2. Diskrétní dynamické systémy

Hana Fitzová

Brno, 2006

Obsah

- Vnitřní a vnější popis
- Převod systému na stavový tvar
  - Hicksův příspěvek k teorii obchodních cyklů
- Lineární systém a jeho stabilita
  - Samuelsonův model hospodářských cyklů
- Simulace dynamických systémů
  - Pindyck-Rubinfeldův třírovnicový model

Diskrétní systémy

- Jejich chování je definováno na diskrétní časové množině $\mathcal{T} = \{kT : k \in \mathbb{Z}\}$
- k nazýváme *krok*
- T je délka kroku
- ze spojité funkce $f(t)$ získáme diskrétní funkci $g(k)$ vzorkováním: $f(t) = f(kT) = g(k)$

Vnější popis systému

Běžně se k vnějšímu popisu diskrétních systémů používá diferenční rovnice.

Výstup systému $y(k)$ závisí na minulých výstupech $y(k-i)$, popř. na řídícím vektoru $u(k-j)$ v minulých obdobích.

(1)

$$y(k) = f(y(k-1), \ldots, y(k-l_y), u(k-1), \ldots, u(k-l_u))$$

Vnitřní (stavový) popis

- zavedeme veličinu x, tzv. stav systému
- současný stav $x(k)$ a řízení $u(k)$ jednoznačně určují budoucí stavy $x(k+1)$, $x(k+2)$, $\ldots$ a výstupy $y(k)$, $y(k+1)$, $\ldots$
- deterministický dynamický systém ve stavovém tvaru (stavová rovnice a rovnice výstupu nebo též měření)

$$
\begin{aligned}
x(t+1) &= f(x(t), u(t)) \\
y(t) &= g(x(t), u(t))
\end{aligned}
$$

- Stavový popis vždy existuje, není určen jednoznačně, jeden z možných převodů je následující:

Věta

Položme

$$x(k) = (y(k)^T, \ldots, y(k-l_y+1)^T, u(k-1)^T, \ldots, u(k-l_u+1)^T)^T$$

Pak systém (1) lze zapsat jako systém ve stavovém tvaru.

Pro jednoduchost vynecháme v následujícím zápisu vektorů symbol ^{T}.

Důkaz (1)

Máme

$$y(t) = f(y(t-1), \ldots, y(t-l_y), u(t-1), \ldots, u(t-l_u))$$

Tedy

$$y(t+1) = f(y(t), \ldots, y(t-l_y+1), u(t), \ldots, u(t-l_u+1))$$

Položíme

$$x(t) = (y(t), \ldots, y(t-l_y+1), u(t-1), \ldots, u(t-l_u+1))$$

$$x(t+1) = (y(t+1), \ldots, y(t-l_y+2), u(t), \ldots, u(t-l_u+2))$$

Důkaz (2)

První složka vektoru $x(t+1)$ již svoji rovnici má, ostatní složky jsou prvky vektoru $x(t)$, máme tedy systém ve stavovém tvaru $x(t+1) = f(x(t), u(t));\ y(t) = g(x(t), u(t))$.

$$
\begin{array}{rcl}
y(t+1) & = & f(x(t)) \\
y(t) & = & x_1(t) \\
y(t-1) & = & x_2(t) \\
& \vdots & \\
u(t) & = & u(t) \\
u(t-1) & = & x_{l_y}(t) \\
& \vdots &
\end{array}
$$

Příklad

Nalezněte stavový tvar systému:

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + b_1 u_{t-1} + b_2 u_{t-2}$$

Hicksův model

Převěďte následující Hicksův model hospodářského cyklu na stavový tvar:

$$\begin{aligned} C_t &= (1-s)Y_{t-1} \\ I_t &= A_0(1+g)^t + v(Y_{t-1} - Y_{t-2}) \\ Y_t &= C_t + I_t \end{aligned}$$

C_t je spotřeba, s sklon k úsporám, Y_t důchod, I_t investice (autonomní + indukované), v akcelerátor.
Autonomní investice ztotožněte se vstupem u_{t-1}.

Stochastický dynamický systém

Stochastický dynamický systém ve stavovém tvaru

$$\begin{aligned} x(t+1) &= f(x(t), u(t), v(t)) \\ y(t) &= g(x(t), u(t), w(t)) \end{aligned}$$

- $v(t) \in \mathcal{L}_2^{n_v}$, $w(t) \in \mathcal{L}_2^{n_w}$
- $\mathrm{E}\, v(t) = 0$, $\mathrm{E}\, w(t) = 0$
- $v(t) \ldots$ šum procesu
- $w(t) \ldots$ šum výstupu

Lineární systém

Lineární stochastický dynamický systém ve stavovém tvaru

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) + v(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + w(t) \end{aligned}$$

- $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}, B \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}, C \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}, D \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$
- v_t a w_t jsou normální s nulovou střední hodnotou
- $E v_t w_t^T = 0$
- $E v_t v_t^T = Q$
- $E w_t w_t^T = R$

Stabilita systému

- Dynamický systém je stabilní $\Leftrightarrow$ je-li pevný bod systému přitahujícím pevným bodem.
- Stochastický systém je stabilní $\Leftrightarrow$ k němu příslušný deterministický systém je stabilní.
- Pracujeme-li s řízeným systémem, musí být vstup konstantní.
- Pevný bod lineárního systému:

$$x = Ax + Bu \;\Rightarrow\; x_p = (I - A)^{-1} Bu$$

Věta

Lineární stochastický dynamický systém je stabilní, právě když všechna vlastní čísla matice A leží v jednotkovém kruhu.

Postup důkazu:

- $y(t) = x(t) - x_p$
- $y(t+1) = Ay(t)$
- $A = PDP^{-1} \;\Rightarrow\; A^n = PD^nP^{-1}$
- $\text{diag}(D^n) = (\lambda_1^n, \ldots, \lambda_{n_x}^n) \;\Rightarrow |\lambda_i| < 1$

Samuelsonův model hospodářských cyklů

Nechť Y_t produkt, C_t je spotřeba, I_t investice, $1/(1-c)$ multiplikátor, v akcelerátor, G_t vládní výdaje; $0 < c < 1$, $v > 0$.

$$\begin{aligned} Y_t &= C(t) + I(t) + G(t) \\ C_t &= cY_{t-1} \\ I_t &= v(C_t - C_{t-1}) \\ G_t &= 1 \end{aligned}$$

Nalezněte řešení systému.

Simulace SDS

Mějme spojitý systém ve stavovém tvaru $\dot{x} = f(x)$
s počáteční podmínkou. Nechť
$T = \{t_k : k \in \{1, \dots, N\}, N \in \mathbb{N}\}$ je tzv. časový horizont.
Simulovat systém na horizontu T znamená nalézt vzorky trajektorie systému v časech t_k.

Tedy hledáme posloupnost $\{x_0, \dots, x_n\}$ stavů x takovou, že $x_k = x(t_k)$, kde funkce $x(t)$ je řešením dané soustavy diferenciálních rovnic.

Simulace DDS

Mějme řízený stochastický diskrétní systém ve stavovém tvaru s aditivními šumy s počáteční podmínkou. Nechť $T = \{1, \ldots, N\}$, $N \in \mathbb{N}$ je časový horizont.

Buď $\{u(0), \ldots, u(n)\}$ známá posloupnost řídících vektorů (trajektorie řízení) a $\{v(0), \ldots, v(n)\}$, $\{w(0), \ldots, w(n)\}$ posloupnosti realizací náhodných šumů v, w.

Simulovat systém na horizontu T znamená nalézt trajektorii $\{x(0), \ldots, x(n)\}$ stavů x a trajektorii $\{y(0), \ldots, y(n)\}$ výstupů y tak, aby platila stavová a výstupní rovnice systému.

Pindyck-Rubinfeldův model I

$$
\begin{aligned}
C_t &= c_0 + c_1 Y_t + c_2 C_{t-1} \\
I_t &= i_0 + i_1 Y_t + i_2 (Y_{t-1} - Y_{t-2}) + i_3 R_{t-4} \\
R_t &= r_0 + r_1 Y_t + r_2 (Y_t - Y_{t-1}) + r_3 (M_t - M_{t-1}) + r_4 (R_{t-1} + R_{t-2}) \\
Y_t &= C_t + I_t + G_t
\end{aligned}
$$

C je spotřeba, I investice, R úroková míra, Y produkt, G vládní spotřeba, M množství peněz.

Pindyck-Rubinfeldův model II

- V Matlabu si vykreslete dostupná americká data (soubor `data.m`) do obrázků a popište je.
- Odhadněte jednotlivé rovnice výše uvedeného Pindyck-Rubinfeldova modelu pomocí metody nejmenších čtverců (funkce `regress`) s využitím dat americké ekonomiky.
- Převeďte model zadaný vnějším popisem na stavový tvar.
- Ověřte, zda je systém stabilní.
- Proveďte simulaci systému a výsledky prezentujte graficky.