S dodatečnými opravami a dodatky bez vyznačení oprav

Vliv Kurta Gődela na kulturní niveau 2. poloviny 20. století

(Pro sborník z X. symposia o analytické filosofii, 100. výročí KG, duben 2006, Brno)

BLAŽENA ŠVANDOVÁ, Masarykova univerzita, Brno

Název tohoto příspěvku by mohl vyvolat mylný dojem sociologické studie, ve které půjde o sledování cest, jakými nám počítače změnily a stále ještě mění obyčejný život. Že tento vliv počítače mají je obecně známé, ale už mnohem méně se ví, že právě Gödelovo dílo zásadně přispělo k jejich vzniku a rozšíření. Ano, byl jedním z profesorů, těch „směšných figurek", které se dostaly pod úroveň politiků, manažerů supermarketů, televizních hvězd, modelek či sportovců. „Profesor má ovšem skrytou možnost odvety", napsal před půl stoletím Ludwig von Bertalanffy, vždyť právě prostřednictvím profesorů „ideje hýbají hmotou", to oni v skrytu svých pracoven řeší problémy, které pak přetvářejí naše hlediska a hodnoty. Bertalanffyho bonmot: „koukněte na toho chlapíka, který vám opravuje váš auťák nebo vám prodává pojištění - je produktem Lukretia Cara, Newtona, Locka, Darwina, Adama Smitha, Ricarda, Freuda a Watsona", lze stejně dobře použít i na náš případ: koukněte na toho chlapíka, který nově instaluje váš zavirovaný počítač, vyhledává poslední informace na internetu nebo jedním kliknutím odesílá objemnou korespondenci - je produktem Lulla, Leibnize, Russella, Hilberta, Gödela, Churche, von Neumanna a Turinga - „ačkoli si můžete být jisti, že absolvent střední školy nebo dokonce univerzity o většině z nich neslyšel" (Bertalanffy 1972, 81-82).

Bezprostřední vliv počítačů na náš obyčejný život je jen viditelnou stranou mince inspirativního potenciálu díla našeho myslitele. Ostatně zájem kulturní obce o tohoto aureolou výlučnosti opředeného génia nelze vysvětlit pouhou užitečností počítačů, s nimiž ho ostatně, jak už jsme podotkli, obecné povědomí většinou nespojuje. Proč tedy probouzí zájem veřejnosti dílo, které je i v rámci vědy často považováno za poněkud „esoterické"? Jenže neznamená ona „esoteričnost" určitý přesah přes oblast logiky, matematiky a fyziky? Co jednak tyto vědy pozměnilo (vzpomeňme von Neumannovo oslavné: „logika po Gödelovi už nikdy nebude jako dřív" (Bulloff 1969)) a jednak - a to je velmi provokativní domněnka - je napojilo na proud západoevropské tradice zdůrazňující spíše kladení otázek než předkládání hotových odpovědí. V druhé půlce 20. století jsme často slýchali Gödelovo jméno z úst lidí nejrůznějšího smýšlení, kteří se jím zaštiťovali v odborných i laických debatách o fungování lidské mysli, o nekonečnu, o pravdě v matematice i mimo ni a vůbec o povaze lidského poznání.

V těchto debatách se často mluvilo o Gödelově důkazu první věty o neúplnosti, jehož jádrem je demonstrace nerozhodnutelné věty (formule) pomocí prostředků logiky 1. řádu s aritmetikou (Gödelův slavný článek z r. 1931). Pro pochopení filosofického přesahu 1. věty o neúplnosti je zajímavá otázka podobnosti Gödelova důkazu a Cantorova diagonálního argumentu. Gödelova inovace v přístupu k diagonálnímu argumentu se projevila i v jeho pokusech dokázat nezávislost Cantorovy hypotézy kontinua a patrně i v odlišném názoru na povahu nekonečna. Další příbuzný okruh kolem první věty o neúplnosti se týká problematiky indukce, jmenovitě vztahu neúplné indukce k diagonálnímu argumentu, o který se matematici začali zajímat nejpozději od 70. let 20. století (průkopnickou prací je tu Saulem Kripkem a dalšími citovaná kniha Y.N. Moschovakise *Elementary Induction on Abstract Structures* z r. 1974). Přetlumočeno do laické řeči filosofujícího diskutéra čelíme otázce: Existuje podobná paralela mezi Gödelovým diagonálním postupem a paradoxem hromady, jako je ta mezi nerozhodnutelnou větou a paradoxem lháře, na kterou upozorňuje sám Gödel? Na jedné straně není pochyb o exaktnosti dedukce, jíž se vyznačuje Gödelův důkaz, ale na druhé straně důvod pro odlišnost pravdy nerozhodnutelné věty od všech ostatních pravd formálního systému je podobný důvodu pro odlišnost hromady písku od velkého počtu jednotlivých zrnek. Paradox

Odstraněno: písku

hromady evokuje Aristotelovo učení o celcích a částech, jemuž předcházela Platónova nauka o idejích. Nedala by se dokonce vést určitá paralela této nauky s Cantorovou teorií množin (která je naivnímu pohledu zřejmá)? Pomocí nauky o celcích a částech je pak možné snadněji pochopit některé pojmy teorie množin, ale také ukázat kontinuitu myšlení západoevropské kulturní tradice, která jakoby se stále exaktněji pokoušela formulovat problémy, které lidstvo provázejí od počátků jeho kulturní historie. Po Gödelovi můžeme snadněji pochopit vztah mechanických postupů a logiky, která není jen jejich popisem. V přirozeném jazyce nacházíme nejen jevy, které dokážeme popsat prostředky logiky 1. řádu, ale i jevy, k jejichž popisu jsou vhodné logiky vyšších řádů. Nebo které se v rámci nějakého logického systému nedají modelovat vůbec.[1] V jazyce logiky vyššího než 1. řádu lze definovat nové objekty zobecňováním (abstrakcí), přecházet do hierarchicky vyšších úrovní jazyka nebo dokonce - ale to už se dostáváme na hodně tenký led - se pokusit pomocí transfinitní indukce vysvětlit (ne převést na mechanický!) proces přirozeného postupu sebe sama přesahující mysli, a prozkoumat tuto její schopnost ve vztahu ke schopnosti transcendence.

Odstraněno:

Diskuse o obecnější platnosti Gödelova díla než je jeho platnost v příslušných vědách probíhaly v druhé polovině 20. století na pozadí prudkého rozvoje počítačů, informatiky a umělé inteligence. Tento směr vývoje nebyl stimulován jen tendencí nahradit duševní práci strojem, ale snahou lépe poznat způsoby našeho vlastního myšlení, poodhalit tajemství lidské mysli, naplnit antický imperativ „poznej sama sebe“. Filosofické přesahy, které Gödelovo dílo má, dokládají mezi jinými i rozepře o pojetí pravdy mezi filosofy a rétory vyprovokované potřebou etických hledisek lidí zabývajících se ve veřejné sféře politikou a ekonomií, jak jsme toho byli svědky i u nás koncem 90. let 20. století. Mám tu na mysli zejména veřejnou debatu vyprovokovanou Václavem Bělohradským a jeho obhajobou rétorů (viz například shrnutí, které podal Fidelius 2000, 318-408).

1

Často slýcháme, že dílo Kurta Gődela je přímo exemplárním příkladem vědecké přesnosti, že důkaz věty o neúplností je naprosto exaktní. Tou přesností se míní, že Kurt Gödel jednoznačně definoval významy základních znaků jazyka svého formálního systému a jednoznačně zadal pevná pravidla, jak se znaky manipulovat, abychom z předem zadaných axiomů - intuitivně zřejmých pravd - vyvodily pravdy, které se dají formulovat v tom jazyce.

Jenže takový přesně definovaný jazyk je vždycky vnořen do „širšího“ jazyka, ve kterém ten přesný zadáme. Tento „širší“ jazyk jistě nemůže být přesný ve stejném smyslu, protože by potřeboval ještě nějaký „širší“ jazyk atd., což vede k nekonečnému regresu. Tohle snad mínil A.N. Whitehead, když prohlásil, že „exaktnost je podvod“ (1970, 117).

Odstraněno: v tomtéž

Bylo by zajímavé srovnat význam slova přesnost užívaný v souvislosti s Gödelovým důkazem s významem řeckého slova *akribia* (případně latinského *subtilitas, exactus*). Antický sofista Prodikos prý dbal, aby se slova užívala jen v jejich jediném významu, napsal o tom, máme-li věřit Platónovi, populární spis O správnosti jmen (*Peri orthoteta onomata*). Ne ale všichni brali Prodika vážně. Držet se jednoho významu slova se zdá být rozumný požadavek, ale praxe vypadá jinak, jak každému lehce ukázal Sókratés.

Gödelův důkaz existence nerozhodnutelné věty je přesný ve smyslu přesného důkazního aparátu. Na druhé straně ukázání, že nerozhodnutelná věta je pravdivá, už tento charakter nemá: „když je nedokazatelná a ona to sama o sobě tvrdí, pak je pravdivá“. Je to intuitivně zřejmé, ale není to exaktně dokázáno ve stejném smyslu, v jakém se teorém dokazuje z axiomů. - Pokusila jsem se tohle vysvětlit jednomu kolegovi, který má rád exaktní důkazy. Byl trochu zklamaný. Co vlastně je a co není vědecký důkaz?

Odstraněno: v tom

Odstraněno:

2

[1] Připustíme-li, že mohou v jazyce existovat jevy, které nelze popsat žádnou „logikou“ problematizujeme tím obsah samotné logiky. Záleží na tom, zda přeložíme řecké logos (z něhož je výraz logika odvozen) jako „řeč“, nebo jako rozum, ratio, podíl, čili omezíme-li se v tomto případě logiku na oblasti spočetného nekonečna (logiky 1. řádu).

Kurt Gődel byl především vědec a zasloužil se o rozvoj vědy. Traduje se, že profesor Stephen Kleene vyžadoval, aby doktorandi u zkoušky dovedli vyjmenovat pět Gődelových inovací, z nichž každá je základem jednoho odvětví moderní matematiky. Chtěl slyšet, že
1) věty o úplnosti a kompaktnosti jsou úhelnými kameny teorie modelů;
2) věty o neúplnosti ukazují, s jakými problémy se musí vypořádat teorie důkazu;
3) technické prostředky, které pro důkaz vět o neúplnosti Gődel použil, poskytly základ, na němž byla budována teorie rekurze a na ně navazující teorie vyčíslitelnosti a výpočetní složitosti;
4) Gődelovy konstruktivní množiny udaly směr, kterým se pak ubírala teorie množin;
5) výsledky, kterých dosáhl po roce 1933 v intuicionistické logice a které použil v důkazu konzistence publikovaném v roce 1958 v časopise *Dialectica*, stimulovaly rozvoj konstruktivní matematiky (podle Dawson 1997).

A pak tu byly mnohaleté marné pokusy dokázat nezávislost axiomu výběru a hypotézy kontinua (HP) na ostatních axiomech teorie množin, úkol, který vytyčil již Georg Cantor o téměř půlstoletí dříve. Po dlouhá desetiletí obracel tento problém pozornost matematiků na povahu nekonečna. Americké akademii věd doporučil Gődel nakonec v r. 1963 řešení Paula Cohena. Důkazem nezávislosti HP, její nerozhodnutelnosti vnitřními prostředky zavedené teorie množin vyšlo najevo, že to, jak nekonečnu rozumíme a jaký mu dáváme smysl, není věcí formálních prostředků teorie, ale naší zkušenosti, která sahá přes její hranice. Nekonečno klademe do našich teorií zvenčí podobně jako prostor, čas a pravdu, dobro a jsoucno.

Vedle těchto příspěvků matematice je třeba jmenovat neméně základní a technicky propracované objevy spadající do oblasti fyziky, které donedávna zůstaly trochu ve stínu výsledků v logice a matematice. Řešení Einsteinových rovnic z konce 40. let, která překvapivě ukazují, že čas by mohl mít dosud nevídané chování jako jsou časové smyčky do minulosti, stimulovaly nejen další přírodovědná zkoumání, ale ve své době předběhly i smělé sci-fi vize.

3

Co znamená aritmetizace jazyka, kterou použil Gödel v důkaze nerozhodnutelné věty (1. věty o neúplnosti)? Jazyk aritmetiky je jazyk čísel; pokud používá desítkovou číselnou soustavu, jsou jeho abecedou číslovky 1,2,3,4,5,6,7,8,9,0 a znaménka +, -,*./ pro sečítání, odčítání, násobení a dělení. Pokud by používal dvojkovou soustavu, vystačil by s číslovkami 0 a 1; pokud by používal například šestadvacítkovou soustavu, potřeboval by 26 různých znaků pro číslovky, tedy asi tolik, kolik je písmen abecedy. Písmena jazyka aritmetiky jsou číslovky, slova jazyka aritmetiky jsou čísla, jeho gramatika je dána číselnou soustavou a aritmetické operace jsou návodem, jak od jedněch slov přejít k jiným.

Jak bychom takový jazyk čísel mohli použít k tomu, co dokáže vyjádřit přirozený jazyk? Kdybychom písmenům (například české) abecedy přiřadili číslovky, pak by posloupnosti číslovek, tj. čísla znamenala slova.

V hebrejštině znamenají jednotlivá písmena abecedy slova a přitom současně čísla. Například *beth* znamená dům a současně číslo 2, *gimel* znamená velblouda a číslo 3, *jod* znamená ruku a číslo 10, atd. Posloupnost číslovek „23“ („*beth gimel*“) má v hebrejštině význam českého „dům velbloud“, takže si člověk může představit třeba velblouda vedle domu. V židovské kabale má taková představivost magický význam: číslo kapitoly určuje téma, které se v kapitole bude probírat. Podobnou myšlenku použil katalánský učenec R. Lull na počátku 14. století ke kombinování pojmů a nazval to Velké umění (*Ars magna*), a G.W. Leibniz na počátku 18. století zase snil o univerzálním jazyce, který by veškeré užitečné úvahy převáděl na snadněji kontrolovatelné číselné výpočty.

Leibnizovu myšlenku s jistou nadsázkou uskutečnil Kurt Gödel. Nejprve definoval jazyk, kterým vymezil axiomatický systém, do něhož vložil logiku Russelovy a

Whiteheadovy knihy *Principia Mathematica* doplněnou (Peanovými) axiomy pro aritmetiku. A tento jazyk aritmetizoval: celý jej zakódoval čísly a dokazování převedl na počítání.

V logice, s níž konkrétně pracoval, zvolil Gödel jako základní následující znaky: ¬ pro negaci, ∨ pro disjunkci, ∏ pro obecný kvantifikátor, 0 pro nulu, *f* pro funkci následníka (např. *f*0=1znamená, že následník nuly je jednička), „(“ pro otevírací závorku a „)“ pro zavírací závorku; a dále nekonečnou množinu proměnných pro každou z nekonečné množiny jejich typů. Zvoleným znakům přiřadil čísla následovně

0	*f*	¬	∨	∏	(	)
1	3	5	7	9	11	13

a proměnným x_1, y_1, z_1, … prvního typu (nad individui, tj. přirozenými čísly včetně 0), proměnným x_2, y_2, z_2, … druhého typu (nad třídami individuí), proměnným x_3, y_3, z_3, … třetího typu (nad třídami tříd individuí) atd., přiřadil čísla p_i^n, kde p_i jsou prvočísla větší než 13 a n je typ proměnné. Tak mohl zakódovat každou posloupnost znaků, zejména ty, které představují formule (věty).

Nechť jsou například n1, n2, … ns čísla, kterými byly zakódované znaky nějaké formule F v tom pořadí, v jakém se v F vyskytují. Pak vezmeme první z prvočísel p_1, p_2, … p_s v pořadí podle velikosti (počínaje číslem 2). Kódové (Gödelovo) číslo G formule F je $p_1^{n1} \cdot p_2^{n2} \cdot p_3^{n3} \cdot \ldots . \cdot p_s^{ns}$. Například jednou z dokazatelných formulí logiky, kterou Gödel použil byla

Odstraněno: ₂

Odstraněno: ²

Odstraněno: je

$$F = \neg(x \prod ((\neg(x (fy))) \vee (x (0)))),$$

kde *x* je proměnná 2. typu a *y* je proměnná 1. typu. Čísla znaků v této formuli jsou postupně 5,11,289,9,11,11,5,11,289,11,3,17,13,13,13,7,11,289,11,1,13,13,13,13. Kódovým číslem této formule je $G = 2^5 \cdot 3^{11} \cdot 5^{289} \cdot 7^9 \cdot 11^{11} \cdot 13^{11} \cdot 17^5 \cdot 19^{11} \cdot 23^{289} \cdot 29^{11} \cdot 31^3 \cdot 37^{17} \cdot 41^{13} \cdot 43^{13} \cdot 47^{13} \cdot 53^7 \cdot 59^{11} \cdot 61^{289} \cdot 71 \cdot 73^{13} \cdot 79^{13} \cdot 83^{13} \cdot 89^{13}$. Pomocí příslušného rozkladu na prvočísla a jejich mocniny lze z každého kódového čísla jedno jednoznačně určit původní posloupnost čísel, resp. původní posloupnost znaků příslušné formule. Zřejmě lze každou formuli zapsat jako přirozené číslo, ale ne každému přirozenému číslu náleží nějaká formule Gödelova systému (podle Rosser 1939, 226).

4

Gödel v článku (1931) použil tři různé jazyky:

1. přirozený jazyk, kterým je článek napsán;
2. formální jazyk axiomatického systému zahrnujícího logiku s aritmetikou;
3. jazyk čísel (aritmetiku), do kterého Gödel jedno jednoznačně přeložil formální jazyk včetně jeho důkazního aparátu, který tím zmechanizoval.

Aby do jazyka čísel převedl důkazní aparát, k tomu musel zavést pojem rekurzívní (vyčíslitelné) funkce. (Funkcím, které Gödel zavedl, se dnes říká primitivně rekurzívní a jsou podmnožinou rekurzívních.) Ukázal, že rekurzívní jsou vedle základních aritmetických operací i logické operace, např. také substituce čísla za proměnnou, která hraje důležitou roli při konstrukci nerozhodnutelné věty, dále kódování znaků a jejich posloupností do čísel a zpětné rozkódování do posloupností a jednotlivých znaků. Postup při konstrukci důkazního aparátu v jazyce aritmetiky načrtl Gödel v 46 krocích, z nichž předposledním je rekurzívní relace „být důkazem“, tj. dvoučlenný predikát D(x,y) znamenající „formule označená znakem pro proměnnou x je důkazem formule označené znakem pro proměnnou y“. V jazyce důkazního aparátu je to uděláno tak, že poslední sekvencí posloupnosti znaků, kterou je zaznamenán důkaz x formule y, je sama dokazovaná formule y. Hodnoty predikátu D(x,y) pro konkrétní argumenty x a y jsou buď 1 v případě, že x je důkazem y, nebo 0 v případě, že x není důkazem y (1 resp. 0 jsou pravdivostní hodnoty pravda resp. nepravda).

Jako v pořadí 46. krok zavedl Gödel pojem dokazatelnosti a to pomocí formule Dok(y) = ∃x D(x,y) znamenající „důkaz věty y existuje“ neboli „věta y je dokazatelná“. Vlastnost Dok(y) na rozdíl od relace D(x,y) obecně rekurzívní není. Zatímco umíme rozhodnout, zda je věta x důkazem věty y, když obě odpovídající posloupnosti znaků máme před sebou (x je posloupnost znaků, která končí znaky vyjadřujícími dokazovanou formuli y), najít neznámý důkaz věty y rekurzí znamená prohledávat jeden možný důkaz po druhém a zkoušet, jestli se zrovna neukáže být hledaným důkazem. Gödel ukázal, že když máme nějaké konkrétní formule x a y s Gödelovými čísly Gx a Gy, pak užitím jazyka čísel ověříme kalkulací pravdivost Dok(y), když jsme předtím dosadili Gx a Gy za proměnné x a y ve formuli ∃x D(x,y) (viz Gödel 1931, věta 5).

5

V Gödelově axiomatickém systému jsou platné pouze ty formule, které mají důkaz. Přitom to, čemu říkáme důkazy, jsou v podstatě opět formule, ale sestavené z výchozích axiomů a důkazních kroků tak, aby dokazování končilo v dokazované formuli. Je běžné, že důkaz mají i formule, které jsou samy již důkazem nějaké jiné formule. Jak formulí, které mají důkaz, tak těch, které jsou důkazem nějaké jiné formule, je spočetně nekonečně mnoho a protože podle kódových (Gödelových) čísel lze formule uspořádat, jedná se o tutéž množinu, pokud jde o jejich počet a způsob uspořádání. Relace D(x,y) s argumenty nad oborem formulí má aritmetický obraz, kterým je relace s odpovídajícími argumenty nad oborem Gödelových čísel formulí. Protože formální a aritmetický jazyk jsou výrazově rovnocenné (sémantika se zračí v syntaxi), je možné oslovovat tentýž objekt jednou jako formuli a jednou jako posloupnost znaků. Z technického hlediska je to právě tohle, co dovolí napodobit paradoxní zacyklení při demonstraci nedokazatelné věty.

Odstraněno: jedná-li se

Odstraněno:

V Tabulce 1 je naznačen zápis prvků matice odpovídající relaci D(x,y), tj. „x je důkazem y“ v jazyce aritmetiky. Po řádcích jsou vypsány funkce jedné proměnné $D_{Gi}(g)$ v pořadí podle velikosti jejich Gödelových čísel Gi, kde Gi je kódové číslo formule, kterou je funkce vyjádřena; formule vznikne z formule pro relaci D(x,y) tak, že za znak proměnné y dosadíme její Gödelovo číslo Gy. Oborem proměnné g jsou Gödelova čísla všech formulí. Protože v řeči posloupnosti znaků je formule znamenající důkaz vyjádřena touž posloupností znaků jako relace „být důkazem“, je Gödelovo číslo Gi formule $D_{Gi}(Gj)$ vlastně Gödelovo číslo formule x.

Tabulka 1

g/Gi $D_{Gi}(g)$	$D_g(G1)$	$D_g(G2)$	$D_g(G3)$	.	.
$D_{G1}(g)$	$D_{G1}(G1)$	$D_{G1}(G2)$	$D_{G1}(G3)$	.	
$D_{G2}(g)$	$D_{G2}(G1)$	$D_{G2}(G2)$	.	.	
$D_{G3}(g)$	$D_{G3}(G1)$	.	.	.	
.	.	.	.	.	

Oproti Tabulce 1 jsou v Tabulce 2 vypsané (po smyšlený případ) pravdivostní hodnoty D(x,y). Hodnota 1 v daném místě tabulky znamená, že je pravda, že x je důkazem y, hodnota 0, že x není důkazem y. Jak už bylo řečeno, v jazyce aritmetiky Gödelova systému je možné relaci D(x,y) pro konkrétní x a y ověřit počítáním. Dále jsou v Tabulce 2 zvýrazněny prvky v diagonále matice D a jsou přepsány do nejbližšího volného řádku, který pak vyjadřuje další z funkcí $D_{Gi}(g)$, nazvěme ji $D_{Gd}(g)$ s Gödelovým číslem Gd. Vyjadřuje sebevztažnou relaci „g dokazuje g“, neboli „formule g je svým vlastním důkazem“, tedy i vlastnost „být vlastním důkazem“. Příkladem takové formule může být formule vyjadřující axiom. Důkaz začne posloupností znaků pro axiom a tím také končí, protože jsme došli k formuli, kterou jsme chtěli dokázat.

Tabulka 2

g/Gi $D_{Gi}(g)$									
	0	0	1	0	0	1	0	.	.
	1	1	1	0	0	0	0	.	.
	0	1	0	1	1	0	0	.	.

	0	0	0	0	0	0	0	.	.
	1	0	0	0	0	1	0	.	.
	0	1	0	0	0	0	1	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$D_{Gd}(g)$	0	1	0	0	0	0	0	1?	
	.	.	.	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Po přepsání diagonály do řádku $D_{Gd}(g)$ chybí na tomto řádku diagonální prvek $D_{Gd}(Gd)$ (v Tabulce 2 je již doplněn a zvýrazněn otazníkem). Vyjadřuje, že formule je svým vlastním důkazem; jenže teď je tou formulí, o kterou se jedná, formule „ být vlastním důkazem“: „formule ‚je vlastním důkazem‘ je vlastním důkazem formule ‚je vlastním důkazem‘“. Formule je vnořena do sebe, je vztažena sama k sobě a tím sama sebe potvrzuje. Tou novou vlastností, kterou vyjadřuje a potvrzuje, je dokazatelnost, tedy to, že důkaz nějaké formule existuje, a to v naší notaci zapíšeme jako ∃x D(x,Gd). Hodnota 1 (v Tabulce 2 s otazníkem) není smyšlená, musí taková být vždycky, protože vyjadřuje, že se v diagonále objeví alespoň nějaká dokazatelná formule, že se prostě v Tabulce 2 vedle nul objeví i jedničky. Vyjadřuje tudíž, že systém může být vůbec použit k dokazování, kvůli kterému byl konstruován. Proto jej matematikové nazývají „pevný bod“ (např. Smullyan 1994).

K nalezení nerozhodnutelné (nedokazatelné ani nevyvratitelné) věty zbývá už jen krůček. Od diagonály pokročíme k antidiagonále, jejíž jednotlivé prvky mají opačné pravdivostní hodnoty než prvky v diagonále. Antidiagonální funkce $D_{Ga}(g)$, která má Gödelovo číslo Ga, má jistě také diagonální prvek, který označíme $D_{Ga}(Ga)$, což můžeme zapsat také jako ¬∃xD(x,Ga), neboli neexistuje důkaz takové formule, která sama sebe dokazuje. V Gödelově (1931) notaci má jeho nerozhodnutelná věta v jazyce aritmetiky tvar 17 Gen r, kde „17 Gen“ má význam ∀x, v našem zápise ¬∃x a Gödelův relační znak r pro rekurzívní relaci zapisujeme v naší notaci jako ¬D(x, Ga). Naše notace je poplatná Kleeneho (1988), v níž je nerozhodnutelná věta označena výrazem ∀x¬A(***p*****,** x).)

Tabulka 3

g/Gi $D_{Gi}(g)$								Gd	Ga	
	0	0	1	0	0	1	.	0	1	.
	1	1	1	0	0	0	.	1	0	.
	0	1	0	1	1	0	.	0	1	.
	0	0	0	0	0	0	.	0	1	.
	1	0	0	0	0	1	.	0	1	.
	0	1	0	0	0	0	.	0	1	.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$D_{Gd}(g)$	0	1	0	0	0	0	.	1	0	.
$D_{Ga}(g)$	1	0	1	1	1	1	.	0	**?**	.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Už jen z Tabulky 3 je vidět, proč nemá formule $D_{Gd}(Gd)$ jednu pravdivostní hodnotu. Leží totiž současně v antidiagonále i diagonále a protože pravdivostní hodnoty v antidiagonále jsou opakem hodnot v diagonále, měla by mít hodnotu 1 (protože leží v diagonále) a současně by měla mít hodnotu 0 (protože leží v antidiagonále). Není ale možné, aby nějaká formule měla současně hodnotu 1 a 0, protože to by byla současně pravdivá i nepravdivá. Pro systém by to znamenalo, že je v něm spor. Ale takový systém by byl

Odstraněno: , a

neužitečný, protože by pak dokazoval (podle tautologie (p∧¬p)→q) jakoukoli větu. Přesný

Gödelův důkaz skutečně probíhá za předpokladu bezespornosti systému[2] a odehraje se ve dvou krocích.

V prvním kroku se ukáže, že za předpokladu dokazatelnosti $D_{Ga}(Ga)$ by existoval důkaz s Gödelovým číslem formule x, takže by byla dokazatelná relace D(Gx,Ga). Tedy existoval by její důkaz pro nějaké x a tedy by platilo $\exists x\, D(x,Ga)$, pak ovšem (podle de Morganovy tautologie) také $\neg\forall x \neg D(x,Ga)$ a to znamená, že by bylo dokazatelné $\neg D_{Ga}(Ga)$, tedy opak původního předpokladu. To by způsobilo spor v systému; za předpokladu, že systém je bezesporný, věta nemá důkaz.

V druhém kroku se opačným postupem ukáže, že za předpokladu dokazatelnosti negace té věty $\neg D_{Ga}(Ga)$ (vyvratitelnosti $D_{Ga}(Ga)$) by bylo dokazatelné i $D_{Ga}(Ga)$. To by opět způsobilo, že by systém byl sporný. Za předpokladu, že je bezesporný, negace věty nemá důkaz (věta se nedá vyvrátit).

Odstraněno: ,

Nedá-li se dokázat důkazním aparátem Gödelova systému logiky s aritmetikou, že nemá důkaz ani věta ani její negace, nedá se ani rozhodnout o její pravdivosti. Proto se větě říká nerozhodnutelná nebo také nezávislá,[3] protože rozhodnutí o její pravdivosti je na důkazním aparátu formálního systému nezávislé. Věta $D_{Ga}(Ga)$ ani její negace proto do systému nepatří. Přesto je pravdivá, protože je nedokazatelná, což je právě to, co sama o sobě tvrdí. Systém tedy nedokazuje všechny pravdy, které se v něm dají vyjádřit a proto je neúplný. Odtud název věta o neúplnosti.

6

Tabulka 3 vybízí ke srovnání Gödelova důkazu 1. věty o neúplnosti s Cantorovým diagonálním argumentem. Cantor v (1890) studoval souhrn M prvků tvaru

$E = (x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots.)$

kde E v místech souřadnic x_i nabývá hodnotu m nebo w; konkrétní m a w mohou být 0 a 1. E si pak můžeme představit jako relaci (funkci) o jedné proměnné nad oborem přirozených čísel, která v místě souřadnic $x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots$ nabývá hodnot 0 nebo 1. Utvořením souhrnu M získáme Tabulku 4 podobnou Tabulce 3.

Tabulka 4

N / E_i	1	2	3	4	5	6	…	
$E_1(i)$	0	0	1	0	0	1	.	.
$E_2(i)$	1	1	1	0	0	0	.	.
$E_3(i)$	0	1	0	1	1	0	.	.
.	0	0	0	0	0	0	.	.
.	1	0	0	0	0	1	.	.
.	0	1	0	0	0	0	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	
$E_{i,i}$	0	1	0	0	0	0	.	.
anti$E_{i,i}$	1	0	1	1	1	1	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.

Jednotlivé řádky v Tabulce 4 můžeme považovat za čísla zapsaná v binární soustavě (binární čísla jsou dvouprvkové variace s opakováním). Pokud je argumentů ve funkcích E spočetně nekonečně mnoho, a tedy tolik, kolik přirozených čísel, a pokud funkcí zapíšeme tolik, kolik mají argumentů, a tedy opět tolik, kolik je přirozených čísel, bude matice čtvercová a Cantorovým diagonálním postupem vyjde najevo, že vedle souhrnů spočetně nekonečně

[2] Gödel použil v druhé části silnější předpoklad ω-bezespornosti. Rosser (1936) ukázal, že stačí jen málo pozměnit relaci „x je důkazem y“ a to na „x je důkazem y a současně neexistuje takové z, aby pro z ≤ x platilo, že z je důkazem Neg(y), kde Neg je symbol pro ¬ v jazyce aritmetiky, aby všechny ostatní formule důkazní kroky v Gödelově článku (1931) zůstaly nezměněny a místo ω-bezespornosti se předpokládala na příslušném místě bezespornost.

[3] Triviálně nezávislých s ohledem na formální aparát Gödelova systému a proto také nerozhodnutelných vět je jistě nekonečně mnoho.

mnoha čísel existují i souhrny s nekonečným počtem čísel větším než spočetným. Důvodem je, a to je jádro Cantorova diagonálního argumentu, že antidiagonální řádek v souhrnu spočetně nekonečně mnoha čísel vždy ještě obsažen není, protože se od každého předchozího řádku liší v hodnotě jeho diagonálního prvku.

Gödelovu i Cantorovu postupu je společná konstrukce celku ze spočetně nekonečně mnoha objektů. Pokud posloupnosti pravdivostních hodnot Gödelových funkcí $D_{Gi}(g)$ udávajících vztah mezi větou a jejími možnými důkazy interpretujeme jako binární číslo, pak je zřejmě Gödelův systém formulí neúplný v tomtéž smyslu jako množina N spočetně nekonečně mnoha přirozených čísel.

Porovnáním Tabulek 3 a 4 je patrné, že se Gödelovi podařilo přidat k původní verzi diagonálního argumentu něco navíc, co dovoluje „vymezit hranici“ spočetně nekonečného souhrnu objektů.

7

Co znamená *otazník* v místě Tabulky 3, kde se nachází nerozhodnutelná věta? Znamená, že rekurzívní postup, pověříme-li jej provedením důkazu, dospěje současně k potvrzení i k vyvrácení, a tedy k pravdě i k nepravdě uvažované formule - což je právě důvod, proč rekurzi v tomto případě nemůžeme považovat za důkaz. Zatímco ostatní hodnoty v tabulce znamenají současně dokazatelnost a pravdivost, v místě nerozhodnutelné formule je třeba zaznamenat 1, pokud chceme zaznamenat pravdu (je pravdivá) a 0, pokud chceme zaznamenat dokazatelnost (je nedokazatelná). Jednou hodnotou obojí zaznamenat nelze.

Od obyčejných důkazů sporem se diagonální postup liší tím, že dobře definuje všechny prvky uvažovaného celku, kterých je spočetně nekonečně mnoho. Pak vybere diagonální prvky a utvoří antidiagonálu. Prvek, který je současně v diagonále a antidiagonále (v Tabulce 3 označený otazníkem), leží na hranici, která celku nenáleží.

G.W.F. Hegel říká v *Malé logice* „Zkoumáme-li nyní blíže, co to vlastně v hranici máme, zjišťujeme, že v sobě obsahuje rozpor, a projevuje se tedy jako dialektická. Hranice totiž na jedné straně zakládá realitu jsoucna, na druhé straně je jeho negací. Dále však není hranice jakožto negace něčeho nějaké abstraktní nic vůbec, nýbrž je to jsoucí nic neboli to, co nazýváme „jiným“ ... Ptáme-li se pak na rozdíl mezi něčím a jiným, ukazuje se, že obojí je jedno a totéž. Tato identita se latinsky označuje také jako *aliud-aliud*...“ (Hegel 1992, 178).

Kurt Gödel nepřipustil, aby dokazování v jeho systému skončilo v paradoxu. Jakožto průsečík diagonály a antidiagonály je nerozhodnutelná věta bodem přechodu mezi Gödelovým uspořádaným systémem formulí a „okolním světem“. Jakmile rozpoznáme hranici, pak je přirozené ptát se, co je za ní: například je tam místo, odkud vidíme systém zvenčí jako jeden celek.

8

Paradoxy jsou jevy na hranici celků, které nás zneklidňují svojí rozporností, když celek dobře neodlišíme od okolí. Paradoxy jsou doménou dialektiky, předchůdkyní logiky, která ještě spor neměla za něco nepřípustného a nevylučovala jej jako předmět zkoumání. Považovala spory za přirozený mezikrok, kterým se člověk přibližuje pravdě o sobě a o světě. Dialektično má v přirozeném jazyce celou škálu projevů: od výskytu slov s opačnými významy, přes metaforický modus řeči až k ironii. Vzpomeňme ironika Sókrata a jeho paradox nevědění: „vím, že nic nevím“.

Sókratés, jak nám jej vylíčil Platón, si povšimnul, že čím víc člověk ví, tím víc si uvědomuje, kolik toho ještě neví a vědět nemůže. Sókratovo „vím, že nic nevím“ neznamená, že by věděl méně než ostatní. To ostatně potvrdila Pythia v Delfách, když na Chairefóntův dotaz odpověděla, že Sókratés je nejmoudřejší ze všech lidí. Ale co tím myslí, ptal se Sókratés, když se to k němu doneslo: „Vždyť já nejsem ani dost málo moudrý. Co tedy asi míní, když praví, že já jsem nejmoudřejší?“ A tu jsem si uvědomil, že „na rozdíl od ostatních, kteří se domnívají, že ví, jedině já ani nevím, ani se nedomnívám, že vím". (Platón, *Obrana Sókrata* 21 a-d)

Poznatků je nekonečně mnoho a člověk by je nikdy neobsáhl, kdyby je probíral jeden po druhém. To, co může Sókratés a kdokoli z nás vědět, je nicotné vzhledem ke všem možným minulým i budoucím vědomostem. Když Sókratés připustil, že nějaký takový celkový soubor poznatků existuje, přestože jej on ani nikdo jiný obsáhnout nemůže, poznal tím něco nového, co si před tím neuvědomoval.

Sókratovo nevědění, neboli vědění o nevědění je poznatek nad všemi jednotlivými. Působí jako paradox, pokud Sókratovo prohlášení „vím, že nic nevím", pokládáme za spor dvou rovnocenných prohlášení „vím" a „nevím". Pokud ale nechceme upadnout do paradoxu, pak Sókratovo „nevědění" jednotlivých poznatků a „vědění o nevědění" nemůžeme považovat za rovnocenné. „Vědění o nevědění" je tvrzení o celku vyslovené při pohledu zvenčí na ten celek a pravdivé ne proto, že by mohlo být potvrzeno podobným způsobem jako jednotlivé poznatky. Sókratovo „vědění o nevědění" je v tomto smyslu podobné Gödelově nerozhodnutelné větě.

Pokud to připustíme, nevyhneme se otázce: je pro taková tvrzení v logice místo, když víme, že do logických systémů Gödelova druhu nepatří? To můžeme, ale protože k jejich vyjádření kvantifikujeme přes proměnné predikáty (věty), a ne pouze přes proměnné individuí, musíme použít prostředky logiky 2. řádu, která to na rozdíl od logiky 1. řádu připouští. V r. 1931, kdy Gödel psal svoji práci, se teprve tvořil názor na to, co dnes rozumíme logikou 1. a vyšších řádů, a Gödelův článek (1931) k tomu podstatně přispěl.

9

Podobné argumenty, jako je ten o Sókratově nevědění, se tradují v dějinách filosofie jako *reductio ad absurdum* nebo *regressus ad infinitum*. Pro připomenutí tu některé uvedeme.

1) Argument Thaletova žáka Anaximandra o tvaru Země.

Povídá se, že Thalés Milétský připadl na myšlenku, že zemětřesení jsou způsobena bouřením světového oceánu, na kterém Země plave jako deska na vodě. Jeho žák Anaximander pochyboval, že by vysvětlením pozorované stability Země byla voda, a chtěl vědět, čím je podepřena. I voda v oceánu by potřeboval oporu, aby někam „neodtekla" a tato její opora by potřebovala další oporu, a ta zase další... Jaké je to však vysvětlení, které vždycky znovu vyvolává potřebu dalšího vysvětlení? Přitom kdyby chyběla byť jen jediná vzdálená opora, způsobilo by to „zřícení celé stavby". Proto Anaximander odmítl systém opor a obrátil se k vnitřní symetrii zemského tělesa. Uplatnil princip, který říká, že tam, kde nejsou rozdíly, neodehrává se žádná změna. Nejmenší rozdíly má nejsymetričtější tvar a tím je koule. (Podle Popper 1972, s. 139-140)

2) Pět argumentů Tomáše Akvinského.

Tomáš Akvinský (1225-1275) uvádí hned na začátku *Theologické summy* (1a 2,3) pět cest (*quinquae viae*), které mají lidem usnadnit nahlédnutí, že Bůh existuje. Nejedná se o (tauto)logicky platné argumenty. Pět cest nebylo určeno k tomu, aby s logickou nutností obracelo na víru v Boha ty, kteří v něj nevěří, ale aby teologům usnadnilo rozumové pochopení Boha, kterého i tak uctívali. Nejsou to důkazy v exaktním slova smyslu: rozum, který se dostane do nesnáze, protože nemůže projít nekonečný počet kroků jeden po druhém, přijme nový subjekt myšlení na základě odmítnutí této své neúspěšné anabáze a hypoteticky aktualizuje, co bylo doposud jen možné. Toto „nazření" Boha a následné přiznání jeho existence je odůvodněno pouze a jedině odmítnutím, které musí rozum učinit, aby jeho úvaha nepostupovala do nekonečna. (Podrobněji Velecký 1994, Passmore 1969, Švandová 2005)

3) Descartovo *Cogito ergo sum*.

René Descartes jednou napsal: „Když pečlivě zvažuji, nenajdu jediný spolehlivý rys, který jednoznačně odděluje bdělost od snu. Jak si člověk může být jist, že celý jeho život není sen?" Tak dochází Descartes k tomu, že pochybuje absolutně o všem. Pro mnoho filosofů před ním skončilo filosofické uvažování právě v tomto bodě. Descartes se ale pokusil pokračovat dál právě od tohoto nulového bodu. Došel k tomu, že pochybuje o všem a že je to to jediné, čím si může být jist. Tu ho napadlo, že jedním si přece jen může být jist a to tím, že pochybuje. A když pochybuje, znamená to, že myslí, a když myslí, znamená to, že je myslící bytost. Neboli *Cogito, ergo sum*. (Cit. podle Gaarden 1995, 238.)

4) Metargument Jana Łukasiewicze ve prospěch názoru, že člověk má možnost svobodné volby

Na osmém mezinárodním filosofickém kongresu v Praze (materiály k tomuto kongresu vyšly v nakl. Orbis v Praze v r. 1936) vystoupil Jan Lukasiwicz, jeden z nejvýznamnějších logiků 20. století s kritikou logicko pozitivistického pojetí vědy: věda není mechanický stroj a neobejde se bez svobodného kritického myšlení; pro svobodu myšlení se rozhodujeme, nevede k ní žádná „vědecká" nutnost. Stručná verze Łukasiewiczovy argumentace: uznání pravdy závěru axiomatizovaného argumentu se opírá o předem uznanou pravdu premis (axiomů), která se nedokazuje, ale přijímá. Je nutné ji přijmout? Přijímáme-li ji v případě každého jednotlivého argumentu, s nímž se v praxi setkáme, můžeme si to vykládat jednak tak, že jsme museli závěr přijmout nutně (premisy-axiomy je nutné přijmout stejně jako z nich apodikticky nutně plynoucí závěr), ale současně i tak, že jsme to udělali svobodně (premisy-axiomy přijmout můžeme, ale také nemusíme). Pokud se **vždycky** přikloníme k první alternativě, nutnosti, pak si odepřeme možnost vůbec někdy svobodně volit, svoboda se stane iluzí, všechno včetně nás bude determinované. Ale rozhodneme-li v této vyšší rovině pro svobodu, má to skutečně osvobozující účinek. Mohu pak svobodně přijmout pravdivost závěrů jednotlivých argumentů, přičemž toto rozhodnutí mohu odůvodnit jejich dokazatelností z axiomů-premis. V tomto pojetí lidská svoboda není otázkou jednoho každého rozhodnutí v řadě, ale možnosti udělat kterékoli z nich - ale tak jí fakticky rozumíme. Łukasiewiczův argument ve prospěch lidské svobody je metaargument v tom smyslu, že jde nad hranice axiomatického systému, pomocí kterého se ji pokusíme logicky konstruovat.
(volně podle J. Fiala, 2000, 332-333)

Naformátováno

Podobnou strukturu nemusí mít jen argumenty, které používají filosofové. Následující argument „indukce vyšší úrovně" tak nazvali autoři knihy o logice a soudobé rétorice s podtitulem „Používání rozumu v běžném životě":
Indukce vyšší úrovně.

Opakuje-li se určitý jev mnohokrát, je důvodné očekávat, že se bude týmž způsobem opakovat nadále. Například z toho, že doposud každé ráno vyšlo Slunce, soudíme, že vyjde i zítra. Analogicky by mělo platit, že jestliže autobus bez vážných závad projel turistickou trasu stokrát, projede ji bez vážných závad i po sto prvé. Jenže autobus se opotřebovává, takže najede-li během sta jízd například sto tisíc kilometrů, měli bychom naopak očekávat, že bude vážné závady mít. Usuzujeme opět induktivně pomocí příkladů, ale tentokrát vyšší úrovně (Kahane, Cavender 1998, 15).

10

Zastavme se nyní jen krátce nad tím, co kdysi mysleli Platón účastí (*metechein*) jednotlivin v ideji a Aristotelés přiváděním (*epagogé*, lat. *inductio*) k obecným pojmům. Když na počátku stejnojmenného dialogu zasvěcuje Parmenidés mladého Sókrata do tajů své nauky, vykládá mezi jiným, jak by se dala představit účast jednotlivin v ideji velikosti: „Myslím, že pokládáš každou ideu (*eidos*) za jednu, uvažuješ-li takto: Když se ti ukáže množství určitých věcí velkými (*poll´atta megala eivai*), zdá se ti, že tu jest jedno a totéž nazření (*mía tis ísos idéa he aute*) přes všechny spatřené (*epi panta idonti*), takže budeš mínit, že jedna velikost zavládla (*hen to mega hegei einai*)" (*Parmenidés* 132a 1-4). V klíčové části dialogu *Faidros* říká Sókratés něco podobného „Člověk totiž musí poznávati podle tak řečeného eidos, pojmového druhu, jenž vychází z mnoha vjemů (*ek pollon ion aistheseon*) a je rozumovým myšlením sbírán v jednotu (*eis hen logismoi sunairúmenon*)" (Platón, *Faidros* 249b6-c1). Podle těchto a podobných pasáží, kterých sice v Platónových dialozích není mnoho, ale zdají se být klíčové, se lze domnívat, že myšlenka sbírání do celků a jejich nazírání z místa mimo tento celek nebyla Platónovi cizí a že ji považoval za něco, co patří k lidské přirozenosti.

Aristotelés v mnoha ohledech kritizoval Platónovy vize, ale když píše (*Metafyzika* 281 i na jiných místech svých spisů), jak se vjemy v paměti shrnou ve zkušenost, zdá se, že právě tuhle Platónovu myšlenku vtělil do svého učení. A toto shrnování se opakuje na vyšších úrovních, aby tak vznikaly obecnější a ještě obecnější pojmy. Jak to vlastně děláme, když zobecňujeme?

V pasáži na počátku dialogu *Filébos*, kterou můžeme pokládat za jeden z kanonických textů zakládajících metafyzickou nauku o celcích a částech, Platón tento pro člověka přirozený a takřka neuvědomovaný postup od částí (*méroi*) k celku (*holon*) rozkládá na etapy. Jeho bezprostřední záměr je praktický, chce mladým lidem vysvětlit rozdíl mezi dialektikou a eristikou. Příkladem je mu Theuth, vládce řeči.

Na počátku je neohraničený (*apeiros*) proud hlasu (*foné*). Ze spojitého proudu předcházejícího řeči se postupně vydělují hlásky (*afona*, *aftonga*) a další jednotlivé složky tak dlouho, až se ukáže celá galerie prvků řeči určitého počtu. Pak teprve se uzavře celý proces závěrečným sjednocením do celku umění gramatického (*gramatiké techné*, *foneenta*, *stocheia*). Z původního neomezena (*apeiron*) se vydělí množství a počet (*pléthos kai arithmos*), které posléze prostřednictvím jejich uspořádání uchopíme naráz jako nové jedno (*hen*). Správně postupuje dialektik, který na rozdíl od eristika nespěchá, ale nejprve důkladně prozkoumá všechny části co do množství i počtu, a to velmi důkladně a obezřetně, než nakonec obhlédne celek. Tak jako je třeba důkladně pozorovat, abychom dobře viděli, je třeba co nejlépe prozkoumat všechny části, ze kterých má být sestaven nový celek, abychom se o něm dověděli pravdu.

Neúplnost teorie, o které mluví Gődelova první věta o neúplnosti, z jistého obecnějšího pohledu znamená principiální neúplnost jazyka vyjádřit veškerou (absolutní) pravdu. Na druhé straně nás nutí k zamyšlení nad otázkou, co je to vůbec pravda. Mohli bychom si vážit pravdy, kdybychom uznávali jen jednotlivé pravdivé poznatky?

Pokud nezkoumáme vyváženě, dostaneme se na pozici starověkých rétorů: buď budeme vidět jen detaily, nebo je naopak úplně přeskočíme. V prvním případě se nám pravda bude jevit jako jednotlivé poznatky, závislé na okolnostech a subjektivním vnímání, až budeme popírat samu její existenci a prohlašovat ji za relativní. V druhém případě budeme uznávat jen jednu pravdu, která je naprosto jistá, absolutní.

Ale ti, kteří zkoumají bedlivě, budou rozlišovat druhy pravdy podle způsobu potvrzení (pozorováním, důkazem) a teprve až všechno pečlivě uváží, budou ji ve vyšší rovině považovat za hodnotu, pravdu nad dílčími pravdami, kterou člověk uznává vázán etickými ohledy.

Odstraněno: ji

Dílo Kurta Gődela hrálo v debatě mezi filosofy a rétory nezanedbatelnou roli. Argumenty pro své závěry u něj hledali myslitelé na obou stranách. Například Karl Popper se domníval, že věty o neúplnosti nahrávají rétorům, že svědčí ve prospěch relativity pravdy. Willard van Orman Quine napsal, že je možné, že lidé v budoucnosti změní svoje jazykové návyky a vědomě začnou rozlišovat úrovně mluvení o pravdě, aby zabránili rozporu a nedostali se do paradoxu (Quine, 1976). A zase byli a jsou tací, kteří se dovolávají Alfreda Tarskiho v odmítání možnosti logické analýzy jazykových struktur přirozeného jazyka, protože se každá taková analýza týká jen formálních jazyků, nebo že Gődelovy věty o neúplnosti neříkají nic zajímavého o přirozeném jazyce. A najdou se i tací na pomezí logiky a filosofie, např. Bas C. van Fraassen, kteří se zabývají pravdou, paradoxy a přesahy, které se projevují v našem myšlení a argumentech, i tací, kteří se pokoušejí aplikovat moderní logiku na subtilní myšlenkové pochody lidské mysli.

Před Gődelem se zdálo, že věda může být jeden velký, krok za krokem utvořený stroj na nalézání odpovědi na každou otázku. Jenže nemůže existovat metoda, která by se dala použít na všechny problémy jednou provždy. Řešit problémy vyžaduje nekonečný přísun nových myšlenek.

Kurt Gődel se dotknul způsobem charakteristickým pro 20. stol. – tím nejexaktnějším – otázek, které si lidstvo kladlo od dob vzniku západní vzdělanosti ve starém Řecku. Otázek o povaze našeho vědění o světě a našeho místa v něm.