Úvodní technické poznámky pro přednášku Kosmologie

Jarní semestr 2007

Michal Lenc

1. Konvence, STR

Uvažujeme Minkovskiho prostoročas s metrickým tensorem

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \tag{1.1}$$

takže interval zapisujeme pomocí kontravariantního čtyřvektoru

$$x^\mu \equiv \left(x^0 = ct , x^1 = x , x^2 = y , x^3 = z \right) \tag{1.2}$$

jako

$$s^2 = \eta_{\mu\nu} \, x^\mu \, x^\nu = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 \, t^2 \quad . \tag{1.3}$$

Sumační konvenci užíváme tak, že opakuje-li se v součinu index jednou nahoře a jednou dole, sčítá se pro řecké indexy od 0 do 3, pro latinské od 1 do 3. Obecně skalární součin dvou čtyřvektorů x^μ , y^μ pak je zapsán jako

$$\left(x , y \right) \equiv \eta_{\mu\nu} \, x^\mu \, x^\nu \quad . \tag{1.4}$$

Operaci snižování indexů vidíme na příkladu

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} \, x^\nu \equiv \left(x_0 = -ct , x^1 = x , x^2 = y , x^3 = z \right) \quad . \tag{1.5}$$

Protože $\det\left(\eta_{\alpha\beta}\right) \neq 0$, můžeme pomocí rovnic

$$\eta_{\alpha\beta} \, \eta^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma \tag{1.6}$$

definovat tensor

$$\eta^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

a operaci zvyšování indexů, opět na příkladu

$$x^\mu = \eta^{\mu\nu} \, x_\nu = \eta^{\mu\nu} \, \eta_{\nu\rho} \, x^\rho = \delta_\rho^\mu \, x^\rho = x^\mu \quad . \tag{1.8}$$

Infinitesimální interval souvisí s intervalem vlastního času vztahem

$$-ds^2 = d\tau^2 = -\eta_{\mu\nu} \, dx^\mu \, dx^\nu \quad , \tag{1.9}$$

pro konečný interval na trajektorii $x^\mu \left(\lambda \right)$ je

$$\tau_{ba} = \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}\, d\lambda \quad . \tag{1.10}$$

Pokud zvolíme za parametr vlastní čas, definujeme čtyřvektor rychlosti

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad , \quad \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = u^\mu u_\mu = -1 \quad , \tag{1.11}$$

což plyne ze vztahu (1.9). Při parametrizaci souřadnicovým časem $x^0 = t$ a značení $\vec{x} = \left(x^1, x^2, x^3\right)$ máme podle (1.10) známý vztah pro „dilataci času“

$$\tau_{ba} = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{1-\vec{v}^2}\, dt \quad , \quad \vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} \quad . \tag{1.12}$$

Pro částice o hmotnosti *m* je čtyřvektor hybnosti

$$p^\mu = m u^\mu = \left(\frac{m}{\sqrt{1-\vec{v}^2}}, \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\vec{v}^2}} \right) = \left(E, \vec{p}\right) \quad , \quad p^\mu p_\mu = -m^2 \quad . \tag{1.13}$$

Pro částice s nulovou hmotností je pak čtyřvektor hybnosti

$$k^\mu = \left(k, \vec{k}\right) = \left(\omega, \vec{k}\right) \quad , \quad k^\mu k_\mu = 0 \quad . \tag{1.14}$$

2. Kalibrační pole

Mějme lagrangián

$$L\left(\varphi, \partial_\mu \varphi\right) \tag{2.1}$$

invariantní vzhledem k jednoparametrické grupě transformací

$$\varphi \quad \to \quad \exp\{i\omega Q\}\varphi \quad . \tag{2.2}$$

Značení parciálních derivací bývá zkracováno jako

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} = \partial_\mu \varphi = \varphi_{,\mu} \quad . \tag{2.3}$$

Zde ω je zmiňovaný parametr, Q hermiteovská matice. V infinitesimálním tvaru

$$\varphi \quad \to \quad \varphi + \delta\varphi \quad , \quad \delta\varphi = i\,\delta\omega Q \varphi \quad . \tag{2.4}$$

Pokud ale bude $\delta\omega$ záviset na prostoročasových souřadnicích, přestane být lagrangián invariantní, neboť

$$\delta\left(\partial_\mu \varphi\right) = i\,\delta\omega Q \partial_\mu \varphi + i\,\partial_\mu\left(\delta\omega\right) Q \varphi \quad . \tag{2.5}$$

Zavedeme proto další pole A_μ, budeme jej nazývat kalibrační (gauge), které se transformuje jako

$$A_\mu \quad \to \quad A_\mu + \delta A_\mu \quad , \quad \delta A_\mu = -\frac{1}{e}\partial_\mu(\delta\omega) \quad . \tag{2.6}$$

Zavedeme kovariantní derivaci

$$D_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi + i\, e\, A_\mu\, Q\varphi \quad , \tag{2.7}$$

kde e je konstanta. Pro kovariantní derivaci platí

$$\delta\left(D_\mu \varphi\right) = i\,\delta\omega Q\, D_\mu \varphi \quad . \tag{2.8}$$

Lagrangeova funkce

$$L\left(\varphi, D_\mu \varphi\right) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad , \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{2.9}$$

je invariantní. Podobnost elektromagnetického a gravitačního pole jako polí kalibračních uvidíme v následujícím srovnání (některé veličiny popisující gravitační pole jsou definovány v odstavci o OTR) :

Potenciál A_μ	Christoffelovy symboly $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$
Lorentzova transformace se zachováním kalibrace	Transformace souřadnic
$A^/_\mu = \Lambda^\nu_\mu A_\nu - \partial_\mu f$	$\Gamma^{/\nu}_{\mu\lambda} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{/\mu}} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{/\lambda}} \frac{\partial x^{/\nu}}{\partial x^\tau} \Gamma^\tau_{\rho\sigma} + \frac{\partial x^{/\nu}}{\partial x^\sigma} \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x^{/\mu} \partial x^{/\lambda}}$
Kovariantní derivace (např. X_ν)	Kovariantní derivace (např. X_ν)
$\partial_\mu X_\nu \to D_\mu X_\nu = \partial_\mu X_\nu + i\, e\, A_\mu X_\nu$	$\partial_\mu X_\nu \to D_\mu X_\nu = \frac{\partial X_\nu}{\partial x^\mu} - \Gamma^\rho_{\nu\mu} X_\rho$
Maxwellův tensor	Riemannův tensor
$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$	$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\beta\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\beta\mu} + \Gamma^\alpha_{\rho\mu} \Gamma^\rho_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\rho\nu} \Gamma^\rho_{\beta\mu}$
První pár Maxwellových rovnic	Bianchiho identita
$F_{[\mu\nu,\rho]} = 0$	$R^\alpha_{\beta[\mu\nu;\rho]} = 0$
Bohmův – Aharonův jev	Paralelní přenos vektoru
$\Delta\Phi = \oint A_\mu\, dx^\mu \approx \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \Delta S^{\mu\nu}$	$\Delta X_\alpha = \oint \Gamma^\rho_{\alpha\mu} X_\rho\, dx^\mu \approx \frac{1}{2} R^\rho_{\alpha\mu\nu} X_\rho \Delta S^{\mu\nu}$

3. Tensory

Používáme klasickou terminologii, tj. při transformaci souřadnic

$$x^{\mu} \quad \to \quad x^{\prime\mu} \tag{3.1}$$

se kontravariantní tensor (např. druhého řádu) transformuje jako

$$T^{\mu\nu} \quad \to \quad T^{\prime\mu\nu} = \frac{\partial x^{\prime\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\prime\nu}}{\partial x^{\sigma}} T^{\rho\sigma} \quad , \tag{3.2}$$

zatímco kovariantní tensor se transformuje jako

$$T_{\mu\nu} \quad \to \quad T^{\prime}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x^{\prime\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\prime\nu}} T_{\rho\sigma} \quad . \tag{3.3}$$

Symetrická a antisymetrická část tensoru se při transformaci nemíchá, takže je účelné zavést značení (opět na příkladu druhého řádu)

$$T_{\{\mu\nu\}} = \frac{1}{2!}\left(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}\right) \quad , \quad T_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2!}\left(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}\right) \quad . \tag{3.4}$$

Skalární veličina se při transformaci souřadnic transformuje triviálním způsobem

$$\phi \quad \to \quad \phi^{\prime} \quad , \quad d\phi \quad \to \quad d\phi^{\prime} \quad , \tag{3.5}$$

její parciální derivace pak jako

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}} \quad \to \quad \frac{\partial \phi^{\prime}}{\partial x^{\prime\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\prime\mu}} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\nu}} \quad , \tag{3.6}$$

tedy jako kovariantní vektor

$$A_{\mu} \quad \to \quad A^{\prime}_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\prime\mu}} A_{\nu} \quad . \tag{3.7}$$

Pro jeho diferenciál však máme

$$\begin{aligned} d\,A_{\mu} \quad \to \quad d\,A^{\prime}_{\mu} = d\left(\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\prime\mu}} A_{\nu}\right) = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\prime\mu}} d\,A_{\nu} + A_{\nu}\, d\left(\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\prime\mu}}\right) = \\ \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\prime\mu}} d\,A_{\nu} + A_{\nu} \frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial x^{\prime\mu} \partial x^{\prime\lambda}} d\,x^{\prime\lambda} \quad . \end{aligned} \tag{3.8}$$

Tedy nikoliv transformaci tensorové veličiny. Zavedeme diferenciál, který se jako tensorová veličina chovat bude, tedy

$$D A_{\mu} \equiv d\,A_{\mu} - \delta A_{\mu} \quad . \tag{3.9}$$

Z předchozího vztahu vidíme, že musí být

$$\delta A_{\mu} = \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} A_{\nu}\, d\,x^{\lambda} \quad , \tag{3.10}$$

tedy

$$DA_\mu = \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\lambda} - \Gamma^\nu_{\mu\lambda} A_\nu \right) dx^\lambda \quad . \tag{3.11}$$

Integrací vztahu (3.10) po uzavřené křivce dostáváme výraz pro rozdíl původního a paralelně přeneseného vektoru

$$\Delta A_\mu = \oint \Gamma^\nu_{\mu\lambda} A_\nu \, dx^\lambda \quad . \tag{3.12}$$

Zkrácený zápis (3.11) je

$$DA_\mu = A_{\mu;\lambda} \, dx^\lambda \quad , \quad A_{\mu;\lambda} = A_{\mu,\lambda} - \Gamma^\nu_{\mu\lambda} A_\nu \quad . \tag{3.13}$$

Požadavek

$$DA_\mu \quad \to \quad DA'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} DA_\nu \tag{3.14}$$

vede k požadavku na transformační vlastnosti Christoffelových symbolů Γ:

$$\Gamma'^\nu_{\mu\lambda} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\tau} \Gamma^\tau_{\rho\sigma} + \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\mu \partial x'^\lambda} \quad . \tag{3.15}$$

Je pak

$$\begin{aligned} &\delta A'_\mu = \Gamma'^\nu_{\mu\lambda} A'_\nu \, dx'^\lambda = \\ &\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\tau} \frac{\partial x^\omega}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\kappa} A_\omega \Gamma^\tau_{\rho\sigma} \, dx^\kappa + \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\mu \partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\omega}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\kappa} A_\omega \, dx^\kappa = \\ &\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} A_\tau \Gamma^\tau_{\rho\sigma} \, dx^\sigma + \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x'^\mu \partial x'^\lambda} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\kappa} A_\nu \, dx^\kappa \end{aligned} \tag{3.16}$$

a

$$dA'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\kappa} dx^\kappa + A_\nu \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x'^\mu \partial x'^\lambda} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\kappa} dx^\kappa \quad . \tag{3.17}$$

A skutečně pak

$$DA'_\mu = dA'_\mu - \delta A'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} DA_\nu \quad . \tag{3.18}$$

Na vztah (3.9) můžeme hledět názorně takto: porovnání dvou vektorů v různých (blízkých) bodech můžeme provést jen tak, že jeden z nich paralelně přeneseme. Máme-li v bodě x^μ vektor A_μ, potom je jeho hodnota v sousedním bodě $x^\mu + dx^\mu$ rovna $A_\mu + dA_\mu$. Při paralelním přenosu vektoru A_μ z x^μ do $x^\mu + dx^\mu$ se tento změní na $A_\mu + \delta A_\mu$. Rozdíl mezi oběma vektory (nachází se oba ve stejném bodě $x^\mu + dx^\mu$) je $DA_\mu = dA_\mu - \delta A_\mu$.

4. Metrický prostor

Pro prostor s metrikou zapisujeme metrický tensor jako

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \quad , \quad g = \det\left(g_{\mu\nu}\right) < 0 \tag{4.1}$$

(signatura stejná jako u Minkowskiho metriky). Požadavek, aby kovariantní derivace metrického tensoru byla rovna nule, tj.

$$D g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu;\lambda}\, dx^{\lambda} = 0 \tag{4.2}$$

vede pak k existenci metrické konexe (Christoffelova symbolu), tj. možnost vyjádřit složky konexe pomocí složek metrického tensoru a jejich derivací

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho}\left(\partial_{\mu} g_{\nu\rho} + \partial_{\nu} g_{\mu\rho} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu}\right) \quad . \tag{4.3}$$

Vzhledem k symetrii v indexech μ, ν máme 40 nezávislých složek Christoffelova symbolu. Při transformaci souřadnic $x^{\mu} \to x^{/\mu}$ je

$$\begin{aligned} & g = \det\left(g_{\mu\nu}\right) \quad \to \quad g^{/} = \det\left(g^{/}_{\mu\nu}\right) = \\ & \det\left(\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x^{/}_{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{/}_{\nu}} g_{\rho\sigma}\right) = \left(\det\left(\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x^{/}_{\mu}}\right)\right)^2 \det\left(g_{\rho\sigma}\right) = \frac{g}{\left(\det\left(\frac{\partial x^{/\mu}}{\partial x_{\rho}}\right)\right)^2} \quad . \end{aligned} \tag{4.4}$$

Invariantní objemový element je tedy

$$\sqrt{-g}\, d^4 x = \sqrt{-g^{/}}\, d^4 x^{/} \quad . \tag{4.5}$$

Křivost prostoročasu je plně popsána Riemannovým tensorem

$$R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} = \partial_{\alpha} \Gamma^{\mu}_{\nu\beta} - \partial_{\beta} \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\rho} \Gamma^{\rho}_{\nu\beta} - \Gamma^{\mu}_{\beta\rho} \Gamma^{\rho}_{\nu\alpha} \quad . \tag{4.6}$$

Jeho vznik můžeme nahlédnout z následující úvahy. Pro paralelní přenos tensoru T^{μ}_{β} máme vztah

$$D_{\alpha} T^{\mu}_{\beta} = \partial_{\alpha} T^{\mu}_{\beta} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\rho} T^{\rho}_{\beta} - \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} T^{\mu}_{\rho} \quad . \tag{4.7}$$

Představme si, že tento tensor vznikl při paralelním přenosu vektoru A^{μ}, tj.

$$T^{\mu}_{\beta} = D_{\beta} A^{\mu} = \partial_{\beta} A^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\beta\sigma} A^{\sigma} \quad . \tag{4.8}$$

Máme pak

$$\begin{aligned} & D_{\alpha} D_{\beta} A^{\mu} = \partial_{\alpha} \partial_{\beta} A^{\mu} + \left(\partial_{\alpha} \Gamma^{\mu}_{\beta\sigma}\right) A^{\sigma} + \Gamma^{\mu}_{\beta\sigma} \partial_{\alpha} A^{\sigma} + \\ & \Gamma^{\mu}_{\alpha\rho} \partial_{\beta} A^{\rho} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\rho} \Gamma^{\rho}_{\beta\sigma} A^{\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} \partial_{\rho} A^{\mu} - \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} A^{\sigma} \quad . \end{aligned} \tag{4.9}$$

Provedeme-li paralelní přenos v opačném pořadí, máme

$$D_\beta D_\alpha A^\mu = \partial_\alpha \partial_\beta A^\mu + \left(\partial_\beta \Gamma^\mu_{\alpha\sigma}\right) A^\sigma + \Gamma^\mu_{\alpha\rho} \partial_\beta A^\rho + \\ \Gamma^\mu_{\beta\sigma} \partial_\alpha A^\sigma + \Gamma^\mu_{\beta\rho} \Gamma^\rho_{\alpha\sigma} A^\sigma - \Gamma^\rho_{\beta\alpha} \partial_\rho A^\mu - \Gamma^\rho_{\beta\alpha} \Gamma^\mu_{\rho\sigma} A^\sigma \quad . \tag{4.10}$$

Rozdíl těchto výrazů je úměrný změně při paralelním přenosu vektoru A^μ po uzavřené křivce (při výpočtu využíváme toho, že Christoffelův symbol je symetrický při záměně dolních indexů)

$$D_\alpha D_\beta A^\mu - D_\beta D_\alpha A^\mu = R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} A^\nu \quad . \tag{4.11}$$

Křivka je tvořena spojením bodů $P \to P_1 \to P_2 \to P_3 \to P$, tedy $P \to P_1 \to P_2 = P_2 \leftarrow P_3 \leftarrow P$. Riemannův tensor má 256 komponent, ale díky symetriím je jen 20 nezávislých. Symetrie se nejlépe vyjeví po snížení horního indexu, tj. pro $R_{\mu\nu\alpha\beta} = g_{\mu\rho} R^\rho{}_{\nu\alpha\beta}$. S využitím (4.3) můžeme psát

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\partial_\nu \partial_\alpha g_{\mu\beta} + \partial_\mu \partial_\beta g_{\nu\alpha} - \partial_\nu \partial_\beta g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha \partial_\mu g_{\nu\beta}\right) + \\ g_{\rho\sigma}\left(\Gamma^\rho_{\nu\alpha} \Gamma^\sigma_{\mu\beta} - \Gamma^\rho_{\nu\beta} \Gamma^\sigma_{\mu\alpha}\right) \quad . \tag{4.12}$$

Tensor je antisymetrický k záměně $\mu \leftrightarrow \nu$ a $\alpha \leftrightarrow \beta$ a symetrický k záměně $\mu\nu \leftrightarrow \alpha\beta$. Dále platí

$$R_{\mu[\nu\alpha\beta]} = 0 \tag{4.13}$$

a především Bianchiho identita

$$D^{[\rho} R^{\mu\nu]}{}_{\alpha\beta} = 0 \quad . \tag{4.14}$$

Ricciho tensor vzniká zúžením Riemannova tensoru

$$R_{\mu\nu} = g^{\rho\sigma} R_{\sigma\mu\rho\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu} \quad . \tag{4.15}$$

Vzhledem ke zmíněné symetrii Riemannova tensoru je Ricciho tensor symetrický k záměně indexů $\mu \leftrightarrow \nu$ a má tedy 10 nezávislých komponent. Posledním možným zúžením vytvoříme Ricciho skalár

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^{\rho\sigma}{}_{\rho\sigma} \quad . \tag{4.16}$$

Rozepíšeme Bianchiho identitu

$$D^\rho R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} + D^\nu R^{\rho\mu}{}_{\alpha\beta} + D^\mu R^{\nu\rho}{}_{\alpha\beta} = 0 \tag{4.17}$$

a provedeme zúžení nejprve v indexech μ a α

$$D^\rho R^\nu{}_\beta - D^\nu R^\rho{}_\beta + D^\mu R^{\nu\rho}{}_{\mu\beta} = 0 \tag{4.18}$$

a potom v indexech ρ a β

$$D^\rho R^\nu{}_\rho - D^\nu R + D^\mu R^\nu{}_\mu = 2 D^\rho R^\nu{}_\rho - D^\nu R = 0 \quad . \tag{4.19}$$

Při úpravách jsme využili vlastností antisymetrie v první, případně druhé dvojici indexů. Konečně zavedeme Einsteinův tensor

$$E_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad , \tag{4.20}$$

pro který podle (4.19) platí

$$D^{\mu} E_{\mu\nu} = 0 \quad . \tag{4.21}$$

Při úpravách jsme využili toho, že kovariantní derivace metrického tensoru je rovna nule.

5. OTR

Einsteinův tensor $E_{\mu\nu}$ je spojen s geometrickou strukturou prostoročasu. Je to symetrický tensor druhého řádu, jehož kovariantní derivace je rovna nule. Rozložení hmoty je obecně popsáno symetrickým tensorem druhého řádu (tensorem energie – impulsu $T_{\mu\nu}$) s nulovou kovariantní derivací, tj. zobecněnou rovnicí kontinuity. Pro ideální kapalinu je tvar tensoru energie – impulsu velmi jednoduchý:

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p) u_\alpha u_\beta + p\, g_{\alpha\beta} \quad , \quad T_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad . \tag{5.1}$$

Geniální Einsteinovou myšlenkou bylo ztotožnit „geometrickou“ a „gravitační“ charakteristiku prostoročasu a spojit ji se zdrojem tvořeným „hmotnostní“ charakteristikou prostoročasu. Einsteinovy rovnice gravitačního pole jsou tedy

$$E_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad , \tag{5.2}$$

kde G je Newtonova gravitační konstanta. Souvislost Einsteinových rovnic s Newtonovým gravitačním zákonem uvidíme nejlépe na příkladu pohybové rovnice částice. Částice se pohybuje po geodetice - nejkratší spojnici dvou bodů (vždy, pokud nejsou body příliš vzdáleny)

$$\begin{gathered} \delta \tau_{ba} = \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}\, d\lambda = 0 \quad \Rightarrow \\ \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0 \quad , \end{gathered} \tag{5.3}$$

nebo užijeme-li jako parametru vlastního času τ (obecně $\lambda = A\tau + B$)

$$\frac{du^{\mu}}{d\tau}+\Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}u^{\rho}u^{\sigma}=0 \quad . \tag{5.4}$$

Předpokládáme-li, že částice se pohybují pomalu ve slabém gravitačním poli, nebude se metrický tensor příliš lišit od Minkowskiho. Interval píšeme ve tvaru

$$ds^2=-\left(1+2\Phi\left(\vec{r}\right)\right)dt^2+\left(1-2\Phi\left(\vec{r}\right)\right)d\vec{r}^{\,2} \quad . \tag{5.5}$$

Vypočteme složky konexe a dosadíme do (5.4) (pro malá rychlosti je $u^{\alpha}\approx\left(-1,\vec{v}\right)$ a $d\tau\approx dt$)

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=-\mathrm{grad}\Phi\left(\vec{r}\right) \quad . \tag{5.6}$$

Se stejnou přesností spočteme E_{00} a T_{00} a dosadíme do (5.2)

$$E_{00}\approx 2\Delta\Phi\left(\vec{r}\right) \quad , \quad T_{00}\approx\rho \quad \Rightarrow \quad \Delta\Phi\left(\vec{r}\right)\approx 4\pi G\rho \quad . \tag{5.7}$$

Stopa tensorů v (5.2) dává $-R=8\pi GT$, takže Einsteinovy rovnice můžeme psát dvěma způsoby

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R&=8\pi GT_{\mu\nu} \quad , \\ R_{\mu\nu}&=8\pi G\left(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right) \quad . \end{aligned} \tag{5.8}$$

Druhý způsob je vhodnější, pokud $T=0$ (elektromagnetické pole) nebo dokonce $T_{\mu\nu}=0$ (vakuum). Prostoročas je plochý, pokud jsou všechny komponenty Riemannova tensoru nulové.

6. Schwarzschildovo řešení

Předpokládáme-li interval ve tvaru

$$ds^2=-T\left(r,t\right)dt^2+R\left(r,t\right)dr^2+r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2\right) \quad , \tag{6.1}$$

je řešení Einsteinových rovnic ve vakuu

$$ds^2=-\left(1-\frac{2GM}{r}\right)dt^2+\frac{1}{\left(1-\frac{2GM}{r}\right)}dr^2+r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2\right) \quad , \tag{6.2}$$

M je konstanta. Její význam vidíme srovnáním pro slabé pole, kdy (porovnáním (6.2) a (5.5))

$$\Phi\approx -G\frac{M}{r} \quad . \tag{6.3}$$

Schwarzschildovo řešení má dvě singularity: souřadnicovou singularitu (tj. danou pouze volbou souřadnic) na „Schwarzschildově poloměru“ $r_g=2GM$ a podstatnou singularitu

$r=0$. Prostoročas popsaný Schwarzschildovým metrickým tensorem není plochý, nenulové komponenty Riemannova tensoru jsou

$$R_{0101}=-\frac{2MG}{r^3} \quad , \quad R_{2323}=\frac{2MG}{r^3} \quad , \quad R_{0202}=\frac{MG}{r^3} \quad , \quad R_{1313}=-\frac{MG}{r^3} \tag{6.4}$$

Invariant křivosti má singularitu jen pro $r=0$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}\,R^{\alpha\beta\mu\nu}=\frac{48\,M^2\,G^2}{r^6} \quad . \tag{6.5}$$

Trajektorii částice v rovině $\theta=\pi/2$ získáme řešením Hamiltonovy – Jacobiho rovnice

$$\begin{gathered} g^{\alpha\beta}\frac{\partial S}{\partial x^\alpha}\frac{\partial S}{\partial x^\beta}=-m^2 \quad \Rightarrow \\ -\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2+\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2=-m^2 \quad . \end{gathered} \tag{6.6}$$

Dosadíme do (6.6)

$$S=-E_0\,t+L\,\varphi+\Sigma(r) \tag{6.7}$$

a dostáváme

$$\frac{d\Sigma(r)}{dr}=\left[E_0^2\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-2}-\left(m^2+\frac{L^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}\right] \quad . \tag{6.8}$$

Závislost $r(t)$ získáme derivováním vztahu $dS=-E_0\,dt+L\,d\varphi+\left(d\Sigma(r)/dr\right)dr$ podle E_0

$$\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}\frac{dr}{dt}=\frac{1}{E_0}\left(E_0^2-U^2(r)\right)^{1/2} \quad , \quad U(r)=m\left[\left(1+\frac{L^2}{m^2\,r^2}\right)\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\right]^{1/2} \quad , \tag{6.9}$$

$U(r)$ je efektivní potenciální energie.