NEEUKLIDOVSKÉ GEOMETRIE

JARO 2007

Úvod

První otázka zní: Co je euklidovská geometrie? Odtud pak víme, co není euklidovská geometrie a můžeme domýšlet, co asi je neeuklidovská geometrie ....

Závěrem těchto úvah byla všeobecná shoda, že neeuklidovská geometrie je skoro euklidovská geometrie, akorát je nějak modifikován požadavek rovnoběžnosti. V každém případě zůstává možnost měření vzdáleností a úhlů. Je zajímavé, že Euklidův axiomatický systém vylučuje možnost „žádná rovnoběžka“, viz 1.2. (Ještě zajímavější je stopovat důvody tohoto pozorování...) Modifikací požadavku rovnoběžnosti v tomto rámci dostáváme právě Lobačevského neboli hyperbolickou geometrii, jak je to představeno v kapitole 2. Eliptická geometrie je studována o dost méně zevrubně v 3.

První dvě a část třetí kapitoly představují jakýsi elemantární přístup a nevyžadují žádné speciální předběžné znalosti. Ve zbylém textu potřebujeme lineární algebru včetně kvadratických forem...

1. Základy euklidovské geometrie

1.1. Euklidovy základy.

— některé definice, zejména definice pravého úhlu a rovnoběžnosti:

D10 když přímka na přímce postavená tvoří vedlejší úhly sobě rovné, každý z těchto rovných úhlú se zove *pravým*, ...

D23 *rovnoběžky* jsou přímky, které jsouce v téže rovině a do nekonečna na obě strany prodlouženy, nesetkají se v žádném směru

— postuláty:

(I) *aby každé dva body šlo spojit přímkou,*

(II) *aby každou přímku šlo neomezeně prodloužit na obě strany,*

(III) *aby z každého bodu pro každý poloměr šla sestrojit kružnice...,*

(IV) *aby všechny pravé úhly byly stejné,*

(V) *aby když přímka protínající dvě jiné přímky tvoří vnitřní úhly na jedné straně menší než dva pravé, pak tyto dvě přímky jsouce prodlouženy do nekonečna setkají se na té straně, kde jsou úhly menší dvou pravých.* pátý postulát

— axiomy vyslovené a nevyslovené...

— standardní model euklidovského prostoru: $\mathbb{E}^3$ = afinní prostor $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem

1.2. Pátý postulát a jeho ekvivalentní podoby.

— (V) je ekvivalentní s následujícím tvrzením, kterým je (V) nejčastěji nahrazován:

- *každým bodem ke každé přímce jde právě jedna rovnoběžka.*

Date: 16. května 2007, verze 2.0.

Warning: text se průběžně vyvíjí a upravuje, při čtení buďte obezřetní.

DŮLEŽITÝ POSTŘEH: Bez (V) lze každým bodem ke každé přímce sestrojit nějakou rovnoběžku, viz [E, kniha I, tvr. 31]. (V) je potřeba pouze k důkazu jednoznačnosti takové rovnoběžky!!!! POSTŘEH

— (V) je ekvivalentní s tvrzeními:

- *součet vnitřních úhlů libovolného trojúhelníka je roven π (lépe asi dvěma pravým),* dú1
- ○ *součet vnitřních úhlů jednoho trojúhelníka je roven π,*
- *součet vnitřních úhlů je v každém trojúhelníku konstantní,* dú2
- *existují podobné a neshodné trojúhelníky,*
- *pro každý bod uvnitř lib. nepřímého úhlu existuje přímka, která tímto bodem prochází a protíná obě ramena daného úhlu.* dú3

Druhé tvrzení jsme nedokazovali, pouze citovali jako *druhou Legendrovu větu*. Při této příležitosti jsme taky definovali *defekt* trojúhelníka a obecněji n-úhelníka jako rozdíl *defekt*

$$(n-2)\pi - \text{součet vnitřních úhlů}.$$

Jeden směr každé ekvivalence je ve všech případech buď triviální nebo je řešen Euklidem v některém z prvních tvrzení Základů. Opačný směr většinou vyžaduje nějaký rafinovaný nápad. Např. u předposledního tvrzení by předpoklad podobných neshodných trojúhelníků znamenal existenci čtyřúhelníka a odtud i trojúhelníka s nulovým defektem. Tento závěr je založen na pozorování, které jsme formulovali jako *první Legendrovu větu*, a jehož důkaz nezávisí na (V):

- *Součet vnitřních úhlů libovolného trojúhelníka je menší nebo roven π,*

tj. defekt ≥ 0. Poslední tvrzení ze seznamu se objevuje jako skrytý předpoklad v Legendrově důkazu, že defekt trojúhelníka nikdy není kladný...

— Uvažujeme-li euklidovskou geometrii formálně jako všechny důsledky nějaké sady axiomů a hyperbolickou geometrii jako všechny důsledky stejné sady axiomů s tím, že (V) je nahrazen jeho negací, pak dostáváme následující jednoduchý a užitečný princip:

- *Jestliže nějaké tvrzení platí v euklidovské geometrii a jeho negace platí v hyperbolické geometrii, pak toto tvrzení je ekvivalentní s (V).*

Uvědomte si, že vzhledem k důležitému postřehu na str. 2, negace (V) spolu s ostatními Euklidovými axiomy znamená: „existuje bod a přímka tak, že tímto bodem jdou aspoň dvě různé přímky rovnoběžné s tou přímkou“!! Kromě již dokázaných tvrzení, lze díky tomuto principu docela jednoduše charakterizovat další tvrzení ekvivalentní s (V), např.: POZOR

- ○ *Pythagorova věta* (viz (17), str. 7),
- ○ *existuje trojúhelník s libovolně velkým obsahem* (viz 2.4, str. 6),
- ○ *každému trojúhelníku jde opsat kružnice* (viz 2.2, str. 4),
- ○ *množina bodů, které leží v jedné polorovině a mají stejnou vdálenost od dané přímky, je přímka* (viz 2.2, str. 4)
- ○ *a další.*

1.3. Shrnutí. Nezávisle na (V) jsou v Euklidových Základech dokázána všechna tvrzení 1–28 v první knize a samozřejmě řada dalších. Tahle tvrzení **budou** platit i v hyperbolické geometrii a patří mezi ně např.:

- ○ T4 = věta SUS,
- ○ T8 = věta SSS,
- ○ T12 = *sestroj kolmici k přímce z bodu, který na ní neleží,*
- T16 = věta o vnějším úhlu,
- ○ T17–20 = známé nerovnosti v trojúhelníku,
- ○ T26 = věta USU,

- T27 = věta o střídavých úhlech

a zejména již zmiňované

- T31 = *konstrukce rovnoběžky.....*

Z všelijakých závislostí připomínám, že T31 záviselo zejména na T27 a T27 pouze na T16. Toto je cesta k pochopení neexistence rovnoběžných přímek v eliptické geometrii, doporučuji dorozmyslet podrobnosti... cvičení

Naopak, řada dalších tvrzení je přímo závislá na (V), tedy **nebudou** platná v hyperbolické geometrii, např.:

- T29 = *přímka protínající dvě rovnoběžné přímky......*,
- T32 = *vnější úhel trojúhelníka je doven součtu protějších vnitřních a součet vnitřních úhlů trojúhelníka je roven dvěma pravým,*
- ○ T47 = Pythagorova věta.

Dále samozřejmě nebude platit, žádné z předchozích tvrzení, u něhož jsme odhalili ekvivalenci s (V). Takto napřed můžeme např. tvrdit, že v hyperbolické geometrii:

- *budou existovat přímky, které mají víc rovnoběžek,*
- *všechny trojúhelníky bodou mít kladný a nekonstatntní defekt,*
- *nebudou existovat podobné neshodné trojúhelníky (tj. jakási UUU věta)*
- *a pod.*

2. Základy hyperbolické geometrie

2.1. Úvodní pozorování. Základní vstup do této kapitoly, tj. do studia hyperbolické geometrie, je tvrzení, které dostáváme negací (V) spolu s ostatními Euklidovými axiomy a jež jsme tak pečlivě diskutovali výše:

- *Existuje bod a přímka tak, že tímto bodem jdou aspoň dvě různé rovnoběžky k té přímce.*

Odtud pak docela snadno odvozujeme, že:

- *každým bodem ke každé přímce jdou aspoň dvě různé rovnoběžky,*
- *každým bodem ke každé přímce jde nekonečně moc různých rovnoběžek.*

— Připomínáme, že, podle definice, přímky jsou rovnoběžné, když leží ve společné rovině a neprotínají se. Nyní pozorujeme, jak jsou všechny přímky procházející daným bodem v hyperbolické rovině rozděleny na přímky různoběžné a rovnoběžné s nějakou danou přímkou. Vidíme dvě hraniční přímky, které jsou nutně rovnoběžky a těm budeme říkat *souběžky*, ostatní rovnoběžky budeme jmenovat *rozběžkami.* *souběžky a rozběžky* Vzhledem ke vstupním objektům bychom správně měli říkat, že „přímka je souběžná k přímce p z bodu B v tom/onom směru“. Vzhledem k následujícím elementárním, ale ne vždy úplně triviálním, faktům se vyjadřování poněkud usnadní:

- ○ *je-li q souběžka k přímce p z bodu B a C je lib. bod na q, pak q je taky souběžka k přímce p z bodu C* (říkáme „q je souběžná k p“),
- ○ *je-li q souběžná k p, pak je p souběžná ke q* (říkáme „p a q jsou souběžné“).

Následuje očekávaná tranzitivnost souběžnosti, jak ji známe pro rovnoběžky v euklidovské rovině. Nic podobného samozřejmě neplatí pro rozběžky!

- ○ *Jsou-li dvojice přímek p, q a q, r souběžné (v tomtéž směru!), pak i p a r jsou souběžné.*

— Podobnými úvahami, jako před definicí souběžnosti, dostáváme:

- *pro každé dvě různoběžné polopřímky (svírající ostrý úhel) existuje jediná přímka, která je kolmá k jedné a souběžná s druhou polopřímkou,* *první kolmice*
- *pro každé dvě různoběžné polopřímky existuje jediná přímka souběžná s oběma polopřímkami.*

Druhé tvrzení mimo jiné ukazuje, že nevlastní body hyperbolické roviny netvoří přímku, jak jsme zvyklí říkat v euklidovské rovině; v dalším textu lze vystopovat, co je to za křivku… Předchozí dvě tvrzení zřejmě platí, když nahradíme různoběžné polopřímy souběžkami a nějakou analogii bychom snadno zformulovali i pro rozběžky. Místo toho raději uvádíme následující charakterizaci rozběžnosti: cvičení

- *přímky jsou rozběžné právě když mají společnou kolmici, tato kolmice je pak nutně jediná.* dú4

— Diskuze o „vzdálenostech“ mezi dvojicemi přímek různého typu úpně přeskakujeme:

- *vzdálenost mezi souběžkami monotonně klesá k nule ve směru souběžnosti a monotonně neomezeně roste proti směru souběžnosti,*
- *podobně pro různoběžky: vzdálenost monotonně a neomezeně roste na obě strany od společného bodu,*
- *podobně pro rozběžky: vzdálenost monotonně a neomezeně roste na obě strany od společné kolmice.*

— Na závěr jedna zásadní definice: Pro přímku a bod definujeme *úhel souběžnosti* jako úhel, který svírá libovolná souběžka s kolmicí z bodu na danou přímku. Následující fakta by se měla dokázat: úhel souběžnosti cvičení

- *úhel souběžnosti není konstantní a závisí pouze na vzdálenosti x bodu od přímky, píšeme $\alpha = \Pi(x)$,*
- *funkce Π je definovaná pro $x \in (0, \infty)$, všude rostoucí a $\lim_{x\to 0} \Pi(x) = \frac{\pi}{2}$ a $\lim_{x\to\infty} \Pi(x) = 0$.*

Ze symetrických důvodů definujeme $\Pi(-x) = \pi - \Pi(x)$.

— POZNÁMKY: Funkci Π budeme jmenovat funkcí Lobačevského (Lobačevský jí říkal F). Podoba funkce Π má zásadní význam pro všechny metrické vztahy v hyperbolické geometrii, viz 2.6, představíme ji v odstavci 2.5, viz též 5.2.2.

2.2. Zobecněné svazky přímek, kružnice, sféry.

— klasický pojem svazku přímek, zobecnění v euklidovském prostoru; zobecnění v hyperbolickém prostoru ⇝ *obyčsvazek* = svazek různoběžných přímek, *horosvazek* = svazek souběžných přímek, *hyposvazek* = svazek přímek kolmých ke společné přímce. *zobecněné svazky*

- *Osy stran libovolného trojúhelníka patří do některého zobecněného svazku.* dú5

— pojem kružnice, alternativní definice, zobecnění ⇝ *obyčcykl* = obyčejná kružnice, *horocykl* = mezní kružnice, *hypocykl* = zámezní kružnice. *zobecněné cykly*

Přímo z definice (a předchozího) máme:

- *existují trojúhelníky, kterým nejde opsat kružnice,*
- *dvě zobecněné kružnice ze stejného svazku mají konstantní vzdálenost,*
- *každá zobecněná kružnice je kolmá ke všem přímkám odpovídajícího svazku,*

Odtud zejména:

- *skoro žádná zobecněná kružnice není přímka!*

Jediné zobecněné kružnice, které jsou přímkami, jsou společné kolmice v hyposvazcích; v tomto případě jsou hypocykly odpovídajího hyposvazku právě ekvidistanty dané společné kolmice… Je-li ekvidistantou dané přímky přímka, pak platí (V), sr. 1.2, str. 2.

— Podobná pozorování v prostoru ⇝ *sféra, horosféra, hyposféra…* *zobecněné sféry*

— Už tady lze dokázat následující podstatná tvrzení:

- *všechny horosféry jsou shodné (sféry a hyposféry nikoli),*

- ***na horosféře je indukovaná euklidovská geometrie*** *(na sféře je sférická a na hyposféře hyperbolická geometrie).* DÚ7

ZÁSADNÍ POSTŘEH: Předposlední tvrzení je napsané tlustě, protože je skutečně důležité! Tato skutečnost byla pozorována jak Lobačevským, tak Bolyaiem a euklidovská geometrie na horosféře má zásadní význam při odvozování skoro všech metrických závislostí v dalším textu; první ukázka viz 2.3. Tvrzení se často formuluje jako „horosféra je modelem euklidovské rovinné geometrie“. K důkazu potřebujeme diskutovat zejména (V) nebo nějakou jeho ekvivalentní podobu s tím, že roli bodů hrají body horosféry a roli přímek hrají horocykly. Uvědomíme-li si, že každý horocykl je průnikem horosféry a roviny obsahující nevlastní střed odpovídajího horosvazku, lze docela snadno ukázat, že ke každému horocyklu každým bodem (na každé horosféře) vede jediná „rovnoběžka“… Jiný argument je představen v 2.4, str. 6. POSTŘEH

2.3. Délka horocyklu.

— Ozn. s' a s délky dvou různých horocyklů vymezené dvěma souběžkami odpovídajího horosvazku a ozn. d vzdálenost těchto horocyklů. Pak

(1) $$\bullet\ s' = s e^{\frac{d}{k}}$$

pro *nějakou* kladnou reálnou konstantu k.

— První typická aplikace zásadního postřehu z minulého odstavce je následující konstrukce, která řeší závislost délky s horocyklu na délce t odpovídající tětivy: POZOR

+ nakresli pravoúhlý trojúhelník $AB_\infty C$ s nevlastním vrcholem B_∞ a pravým úhlem u C,
+ ozn. $t = |AC|$, potom $\angle A = \Pi(t)$,
+ sestroj kolmici k k rovině $AB_\infty C$ z vrcholu A,
+ doplň souběžky ke k z vrcholů B_∞ a C,
+ nakresli horosféru určenou tímto horosvazkem a C,
+ na ní horosférický trojúhelník $A'B'C$: $\angle C = \frac{\pi}{2}$ a $\angle A' = \angle A = \Pi(t)$,
+ ozn. délku horocyklu (odp. tětivě t) $|A'C| = s$ a délku $|B'C| = \kappa$,
+ konečně, euklidovská geometrie na horosféře dává:

(2) $$\bullet\ s = \kappa \cot \Pi(t),$$

kde Π je Lobačevského funkce.

— Úplně analogicky lze odvodit vzorec závisející na délce t' odpovídající tečny:

(3) $$\circ\ s = \kappa \cos \Pi(t').$$

— POZNÁMKY: Ve vzorečku (1) se poprvé objevuje jistá neurčitá konstanta ozn. k. Podobnou věc potkáme ještě několikrát, vždy budeme používat stejný symbol a až v odstavci 5.2 dokážeme, že toto naše rozhodnutí je správné, tj. že se jedná pořád o stejnou konstantu. Ve skutečnosti k představuje jakýsi „poloměr křivosti“ hyperbolické roviny, viz též postřeh na str. 8… konstanta k

Veličina κ v posledních dvou vzorcích odpovídá délce jistého speciálního horocyklu, viz obr. Na str. 13 ukážeme, že

(4) $$\circ\ \kappa = k,$$

takže celkem získáme jakousi názornou interpretaci charakteristické konstanty k… Díky tomuto faktu a vztahům (11) budeme formule (2) a (3) používat ve tvaru: délka horocyklu

(5) $$\bullet\ s = k \sinh \frac{t}{k},$$

(6) $$\bullet\ s = k \tanh \frac{t'}{k}.$$

2.4. Obsah mnohoúhelníka.

— Elementárně a docela pracně lze odvodit, že pro libovolné dva trojúhelníky (mnohoúhelníky) je poměr jejich obsahů a poměr defektů stejný, tj.

$$\circ\ S = \text{konst} \cdot \delta \tag{7}$$

pro nějakou kladnou reálnou konstantu.

— Pokud je to pravda, pak zřejmě

- *neexistují trojúhelníky s libovolně velkým obsahem* (sr. 1.2, str. 2)

— S předpokladem, že obsah trojúhelníka s max. defektem, tj. se všemi vrcholy nevlastními, je konečný (ozn. τ), jsme na přednášce představili ideu Gaussova důkazu, že dú6

$$\bullet\ S = \frac{\tau}{\pi} \cdot \delta. \tag{8}$$

Ve skutečnosti platí $\tau = k^2\pi$, viz 5.2.3, str. 13, takže předchozí formuli se budeme učit jako

$$\circ\ S = k^2\delta. \tag{9}$$

POSTŘEH: Podobný vztah platí i na sféře, viz 5.4 nebo taky postřeh na str. 8: POSTŘEH

$$\circ\ S = -r^2\delta,$$

kde r je poloměr sféry a znamínko mínus proto, že $\delta < 0$. Odtud lze jednoduše ukázat, že defekt mezního trojúhelníka na mezní sféře (horosféře) je nulový, což je slibovaný alternativní důkaz zásadního pozorování v 2.2... dú7

2.5. Úhel souběžnosti.

— Popularizace Lobačevského fascinujícího důkazu, končícího slovy:

$$\bullet\ \tan\frac{1}{2}\Pi(x) = e^{-\frac{x}{k}} \tag{10}$$

pro nějakou konstantu k; detaily časem v 5.6...

— k je stejné jako v (1), viz 5.2.2

— (10) je ekvivalentní s:

$$\begin{aligned} &\bullet\ \cos\Pi(x) = \tanh\frac{x}{k}, \\ &\bullet\ \sin\Pi(x) = \frac{1}{\cosh\frac{x}{k}}, \\ &\bullet\ \tan\Pi(x) = \frac{1}{\sinh\frac{x}{k}}. \end{aligned} \tag{11}$$

2.6. Trigonometrie.

— pravoúhlý trojúhelník ABC (pravý úhel u C), kolmice k k rovině trojúhelníka z vrcholu A, horosféra určená $k + B$, souběžky s k z vrcholů B a C, pravoúhlý (!) trojúhelník $A'BC'$ na horosféře + euklidovská geometrie na horosféře + formule (5) pro délku horocyklu $\rightsquigarrow$ vzorec pro $\sin\alpha$ v pravoúhlém hyperbolickém trojúhelníku:

$$\bullet\ \sin\alpha\cot\Pi(c) = \cot\Pi(a) \tag{12}$$

nebo ekvivalentně vzhledem k (11):

$$\bullet\ \sin\alpha\sinh\frac{c}{k} = \sinh\frac{a}{k}. \tag{13}$$

— Podobně lze odvodit taky zbylé vztahy: dú8

$$\begin{aligned} &\circ\ \cos\alpha\cos\Pi(c) = \cos\Pi(b), \\ &\circ\ \tan\alpha\cot\Pi(b) = \cos\Pi(a). \end{aligned} \tag{14}$$

— Dále např.: cvičení

$$(15) \qquad \circ \ \sin\alpha = \sin\Pi(b)\cos\beta,$$

$$(16) \qquad \circ \ \tan\alpha\tan\beta = \sin\Pi(c).$$

— Z předchozích vztahů dostáváme velice přímo a snadno hypebolickou verzi Pythagorovy věty, tj. vztah, který porovnává jenom délky stran v pravoúhlém trojúhelníku:

$$(17) \qquad \bullet \ \sin\Pi(c) = \sin\Pi(a)\sin\Pi(b)$$ Pythagorova věta

nebo ekvivalentně

$$(18) \qquad \bullet \ \cosh\frac{c}{k} = \cosh\frac{a}{k}\cosh\frac{b}{k}.$$

— Odtud lze podobnými úvahami jako v euklidovské rovině odvodit ještě sinovou a kosinovou větu; zde je ta kosinová: dú9

$$(19) \qquad \circ \ \sin\Pi(a) = \sin\Pi(b)\sin\Pi(c) + \cos\Pi(b)\cos\Pi(c)\sin\Pi(a)\cos\alpha$$ kosinová věta

nebo ekvivalentně:

$$(20) \qquad \circ \ \cosh\frac{a}{k} = \cosh\frac{b}{k}\cosh\frac{c}{k} - \sinh\frac{b}{k}\sinh\frac{c}{k}\cos\alpha.$$

— POSTŘEH: Ve všech odvozených vzorcích vystupují jenom analytické funkce a dosazením $k \to \infty$ nebo $\frac{x}{k} \to 0$ do příslušných nekonečných řad pozorujeme, že v každém jednotlivém případě dostáváme odpovídající euklidovské vzorečky nebo triviální rovnosti (jako např. pro (15),(16)). Jinými slovy, pro hodně velké k nebo na hodně malé (vzhledem ke k) části hyperbolického prostoru pozorujeme euklidovskou geometrii! POSTŘEH cvičení

3. Sférická a eliptická geometrie

Sférická geometrie je geometrie na sféře a sférická geometrie není totéž co eliptická... Než začneme počítat, uvědomme si, že to, čemu říkáme geometrie na sféře

$$(21) \qquad S^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = r^2\} \subset \mathbb{E}^3,$$

je právě geometrie indukovaná z okolního euklidovského prostoru, podobně jako geometrie na horosféře byla indukovaná z okolního hyperbolického prostoru. K popisu vlastní geometrie na sféře lze zaujmout různý postoj, což je poměrně detailně představeno v 5.3. Prozatím lze zmiňovaný odstavec přeskočit, ale jeho částečné pochopení bude nutné pro většinu konstrukcí v 4.

3.1. Trigonometrie na sféře.

— Úplně analogicky k odvozování v 2.6 můžeme dokázat v pravoúhlém trojúhelníku na sféře s poloměrem r, že

$$(22) \qquad \circ \ \sin\alpha\sin\frac{c}{r} = \sin\frac{a}{r},$$

$$(23) \qquad \bullet \ \cos\alpha\tan\frac{c}{r} = \tan\frac{a}{r}$$

a podobně až k Pythagorově a kosinové větě... Podstatným vstupem v těchto úvahách je samozřejmě závislost délky s oblouku kružnice na délce t tětivy (sečny), příp. na délce t' tečny:

$$(24) \qquad \bullet \ t = r\sin\frac{s}{r},$$

$$(25) \qquad \bullet \ t' = r\tan\frac{s}{r}.$$

— Protože se na sféře v euklidovském prostoru cítíme o něco jistěji než na horosféře v hyperbolickém prostoru (také díky povídání v 5.3), dokážeme odvodit kosinovu větu rovnou přímo:

+ obecný sférický trojúhelník ABC, vrcholům odp. vektory ozn. x, y, z,
+ $\alpha = \angle A = \angle(y', z')$, kde y' a z' jsou kolmé projekce y a z do $x^{\perp} = T_A S^2$, tj.
  - $y' = y - \dfrac{(x,y)}{r^2}x,\ z' = z - \dfrac{(x,z)}{r^2}x$
+ platí
  - $\cos\alpha = \dfrac{(y', z')}{\sqrt{(y', y')}\sqrt{(z', z')}},$
+ dosaď za y' a z' a uprav výraz $\rightsquigarrow$

(26) $$\circ\ \cos\frac{a}{r} = \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r} + \sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos\alpha.$$

— ZAJÍMAVÝ POSTŘEH: Všechny odpovídající vzorečky v hyperbolické rovině a na sféře vypadají podezřele podobně! Ve skutečnosti stačí do jedněch dosadit $k = ir$ a dostaneme druhé nebo opačně pro $r = -ik$. (Plyne z definic hyperbolických sinů a kosinů, viz 5.1.) Tuto skutečnost zmiňuje sám Lobačevský jako zřejmou a podporující přesvědčení o bezespornosti jeho geometrie... Nás tohle pozorování přivede k prvnímu modelu hyperbolické roviny, viz 4.1. POSTŘEH cvičení

3.2. Eliptická geometrie.

— Sférická geometrie není euklidovská a v duchu úplně úvodních úvah je to geometrie eliptického typu, tj. „žádné rovnoběžky“. Eliptickou geometrií se však obvykle myslí následující modifikace sférické geometrie, která má za cíl přiblížit se více ostatním Euklidovým axiomům, tj. vyloučit vlastnosti typu „existují dvojice bodů, které spojuje nekonečně mnoho přímek“, „každé dvě přímky se protínají ve dvou bodech“ a pod. Stejně jako pro sférickou geometrii, ani pro eliptickou geometrii se nesnažíme o žádný pořádný axiomatický popis, spokojíme se s popisem standardního modelu:

— Standardní model *eliptické geometrie* vznikne ze sféry identifikací protilehlých bodů, píšeme $E^2 = S^2/\sim$, kde $\sim$ je relace na S^2 „být protilehlý“. Konkrétně, body eliptické roviny jsou třídy tohoto rozkladu, tj. dvojice protilehlých bodů na S^2, tj. průsečíky S^2 s přímkami v $\mathbb{E}^3$ obs. počátek. Odtud E^2 ztotožňujeme s projektivizací $\mathbb{R}^3$, tj. s reálnou projektivní rovinou, což píšeme $E^2 \cong \mathbb{P}^2$. (Přímky v E^2 jsou zřejmě právě projektivní přímky.) eliptická rovina

Metrika, tj. vlastní geometrie na E^2, je určená „stáhnutím“ metriky z S^2 stejným způsobem, jak uvidíme ještě mnohokrát v 4. V Kleinově pojetí je geometrie eliptické roviny určená grupou $\mathrm{Isom}(E^2) \cong SO(3)$, takže

(27) $$E^2 \cong SO(3)/O(2),$$

viz 5.3.3 pro nápovědu... cvičení

— Konstrukce eliptické roviny nám zaručuje, že

- *každé dva body spojuje jediná přímka,*
- *každé dvě přímky se protínají v jednom společném bodě.*

Odtud zejména:

- *v eliptické rovině nejsou žádné rovnoběžky.*

Ačkoli nemáme metriku v E^2 explicitně popsanou, vzhledem k jejímu původu můžeme jednoduše prohlásit, že cvičení

- *všechny přímky v eliptické rovině mají konečnou délku a to $r\pi$.*

Tato vlastnost představuje typickou odlišnost od přímek v euklidovské a hyperbolické rovině, které jsou nekonečně dlouhé (což je implicitně zahrnuto v (II)). Ve skutečnosti, přímky v E^2 jsou uzavřené a z dalších topologických zvláštností eliptické roviny zmiňujeme:

- *přímka nerozděluje E^2 na dvě části,*
- ○ *E^2 není orientovatelná,*
- ○ *E^2 není jednoduše souvislá.*

4. Modely hyperbolické roviny

4.1. První model. Postřeh na str. 8 nás nutká vyslovit následující větu, prozatím ještě v uvozovkách:

- ○ *„geometrie hyperbolické roviny je geometrie na sféře s imaginárním poloměrem ik.“*

Imaginární sféra

$$\{x^2 + y^2 + z^2 = -k^2\} \subset \mathbb{E}^3 \tag{28}$$

imaginární sféra

se zdá být naším prvním modelem hyperbolické roviny. Nevýhodou tohoto modelu je, že nemá ani jeden reálný bod. Místo, abychom analyzovali tento imaginární model, vhodně jej transformujeme:

— Uvažujme transformaci $x' = x, y' = y, z' = iz$. Tato transformace není shodnost $\mathbb{E}^3$ a standardní norma $x^2 + y^2 + z^2$ se transformuje na indefinitní $x'^2 + y'^2 - z'^2$. Vektorový prostor $\mathbb{R}^3$ s touto normou se nazývá *Minkovského* a budeme ho značit $\mathbb{E}^{2,1}$. V tomto prostoru máme nenulové vektory s nulovou velikostí, např. $(0, 1, 1)$, a všechny takové vektory tvoří kužel $\{x'^2 + y'^2 - z'^2 = 0\}$. Vektory uvnitř toho kužele, např. $(0, 0, 1)$, mají imaginární velikost, vektory vně pak reálnou, jak jsme zvyklí. . . *prostor Minkovského*

Obrazem imaginární sféry (28) vzhledem k uvažované transformaci je tedy kvadrika

$$H^2 = \{x^2 + y^2 - z^2 = -k^2\} \subset \mathbb{E}^{2,1}, \tag{29}$$

hyperboloid H^2

náš první reálný (skoro)model hyperbolické roviny, viz obr. „Skoro“ říkáme proto, že kvadrika $H^2 = H^2_+ \cup H^2_-$ není souvislá, takže by zde neplatil hned (I). . .

— Všimněme si, že v každém bodě hyperboloidu H^2 je tečný prostor tvořen vektory s nenulovými reálnými velikostmi, tj. metrika indukovaná na H^2 z Minkovského metriky v $\mathbb{E}^{2,1}$ je positivně definitní! H^2 je tedy Riemannův prostor v duchu 5.3.1 a jako obvykle přímkami v modelu H^2 myslíme geodetiky. Ale jak tady geodetiky vypadají? Analogicky k myšlenkám v 5.3.2 postupně ukážeme:

- *tečný prostor v každém bodě $p \in H^2$ splývá s kolmým doplňkem $p^\perp$,* dú10
- $\mathrm{Isom}(H^2) \cong O(2, 1)$ a $H^2 \cong O(2, 1)/O(2)$,
- *geodetika určená bodem $p \in H^2$ a vektorem $v \in p^\perp$ je právě (hlavní) hyperbola $H^2 \cap \langle p, v\rangle$ (resp. jedna její větev),*
- ○ *navíc, pokud $||v|| = k$, pak $\cosh t \cdot p + \sinh t \cdot v$ je parametrizace této geodetiky s konstantní rychlostí k.*

— Od hyperboloidu H^2 ke skutečnému modelu hyperbolické roviny vede stejná cesta jako v 3 od sférické k eliptické geometrii, totiž ztotožněním protilehlých bodů. Naším prvním modelem hyperbolické roviny tedy rozumíme $H^2/\sim$, jež ztotožňujeme s jednou z komponent hyperboloidu, řekněme s H^2_+. Předchozí závěry se nijak nemění až na první model H^2_+

- $\mathrm{Isom}(H^2_+) \cong O'(2, 1)$ a $H^2_+ \cong O'(2, 1)/O(2)$, kde $O'(2,1)$ značí podgrupu $O(2,1)$ zachovávající orientaci osy z, tj. každou komponentu hyperboloidu. Pozor, $O'(2,1) \neq SO(2,1)$. cvičení

— díky předchozí charakterizaci geodetik umíme zejména popsat všechny vzájemné polohy „přímek“ v H^2_+ podle typu průsečnice odp. rovin: směr průsečnice má velikost imaginární $\rightsquigarrow$ různoběžky, nulovou $\rightsquigarrow$ souběžky, reálnou $\rightsquigarrow$ rozběžky

— díky homogennosti H^2_+ vedeme další diskuzi pouze v okolí bodu $(0,0,k)$, nakonec umíme charakterizovat všechny zobecněné kružnice jako průniky H^2_+ s vhodnými rovinami: „kružnice“ = elipsy, „horocykly“ = paraboly, „hypocykly“ = hyperboly

4.2. Kleinův model. Jiná (standardní) realizace projektivizace z předchozího odstavce vede k dalšímu, tzv. Kleinovu modelu hyperbolické roviny: uvažujeme projekci z počátku do roviny $z = 1$, obraz H^2 značíme K^2. Kleinův disk K^2

— „body“ = body uvnitř kruhu $x^2+y^2 = 1$ (hranice představuje body v nekonečnu),

— „přímky“ = sečny kruhu,

— „zobecněné kružnice“ = kružnice nebo elipsy (typ zobecněné kružnice je určen počtem dotykových bodů s hraniční kružnicí)

— metrika v K^2 je stáhnutá metrika z hyperboloidu H^2, ale než ji explicitně popíšeme, všimneme si, že:

- *přímky p, q jsou kolmé právě když q prochází pólem p (vzhledem k hraniční kuželosečce),*
- *body A, A' jsou symetrické podle přímky p právě když $(AA'PQ) = -1$, kde $P = \text{pól}\, p$ a $Q = p \cap AA'$,*
- ∘ *vzdálenost bodů $A, B = \frac{k}{2}\ln(ABUV)$, kde U, V jsou průsečíky AB s hraniční kuželosečkou.*

— předchozím a předpředpředchozím tvrzením je metrika na K^2 vpodstatě úplně určena. Explicitně její kvadratická forma vypadá takto:

$$\circ\ ds^2 = k^2 \frac{(1-y^2)dx^2 + 2xydxdy + (1-x^2)dy^2}{(1-x^2-y^2)^2} \tag{30}$$

a odvodí se takto:

+ popíše se bijekce $K^2 \to H^2_+$, $(x,y,1) \mapsto (x',y',z')$:
  (i) zřejmě $(x',y',z') = \lambda(x,y,1)$ pro nějakou funkci $\lambda = \lambda(x,y)$,
  (ii) aby $(x',y',z') \in H^2$, musí být $\lambda = \frac{k}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$,
+ spočítají se diferenciály dx', dy', dz',
+ dosadí se do $ds^2 = dx'^2 + dy'^2 - dz'^2$
+ a po čase se upraví na (30).

— POSTŘEH: kromě bodů na souřadných osách nejsou kolmé směry v tomto modelu euklidovsky kolmé, což koresponduje s pozorováním s pólem výše…

4.3. Polosférický model. Vznikne z K^2 kolmou projekcí na polosféru pod K^2 se společnou hranicí, značíme S^2_-. polosféra S^2_-

— „body“ = body polosféry $\{x^2+y^2+z^2 = 1, z < 0\} \subset \mathbb{R}^3$,

— „přímky“ = polokružnice kolmé k rovině xy (tedy k hraniční kružnici!),

— „zobecněné kružnice“ = všemožné kružnice nebo jejich části (viz poznámky v 4.4)

— POZNÁMKY: Metrika není indukovaná z okolního $\mathbb{E}^3$, ale zase přenesená z předchozího modelu; v souřadnicích (x,y) tedy užíváme (30).

Tomuto modelu nevěnujeme příliš pozornosti, poslouží pouze jako cesta k ostatním: další modely vznikají z S^2_- vhodnými projekcemi do vhodných rovin, uvažte např. středovou projekci z počátku do roviny $z = -1$… cvičení

4.4. Poincarého model. Vznikne z S^2_- středovou projekcí ze severního pólu $(0,0,1)$ zpět do roviny xy (stereografická projekce!), značíme D^2: Poincarého disk D^2

— „body“ = body uvnitř kruhu $x^2 + y^2 = 1$,

— „přímky“ = části kružnic kolmých k hranici,

— „zobecněné kružnice“ = části kružnic (viz poznámky níže)

— podobně jako na konci 4.2 můžeme po nějakém počítání odvodit kvadratickou formu metriky přetažené z předchozího modelu:

$$\circ\ ds^2 = \frac{4k^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}(dx^2 + dy^2). \tag{31}$$

POSTŘEH: Metrika v D^2 je konformní se standardní euklidovskou metrikou, tj. úhly vidíme, narozdíl od Kleinova modelu, všude nezkresleně! (Protože D^2 vznikl z S^2_- stereografickou projekcí, také odchylky na polosféře S^2_- odpovídají euklidovským odchylkám v $\mathbb{E}^3$.)

— podobně jako v Kleinově modelu lze jednoduše popsat základní shodnosti a určovat vzdálenosti:

- ∘ *vzdálenost bodů = logaritmus nějakého dvojpoměru oblouků,*
- • *symetrie podle přímek = kruhové inverze.*

POZNÁMKY: Nyní je možné charakterizovat všechny zobecněné kružnice v D^2 jako euklidovské kružnice. (Typ je určen počtem spol. bodů s hranicí.) (Pozor, střed kružnice nemusí být ve středu odpovídajícího svazku!) Zdůvodnění ze zdá být výrazně méně přímočaré, než jak jsme pozorovali v hyperboloidovém a Kleinově modelu. Odtud pak můžeme zpětně popsat zobecněné kružnice v polosférickém modelu a odtud pak víme, jak budou vypadat v polorovinovém modelu, pokud to celé nejde rozmyslet nějak lépe...? cvičení

4.5. Polorovinový model. Vznikne z S^2_- středovou projekcí z bodu $(0,1,0)$ do roviny xz (jiná stereografická projekce!), značíme R^2_-: polorovina R^2_-

— „body“ = body v polorovině $z < 0$ (hranici tvoří přímka $z = 0$ plus jeden nevlastní bod ve směru osy z),

— „přímky“ = kružnice/přímky kolmé k hranici,

— „zobecněné kružnice“ = většinou kružnice, ale taky přímky...

— Podle očekávání z předcházejících diskuzí musíme opět dostat konformní model; po jistém počítání lze stejně jako v 4.4 odvodit kvadratickou formu metriky (místo (x,z) píšeme (x,y)):

$$\circ\ ds^2 = \frac{k^2}{y^2}(dx^2 + dy^2). \tag{32}$$

Nad očekávání tak dostáváme nejjednodušší tvar, jaký můžeme potkat. Z tohoto důvodu je polorovinový model jasným favoritem, kdykoli bude třeba něco integrovat, viz 5.2. Odpovídající forma objemu v tomto modelu je

$$\circ\ d\mu = \frac{k^2}{y^2}dxdy. \tag{33}$$

4.6. Beltramiho pseudosféra.

5. Přílohy

5.1. Hyperbolické funkce. Známe

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots, \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots, \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots. \end{aligned}$$

Eulerova formule zní:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

odkud pak

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \\ \sin x &= \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}). \end{aligned}$$

Hyperbolické funkce definujeme

$$\begin{aligned} \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots, \\ \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \end{aligned}$$

a zřejmě platí

$$\begin{aligned} e^x &= \cosh x + \sinh x, \\ \cos ix &= \cosh x, \\ \sin ix &= i \sinh x. \end{aligned}$$

Odtud a ze známého $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ máme

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

Podobně jako $(\cos t, \sin t)$ parametrizuje kružnici $x^2 + y^2 = 1$, tak $(\cosh t, \sinh t)$ parametrizuje hyperbolu $x^2 - y^2 = 1$, resp. jednu její větev...

5.2. Konstanta k. V této části konečně ukážeme, že neurčitá konstanta k, kterou jsme několikrát při různých příležitostech potkávali, je pořád tatáž veličina. Veškerá počítání děláme v polorovinovém modelu s metrikou (32)...

5.2.1. *Délka horocyklu.*

— Pro porovnání délek horocyklů uvažujeme stejný obr. jako na začátku 2.3, str. 5:

+ souběžky $x = 0, x = a$ a dva odp. horocykly $y = b', y = b$,
+ ozn. s, s' délky těch horocyklů a d jejich vzdálenost (pozor, a, b, b' představují euklidovské souřadnice v modelu, s, s', d jsou hyperbolické vzdálenosti),
+ jednoduše máme $s = k\frac{a}{b}$ a $s' = k\frac{a}{b'}$,
+ spočítáme $d = \int_{b'}^{b} \frac{k}{t} dt = k \ln \frac{b}{b'}$,
+ celkem pak $\frac{s'}{s} = \frac{b}{b'} = e^{\frac{d}{k}}$, Q.E.D

— Pro speciální délku κ tamtéž stačí uvážit následující:

+ přímka $x = 0$, kolmice = půlkružnice $(S = 0, r = \text{lib.})$, společná souběžka = přímka $x = r$,
+ horocyklus $y = r$, délku ozn. κ,

+ triviálně $\kappa = k\frac{r}{r} = k$ Q.E.D

5.2.2. *Úhel souběžnosti.* Vhodně umístíme výchozí obrázek z 2.5, str. 6:

+ přímka $x = 0$, kolmice = půlkružnice $k : (S = 0, r = 1)$, souběžka = přímka $x = a$, $0 < a < 1$,
+ ozn. d délku kolmice, $\alpha = \Pi(d)$ úhel souběžnosti,
+ kolmice–půlkružnice je parametrizována $k(t) = (\cos t, \sin t)$ a zřejmě $a = \cos\alpha$,
+ odtud potom $d = \int\limits_{\pi/2}^{\alpha} \frac{k}{\sin t} \cdot 1\, dt = \cdots = -k \ln\tan\frac{\alpha}{2} + 0$, Q.E.D

5.2.3. *Obsah největšího trojúhelníka.* Vzhledem k počítání v 2.4, str. 6, stačí spočítat obsah τ nějakého trojúhelníka s maximálním defektem (všechny jsou shodné); uvažujme následující:

+ 1. strana = půlkružnice $k : (S = 0, r = 1)$, 2. strana = přímka $x = -1$, 3. strana = přímka $x = 1$,
+ integrujeme formu (33), meze jsou $x \in [-1, 1]$, $y \in [\sqrt{1-x^2}, \infty]$:

$$\tau = \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{k^2}{y^2} dy dx = k^2 \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = k^2\pi,$$

Q.E.D

5.3. Geometrie na sféře.

5.3.1. *Riemannova sféra.* Podle stanoviska Riemannova je celá geometrie na sféře určená právě *Riemannovou metrikou*[1] indukovanou ze standardního skalárního součinu v $\mathbb{E}^3$, tj. v každém bodě $p \in S^2$ uvažujeme zúžení tohoto skalárního součinu na tečný prostor $T_pS^2 \subset \mathbb{E}^3$. V obvyklé poledníko–rovnoběžkové parametrizaci sféry ($u_1 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ je „zeměpisná šířka“, $u_2 \in [0, 2\pi]$ „zeměpisná délka“)

$$f(u_1, u_2) = r(\cos u_1 \cos u_2, \cos u_1 \sin u_2, \sin u_1) \tag{34}$$

vektory

$$v_1 = \frac{\partial f}{\partial u_1} = r(-\sin u_1 \cos u_2, -\sin u_1 \sin u_2, \cos u_1), \tag{35}$$

$$v_2 = \frac{\partial f}{\partial u_2} = r(-\cos u_1 \sin u_2, \cos u_1 \cos u_2, 0) \tag{36}$$

tvoří bázi tečného prostoru v každém bodě $p = f(u_1, u_2)$ (kromě pólů) a vzhledem k této bázi má náš skalární součin v T_pS^2 matici

$$\begin{pmatrix} (v_1, v_1) & (v_1, v_2) \\ (v_2, v_1) & (v_2, v_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2\cos^2 u_1 \end{pmatrix}, \tag{37}$$

odtud metrická kvadratická forma a forma objemu jsou

$$ds^2 = r^2(du_1^2 + \cos^2 u_1 du_2^2) \text{ a} \tag{38}$$

$$d\mu = r^2 \cos u_1 \, du_1 du_2. \tag{39}$$

[1] Obecně, *Riemannova metrika* na abstraktní hladké varietě M je právě přiřazení $p \in M \mapsto$ skalární součin v tečném prostoru T_pM, které závisí hladce na p. *Riemannův prostor/varieta* je hladká varieta s Riemannovou metrikou.

Takhle vypadají vstupní data pro veškerá další počítání v Riemannově duchu. Odtud např. geodetiky na sféře jsou charakterizovány jako řešení následující soustavy obyčejných diferenciálních rovnic:

$$\ddot{u}_1 = -r^2 \sin u_1 \cos u_1 (\dot{u}_2)^2, \tag{40}$$
$$\ddot{u}_2 = 2r^2 \tan u_1 \, \dot{u}_1 \dot{u}_2. \tag{41}$$

Ačkoli málokdo na první pohled vidí, jak vypadají obecná řešení, geodetiky jsou vždycky jednoznačně určeny jedním bodem a tečným vektorem v tomto bodě a představují nejkratší spojnice dvou různých bodů. V rámci možností jsou geodetiky ty nejméně křivé čáry... Z řečeného lze intuitivně odvodit, že

- ◦ *geodetiky na sféře jsou hlavní kružnice.*

5.3.2. *Geodetiky.* Vzhledem k tomu, co potřebujeme v 4.1, podpoříme předchozí závěr ještě nějakým argumentem. Ozn. $\mathrm{Isom}(S^2)$ grupu všech isometrií sféry, tj. grupu všech transformací $S^2 \to S^2$, které zachovávají danou metriku. Potom

- $\mathrm{Isom}(S^2) \cong O(3)$,

kde $O(3)$ značí grupu ortogonálních transformací $\mathbb{E}^3$ (shodnosti zach. počátek).

Důkaz. To, že každý prvek $O(3)$ určuje isometrii sféry je zřejmé z definice. Opačně, že každá isometrie S^2 je určená nějakou ortogonální transformací $\mathbb{E}^3$, plyne z toho, že

(a) v grupě $O(3)$ vždycky najdeme transformaci, která zobrazí libovolný bod sféry na kterýkoli jiný[2] a
(b) každá shodnost v každém tečném prostoru každého bodu sféry je určená nějakou transformací z $O(3)$.

Obě tyto vlastnosti můžeme zdůvodnit takto: víme, že

- *tečný prostor T_pS^2 v každém bodě $p \in S^2$ splývá s kolmým doplňkem $p^\perp$.*

Proto, když (v_1, v_2) je ON báze T_pS^2, pak $(\frac{1}{r}p, v_1, v_2)$ je ON báze $\mathbb{E}^3$. Ale každá ON báze $\mathbb{E}^3$ lze zobrazit na kteroukoli jinou ON bázi pomocí nějaké transformace z $O(3)$... Q.E.D

Odtud již očekávaná charakterizace geodetik jako hlavních kružnic:

- *geodetika určená bodem $p \in S^2$ a vektorem $v \in p^\perp = T_pS^2$ je právě hlavní kružnice $S^2 \cap \langle p, v\rangle$.*

Důkaz. Ozn. g geodetiku na sféře určenou počáteční podmínkou (p, v). Ozn. ρ rovinu $\langle p, v\rangle$ a uvažujme isometrii f sféry určenou zrcadlením podle roviny ρ v $\mathbb{E}^3$. Protože g je prodmínkou (p, v) určená jednoznačně a $p, v \in \rho$, platí $f(g) = g$. Ale jediné pevné body zobrazení f leží na hlavní kružnici $k = \rho \cap S^2$, takže musí být $g \subseteq k$. Protože g a k jsou souvislé křivky, máme $g = k$. Q.E.D

Jako cvičení doporučují čtyři z pěti geometrů rozmyslet, že: cvičení

- ◦ *pokud $||v|| = r$, pak $\cos t \cdot p + \sin t \cdot v$ je parametrizace (s konstantní rychlostí r) geodetiky, tj. hlavní kružnice, určené bodem $p \in S^2$ a vektorem $v \in p^\perp$.*

[2] Říkáme, že $O(3)$ působí *tranzitivně* na S^2.

5.3.3. *Kleinova sféra.* Jako vedlejší, ale docela zajímavý, produkt předchozích úvah máme identifikaci sféry jako faktorové množiny

$$S^2 \cong O(3)/O(2), \tag{42}$$

jež by měla reprezentovat fakt, že sféra je krásně homogenní. Jak tomu rozumět? Homogenností sféry myslíme, že v okolí libovolného bodu vypadá sféra, resp. geometrie na ní, vždycky stejně. Přesněji:

Díky podmínce (a) výše víme, že každý bod na sféře je obrazem např. $e_1 = (r, 0, 0)$ vzhledem k nějaké transformaci z $O(3)$. Hodně prvků $O(3)$ však e_1 zachovává, např. všechny rotace kolem osy e_1, a když označíme $H \subset O(3)$ podgrupu všech takových transformací, pak $S^2 \cong O(3)/H$. Každá transformace z H zachovává e_1, tedy i $e_1^\perp$ a zúžení na $e_1^\perp$ je opět shodnost. Vzhledem k (b) takto umíme popsat každou shodnost $e_1^\perp$, takže $H \cong O(2)$. Konkrétně, vložení $H \cong O(2) \subset O(3)$ vypadá takto

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} : A \in O(2) \right\}. \tag{43}$$

Je jasné, že jiná volba $e_1 \in S^2$ na začátku dává jiné vložení na konci, ale vždycky máme $H \cong O(2)$ a $S^2 \cong O(3)/O(2)$. Toto je, co rozumíme homogenností sféry.[3]

Při této identifikaci jde samozřejmě o víc, než jen popsat sféru jinak, studujeme zejména geometrii:

- *geometrie na sféře je studium vlastností, které se nemění působením grupy $O(3)$,*

jinými slovy geometrie na sféře je určená právě grupou, která na ní působí. Toto je přístup Kleinův ke geometrii, viz též 3.2, 4.1 a následující cvičení:

- ∘ *Popište geometrii euklidovské, afinní a projektivní roviny jako Kleinovu geometrii.* cvičení

5.4. Gaussova–Bonnetova formule.

5.5. Formálnější axiomatika geometrie.

5.6. O načalach geometrii.

Reference

[E] Euklides, *Základy*,

[H] V. Hlavatý, *Úvod do neeuklidovské geometrie*, Praha 1949

[Ka] V. F. Kagan, *Osnovanija geometrii*, Moskva 1956

[Ku] B. V. Kutuzov, *Lobačevského geometrie a elementy základů geometrie*, Praha 1953

[N] A. P. Norden (ed.), *Ob osnovanijach geometrii*, Moskva 1956

[T] W. P. Thurston, *Three-dimensional geometry and topology*, Princeton 1997

[V] E. B. Vinberg (ed.), *Geometry II*, Springer 1993

[3] Obecně, *homogenní prostor* je hladká varieta M, na níž tranzitivně působí nějaká grupa G. Pokud ozn. $H \subset G$ podgrupu, zachovávající nějaký bod, pak $M \cong G/H$.

Rejstřík