mathbf{G}'\right) y - \beta\right] \left[\left((X' \Sigma^{-1} X)^{-1} X' \Sigma^{-1} + \mathbf{G}'\right) y' - \beta'\right]' = \\
 &= \mathbf{E}\left[\left((X' \Sigma^{-1} X)^{-1} X' \Sigma^{-1} + \mathbf{G}'\right) (X\beta + \varepsilon) - \beta\right] \left[\left((X' \Sigma^{-1} X)^{-1} X' \Sigma^{-1} + \mathbf{G}'\right) (X\beta + \varepsilon) - \beta\right]' = \\
 &= \mathbf{E}\left[\left((X' \Sigma^{-1} X)^{-1} X' \Sigma^{-1} X\beta + \mathbf{G}' X\beta + \varepsilon\right) + \mathbf{G}' \varepsilon - \beta\right] \left[\left((X' \Sigma^{-1} X)^{-1} X' \Sigma^{-1} X\beta + \mathbf{G}' X\beta + \varepsilon\right) + \mathbf{G}' \varepsilon - \beta\right]' \\
 &\dots\dots\dots \\
 &= \mathbf{E}\left[\left((X' \Sigma^{-1} X)^{-1} X' \Sigma^{-1} \varepsilon + \mathbf{G}' \varepsilon\right) * \left[\left((X' \Sigma^{-1} X)^{-1} X' \Sigma^{-1} \varepsilon + \mathbf{G}' \varepsilon\right)'\right]\right] =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E \left[\left(X' \Sigma^{-1} X \right)^{-1} X' \Sigma^{-1} \varepsilon \varepsilon' \Sigma^{-1} X \left(X' \Sigma^{-1} X \right)^{-1} + G' \varepsilon \varepsilon' G + \left(X' \Sigma^{-1} X \right)^{-1} X' \Sigma^{-1} \varepsilon \varepsilon' G + \right. \\
&\quad \left. + G' \varepsilon \varepsilon' \Sigma^{-1} X \left(X' \Sigma^{-1} X \right)^{-1} \right] = \\
&= \left(X' \Sigma^{-1} X \right)^{-1} X' \Sigma^{-1} E \varepsilon \varepsilon' \Sigma^{-1} X \left(X' \Sigma^{-1} X \right)^{-1} + G' E \varepsilon \varepsilon' G + \left(X' \Sigma^{-1} X \right)^{-1} X' \Sigma^{-1} E \varepsilon \varepsilon' G + \\
&\quad + G' E \varepsilon \varepsilon' \Sigma^{-1} X \left(X' \Sigma^{-1} X \right)^{-1} = \\
&= \left(X' \Sigma^{-1} X \right)^{-1} X' \Sigma^{-1} \Sigma \Sigma^{-1} X \left(X' \Sigma^{-1} X \right)^{-1} + G' \Sigma G + \left(X' \Sigma^{-1} X \right)^{-1} X' \Sigma^{-1} \Sigma G + G' \Sigma \Sigma^{-1} X \left(X' \Sigma^{-1} X \right)^{-1} = \\
&= \left(X' \Sigma^{-1} X \right)^{-1} + G' \Sigma G + \left(X' \Sigma^{-1} X \right)^{-1} X' G + G' X \left(X' \Sigma^{-1} X \right)^{-1} = \\
&= \left(X' \Sigma^{-1} X \right)^{-1} + G' \Sigma G = Cov_{(GLS)} \hat{\beta} + G' \Sigma G \quad \square.
\end{aligned}$$

kde $G' \Sigma G$ je zřejmě pozitivně semidefinitní matice.

Poznámka 1 Odhadová funkce zobecněné metody nejmenších čtverců ${}_{GLS} \hat{\beta}$ ve tvaru ${}_{GLS} \hat{\beta} = \left(X' \Sigma^{-1} X \right)^{-1} X' \Sigma^{-1} y$ v situacích, kdy (což je pravidlem) neznáme přesný tvar kovarianční matice Σ , není přímo použitelná. Proto je jí nutno zpravidla nahradit výrazem

$${}_{GLS} \hat{\beta} = \left(X' \hat{\Sigma}^{-1} X \right)^{-1} X' \hat{\Sigma}^{-1} y$$

kde $\hat{\Sigma}$ je nějaký vhodný odhad matice Σ .¹

Poznámka: Všimněme-si, že zobecněná metoda nejmenších čtverců přechází v případě, že kovarianční matici náhodných složek je diagonální se stejnými prvky v obyčejnou metodu nejmenších čtverců:

${}_{GLS} \hat{\beta} = \left(X' \Sigma^{*-1} X \right)^{-1} X' \Sigma^{*-1} y$, kde $\Sigma^* = \sigma^2 I_T$, pak zřejmě platí

$$\begin{aligned}
{}_{GLS} \hat{\beta} &= \left(X' (\sigma^2 I_T)^{-1} X \right)^{-1} X' (\sigma^2 I_T)^{-1} y = \left(X' \sigma^{-2} X \right)^{-1} \left(X' \sigma^{-2} y \right) = \\
&= \sigma^2 \left(X' X \right)^{-1} \sigma^{-2} X' y = \left(X' X \right)^{-1} X' y = {}_{OLS} \hat{\beta}
\end{aligned}$$

Poznámka 2 Odhadová funkce obyčejné metody nejmenších čtverců (OLS) ${}_{OLS} \tilde{\beta}$ má v zobecněném lineárním regresním modelu tyto vlastnosti :

- 1) odhad ${}_{OLS} \tilde{\beta}$ je nestranný
- 2) odhad ${}_{OLS} \tilde{\beta}$ je lineární
- 3) odhad ${}_{OLS} \tilde{\beta}$ není nejlepší

Odvození zobecněné metody nejmenších čtverců GLS

Uvažujme nejprve lineární regresní model ve tvaru

¹ Získat odhad kovarianční matice Σ použitelné pro GLS estimátor je ovšem daleko problematičtější než odhad jediného prvku- rozptylu o OLS, kde lze snadno užít výrazy. Uvědomme si, že k odhadu obecně $T(T+1)/2$ máme jen $Tx(k+1)$ pozorovaných hodnot. Těch bude zpravidla méně než neznámých parametrů – prvků matice Σ .

² Z odvozování je patrné, že by totéž platilo i pro kovarianční matici obou těchto estimátorů.

$$(1) \quad y = X\beta + \varepsilon$$

u kterého uvolníme předpoklad **B)** a nahradíme ho předpokladem **B*)**
Kovarianční matice náhodných složek má obecný tvar :

$$\mathbf{B}^*) \quad \text{Cov}(\varepsilon, \varepsilon') = \Sigma \quad (\text{obecná, nestochastická matice}),$$

což znamená **B1*) heteroskedasticita**

B2*) autokorelovanost náhodných složek

Znormujeme-li matici Σ "průměrným rozptylem" σ^2 , můžeme ji vyjádřit ve tvaru

$$\Sigma = \sigma^2 \cdot V$$

kde σ^2 je skalár a V je symetrická pozitivně definitní matice. Matice V je normována tak, aby její stopa byla rovna T (tj. $\text{tr}(V) = T$). Průměr diagonálních prvků Σ je pak roven σ^2 .

Formálně zapsáno

$$\Sigma = \sigma^2 \cdot V = \sigma^2 \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1^2}{\sigma^2} & \frac{\sigma_{12}}{\sigma^2} & \dots & \frac{\sigma_{1T}}{\sigma^2} \\ \frac{\sigma_{12}}{\sigma^2} & \frac{\sigma_2^2}{\sigma^2} & \dots & \frac{\sigma_{2T}}{\sigma^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\sigma_{1T}}{\sigma^2} & \frac{\sigma_{2T}}{\sigma^2} & \dots & \frac{\sigma_{TT}}{\sigma^2} \end{bmatrix}$$

Pro $V = I_T$ model přechází ve standardní lineární regresní model.

Připomeňme, že libovolnou symetrickou pozitivně definitní matici lze vyjádřit ve tvaru součinu dvou regulárních vzájemně transponovaných matic. Zapišme tedy

$$(2) \quad V = R^{-1} \cdot R'^{-1} \quad \text{neboli} \quad V^{-1} = (R^{-1} \cdot R'^{-1})^{-1} = R' \cdot R$$

Přitom zřejmě platí $R \cdot V \cdot R' = I_T$.

Vynásobíme-li model 1) touto nesingulární maticí R (řádu i hodnosti T), dostaneme

$$(3a) \quad Ry = R \cdot X \cdot \beta + R \cdot \varepsilon \quad \text{neboli}$$

$$(3) \quad y^* = X^* \beta + \varepsilon^*$$

kde píšeme $y^* = R \cdot y$, $X^* = R \cdot X$, $\varepsilon^* = R \cdot \varepsilon$.

Určeme kovarianční matici náhodného vektoru transformovaných náhodných složek

$$(4) \quad E(\varepsilon^* \cdot \varepsilon^{*'}) = E(R \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon' \cdot R') = R \cdot E(\varepsilon \cdot \varepsilon') \cdot R' = \sigma^2 R \cdot V \cdot R' = \sigma^2 \cdot I_T$$

(Podotkneme, že matice R byla volena právě s cílem dosáhnout diagonální kovarianční matice náhodných složek)

Ukážeme, že transformovaný model 3) má vlastnosti **standardního lineárního regresního modelu**. Náhodné složky ε^* jsou totiž

a) centrované $E(\varepsilon^*) = E(R\varepsilon) = 0$

b) vzájemně nekorelované a homoskedastické

$$E(\varepsilon^* \varepsilon^{*'}) = E(R\varepsilon\varepsilon'R) = \sigma^2 R V R' = \sigma^2 I_T$$

c) nekorelované s vysvětlujícími proměnnými

$$E(X^{*'} \varepsilon^*) = E(X' R' R \varepsilon) = (R X)' R (E\varepsilon) = 0$$

(předsunutí před střední hodnotu je možné vzhledem k nestochastičnosti matic X, R).

Nyní ukážeme, jak lze takovou matici R sestavit:

Protože matice V^{-1} je stejně jako V symetrická a pozitivně definitní, lze ji vyjádřit takto:

$$(5) \quad V^{-1} A = A D$$

- matice $A_{[TxT]}$ je matice, jejíž sloupce tvoří vlastní (charakteristické) vektory matice V^{-1} . Vlastní vektory mohou být zapsány při vhodné normalizaci v ortonormálním tvaru, takže pro sloupce matice A lze psát $a_i \cdot a_j = 1$, $a_i \cdot a_j = 0$ pro $i \neq j$. Proto tedy platí $A A' = I_T$.

- matice D rozměrů $[TxT]$ je diagonální matice s diagonálou tvořenou vlastními (charakteristickými) čísly $R^{-1}: \lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^T$. Pro matici V^{-1} lze psát (při násobení 5) maticí A' zprava):

$$(5a) \quad V^{-1} = A D A' = A D^{1/2} \cdot D^{1/2} \cdot A'$$

kde D je diagonální matice, na jejíž diagonále jsou nějak (vzestupně či sestupně) seřazeny charakteristické kořeny/čísla matice V^{-1} . Matici R definujeme vztahem

$$R = D^{1/2} \cdot A' \quad \square .$$

Je zřejmé, že při této volbě matice R bude platit:

$$(6) \quad R' R = A D^{1/2} \cdot D^{1/2} A' = V^{-1}$$

Využijeme-li nyní odhadovou funkci *obyčejné metody nejmenších čtverců OLS* k odhadu parametrů modelu 3), dostaneme:

$${}_{OLS} \beta^* = (X^{*'} X^*)^{-1} X^{*'} y^* = (X' R' R X)^{-1} X' R' R y = (X' V^{-1} X)^{-1} X' V^{-1} y$$

nebo rovnocenně

$$(7) \quad {}_{OLS} \beta^* = (X' \Sigma^{-1} X)^{-1} X' \Sigma^{-1} y$$

Kovarianční matice příslušná této odhadové funkci má tvar

$$(8) \quad Cov(\beta^*) = \sigma^2 \cdot (X^{*'} X^*)^{-1} = \sigma^2 \cdot (X' V^{-1} X)^{-1} = (X' \Sigma^{-1} X)^{-1}$$

Vzhledem k tomu, že prvky matice V zpravidla neznáme, je nutno při praktickém uplatnění odhadové funkce GLS (zobecněné metody nejmenších čtverců) použít nějaký její odhad.

Nestranný odhad s^2 pro σ^2 získáme standardním způsobem:

$$(9) \quad s^2 = \frac{e^{*'} e^*}{T - k} = \frac{[y^* - X^* b]' [y^* - X^* b]}{T - k} = \frac{[R \cdot y - R \cdot Xb]' [R \cdot y - R \cdot Xb]}{T - k} = \frac{[y - Xb]' R' R [y - Xb]}{T - k} = \frac{e' V^{-1} e}{T - k}$$

Poznámka: Pracujeme-li s centrovanými veličinami y^* , lze **rozptyl závisle proměnné** vyjádřit jako

$$y^{*'} y^* = [X^* b + e^*]' [X^* b + e^*] = b' X' R' R X b + e' R' R e = b' X' V^{-1} X b + e' V^{-1} e$$

První člen představuje **vysvětlený**, druhý člen **nevysvětlený (též reziduální) rozptyl**. Reziduální rozptyl je představován kvadratickou formou v proměnných e s maticí koeficientů V^{-1} .

Získat takový odhad není však pro obecný případ (obecná matice Σ) vůbec snadné, neboť narážíme na nedostatek vstupní modelové informace. Matice Σ má až $(T+1) \cdot T / 2$ různých prvků, zatímco modelová informace obsažená v matici X sestává pouze z $T \cdot k$ pozorovaných hodnot vysvětlujících proměnných. Při $T=20$ bychom potřebovali odhadnout až 210 různých prvků matice Σ . Z tohoto důvodu se v reálných situacích zpravidla uplatňují jednodušší verze obecné GLS-metody, hlavně

- vážená metoda nejmenších čtverců WLS, která operuje s maticí Σ , jež má nenulové prvky (rozptyly) pouze na hlavní diagonále
- různé speciální tvary matice Σ , jejíž prvky závisí na (podstatně) menším počtu jiných parametrů, které jsou snáze odvoditelné z dostupných dat.

Uvědomme si, že v případě:

- a) **standardního lineárního regresního modelu** (metodou OLS) můžeme využít k odhadu jediného parametru matice Σ (stejně velkého rozptylu náhodných složek) celkem T reziduálních hodnot e_t .
- b) **zobecněného lineárního regresního modelu postiženého toliko heteroskedasticitou** (metodou WLS) můžeme použít k odhadu T - parametrů matice Σ právě stejný počet T reziduálních hodnot e_t .
- c) **zobecněného lineárního regresního modelu v plné jeho obecnosti** (metodou GLS) můžeme použít k odhadu $(T+1) \cdot T / 2$ parametrů matice Σ právě jen těch T reziduálních hodnot e_t . (což zřejmě bez další případné doprovodné informace nestačí).

V případě metody WLS se problém řeší zpravidla využitím apriorního předpokladu o velikosti náhodných složek (obvykle se zde uplatní vztah velikosti rezidua vůči velikosti vysvětlované proměnné).¹

V případě metody GLS se zpravidla vysloví (problém zjednodušující) předpoklad o konkrétním tvaru závislosti náhodných složek navzájem (např. předpoklad o jejich vzájemné autokorelovanosti 1. řádu), čímž se výrazně sníží počet neznámých (odhadovaných) parametrů.²

Odhadová funkce vážené metody nejmenších čtverců

¹ Způsoby řešení tohoto problému budou podrobněji vyloženy v oddíle *Heteroskedasticita*

² Způsoby řešení tohoto problému budou podrobněji vyloženy v oddíle *Autokorelace*.

(WLS)

Vážená metoda nejmenších čtverců je speciálním případem zobecněné metody nejmenších čtverců. Je použitelná v situacích, kdy náhodné složky regresní rovnice nevykazují vzájemnou korelovanost.

Poskytuje odhady vykazující příznivé vlastnosti v modelu, který se vyznačuje (pouze) **heteroskedasticitou**, nikoliv **autokorelací náhodných složek**. Z obou podmínek vztahujících se k tvaru kovarianční matice náhodných složek Σ platí tedy jen

2a) (čistá) heteroskedasticita $Cov(\varepsilon, \varepsilon') = \Sigma$ (diagonální nestochastická matice) neboli

$$(10) \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_T^2 \end{pmatrix}$$

přičemž prvky hlavní diagonály jsou obecně různé.¹

Pro váženou metodu nejmenších čtverců platí v modelu zatíženém pouze heteroskedasticitou všechny vlastnosti zobecněné metody nejmenších čtverců. Odhadová funkce však bude mít jednodušší tvar, protože prvky diagonály inverzní matice Σ^{-1} značené σ^{ii} mají tvar

$$(11) \quad \sigma^{ii} = \frac{adj(\sigma_{ii})}{|\Sigma|} = \frac{\prod_{j=1, j \neq i}^T \sigma_{jj}}{\prod_{j=1}^T \sigma_{jj}} = \frac{1}{\sigma_{ii}}, \quad \sigma^{ij} = 0 \quad \text{pro } i \neq j$$

Matice Σ^{-1} je tedy také diagonální.

Nyní zapíšeme **tvar WLS-odhadové funkce** $WLS \hat{\beta} = (X' \Sigma^{-1} X)^{-1} X' \Sigma^{-1} y$ **ve „strukturním“ tvaru**

$$X' \Sigma^{-1} X = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^T \sigma^{tt} x_{1t} x_{t1} & \sum_{t=1}^T \sigma^{tt} x_{1t} x_{t2} & \dots & \sum_{t=1}^T \sigma^{tt} x_{1t} x_{tk} \\ \sum_{t=1}^T \sigma^{tt} x_{2t} x_{t1} & \sum_{t=1}^T \sigma^{tt} x_{2t} x_{t2} & \dots & \sum_{t=1}^T \sigma^{tt} x_{2t} x_{tk} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{t=1}^T \sigma^{tt} x_{kt} x_{t1} & \sum_{t=1}^T \sigma^{tt} x_{kt} x_{t2} & \dots & \sum_{t=1}^T \sigma^{tt} x_{kt} x_{tk} \end{pmatrix}, \quad X' \Sigma^{-1} y = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^T \sigma^{tt} x_{1t} y_t \\ \sum_{t=1}^T \sigma^{tt} x_{2t} y_t \\ \dots \\ \sum_{t=1}^T \sigma^{tt} x_{Tt} y_t \end{pmatrix}$$

Stejně jako v případě GLS, k praktickému nasazení odhadové metody WLS je zapotřebí uplatnit nějakým způsobem odhadnutý tvar $\tilde{\Sigma}$ kovarianční matice Σ . Budeme tedy pracovat s odhadovou funkcí tvaru

$$(12) \quad WLS \hat{\beta} = (X' \tilde{\Sigma}^{-1} X)^{-1} X' \tilde{\Sigma}^{-1} y.$$

¹ Diagonální prvky matice Σ (rozptyly) se značí buď σ_t^2 nebo jen σ_{tt} (tj. bez druhé mocniny)

$$\mathbf{X}'\tilde{\Sigma}^{-1}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^T \mathbf{s}^{tt} \mathbf{x}_{1t} \mathbf{x}_{1t}' & \sum_{t=1}^T \mathbf{s}^{tt} \mathbf{x}_{1t} \mathbf{x}_{2t}' & \dots & \sum_{t=1}^T \mathbf{s}^{tt} \mathbf{x}_{1t} \mathbf{x}_{Tt}' \\ \sum_{t=1}^T \mathbf{s}^{tt} \mathbf{x}_{2t} \mathbf{x}_{1t}' & \sum_{t=1}^T \mathbf{s}^{tt} \mathbf{x}_{2t} \mathbf{x}_{2t}' & \dots & \sum_{t=1}^T \mathbf{s}^{tt} \mathbf{x}_{2t} \mathbf{x}_{Tt}' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{t=1}^T \mathbf{s}^{tt} \mathbf{x}_{Tt} \mathbf{x}_{1t}' & \sum_{t=1}^T \mathbf{s}^{tt} \mathbf{x}_{Tt} \mathbf{x}_{2t}' & \dots & \sum_{t=1}^T \mathbf{s}^{tt} \mathbf{x}_{Tt} \mathbf{x}_{Tt}' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}'\tilde{\Sigma}^{-1}\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^T \mathbf{s}^{tt} \mathbf{x}_{1t} \mathbf{y}_t \\ \sum_{t=1}^T \mathbf{s}^{tt} \mathbf{x}_{2t} \mathbf{y}_t \\ \dots \\ \sum_{t=1}^T \mathbf{s}^{tt} \mathbf{x}_{Tt} \mathbf{y}_t \end{pmatrix}$$

Váhy v případě vážené metody nejmenších čtverců WLS bychom ovšem mohli stanovit i zcela subjektivně tak, že bychom užili odhadovou funkci **12)** s maticí $\tilde{\Sigma}^*$ s prvky

$$(13) \quad \tilde{\Sigma}^* = \begin{pmatrix} w_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & w_r \end{pmatrix}$$

Abychom získali příslušnou odhadovou funkci, stačí nyní všechny pozorované hodnoty ve vektoru \mathbf{y} a v matici \mathbf{X} dělit (po řádcích) odmocninami vah

w_1, w_2, \dots, w_T neboli

$$\mathbf{y}^* = \begin{pmatrix} y_1 / \sqrt{w_1} \\ y_2 / \sqrt{w_2} \\ \dots \\ y_T / \sqrt{w_T} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} x_{11} / \sqrt{w_1} & x_{12} / \sqrt{w_1} & \dots & x_{1k} / \sqrt{w_1} \\ x_{21} / \sqrt{w_2} & x_{22} / \sqrt{w_2} & \dots & x_{2k} / \sqrt{w_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{T1} / \sqrt{w_T} & x_{T2} / \sqrt{w_T} & \dots & x_{Tk} / \sqrt{w_T} \end{pmatrix}$$

Poznámka: Přirozeně, na vhodnosti volby vah w_t závisí kvalita (jmenovitě vydatnost) pořízených odhadů parametrů. Budou-li váhy co nepřesněji aproximovat směrodatné odchylky náhodných složek, pak budou i odhady vydatné. Pokud bychom však vzali váhy nepatřičné (např. bychom pozorování směrodatnými odchylkami σ_t násobili (nikoliv dělili), mohli bychom dostat odhady parametrů ještě méně vydatné než při nasazení metody OLS.