

Prvočísla

Řešené příklady

Příklad. Určete $\tau(a)$, $\sigma(a)$, pro číslo $a = 3600$.

Řešení. $a = 3600 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

$$\tau(a) = \tau(3600) = (4 + 1)(2 + 1)(2 + 1) = 45$$

$$\sigma(a) = \sigma(3600) = \frac{2^{4+1}-1}{2-1} \cdot \frac{3^{2+1}-1}{3-1} \cdot \frac{5^{2+1}-1}{5-1} = \frac{31}{1} \cdot \frac{26}{2} \cdot \frac{124}{4} = 12494 \quad \square$$

Příklad. Pomocí rozkladu na prvočísla určete největšího společného dělitele a nejmenší společný násobek čísel 864360 a 378378.

Řešení. $864360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^4$

$$378378 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$$

$$(864360, 378378) = (2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^4, 2 \cdot 3^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13) = 2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 = 882$$

$$[864360, 378378] = [2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^4, 2 \cdot 3^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13] = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^4 \cdot 11 \cdot 13 = 370810440 \quad \square$$

Příklad. Odhadněte počet prvočísel ležících mezi čísly 150 a 200 pomocí funkce π . Pak je nalezněte.

Řešení. Počet prvočísel ležících mezi čísly 150 a 200 je přibližně $\frac{200}{\ln 200} - \frac{150}{\ln 150} \sim 7,816$.

Prvočísla ležící mezi zadanými čísly jsou: 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 197, 199.

Je vidět, že odhad pomocí funkce π je jen přibližný. □

Příklad. Dokažte, že pro žádné $n \in \mathbb{N}$ nelze $6n + 5$ vyjádřit jako $p + q$, kde p a q jsou prvočísla.

Řešení. Řešení rozdělíme na dva případy:

1. p, q - lichá $\Rightarrow p + q$ - sudé, ale $6n + 5$ - liché

2. $p = 2, q = 6n + 3 = 3(2n + 1)$ je-li q prvočíslo $\Rightarrow q = 3 \Rightarrow 2n + 1 = 1 \Rightarrow \Rightarrow n = 0 \wedge n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ nelze □