3. Kongruence

Pojem kongruence byl zaveden Gaussem. Ačkoliv je to pojem velice jednoduchý, jeho důležitost a užitečnost v teorii čísel je nedocenitelná; projevuje se zejména ve stručných a přehledných zápisech některých i velmi komplikovaných úvah.

Definice. Jestliže dvě celá čísla a, b mají při dělení přirozeným číslem m týž zbytek r, kde $0 \le r < m$, nazývají se a, b *kongruentní modulo* m (též *kongruentní podle modulu* m), což zapisujeme takto:

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

V opačném případě řekneme, že a, b nejsou kongruentní modulo m, a píšeme

$$a \not\equiv b \pmod{m}.$$

Lemma. *Pro libovolná $a, b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(1) $a \equiv b \pmod{m}$,
(2) $a = b + mt$ *pro vhodné* $t \in \mathbb{Z}$,
(3) $m \mid a - b$.

Důkaz. „(1)⇒(3)“ Jestliže $a = q_1 m + r$, $b = q_2 m + r$, pak $a - b = (q_1 - q_2)m$.

„(3)⇒(2)“ Jestliže $m \mid a-b$, pak existuje $t \in \mathbb{Z}$ tak, že $m \cdot t = a - b$, tj. $a = b + mt$.

„(2)⇒(1)“ Jestliže $a = b + mt$, pak z vyjádření $b = mq + r$ plyne $a = m(q + t) + r$, tedy a i b mají při dělení číslem m týž zbytek r, tj. $a \equiv b \pmod{m}$. □

3.1. Základní vlastnosti kongruencí. Přímo z definice plyne, že kongruence podle modulu m je reflexivní (tj. $a \equiv a \pmod{m}$ platí pro každé $a \in \mathbb{Z}$), symetrická (tj. pro každé $a, b \in \mathbb{Z}$ z $a \equiv b \pmod{m}$ plyne $b \equiv a \pmod{m}$) a tranzitivní (tj. pro každé $a, b, c \in \mathbb{Z}$ z $a \equiv b \pmod{m}$ a $b \equiv c \pmod{m}$ plyne $a \equiv c \pmod{m}$) relace, jde tedy o *ekvivalenci*. Dokážeme nyní další vlastnosti:

Věta 12. *(Základní vlastnosti kongruencí)*

(1) ***Kongruence*** *podle téhož modulu* ***můžeme sčítat****. Libovolný sčítanec můžeme přenést s opačným znaménkem z jedné strany kongruence na druhou.* ***Na libovolnou stranu*** *kongruence* ***můžeme přičíst*** *jakýkoliv* ***násobek modulu.***

Důkaz. Je-li $a_1 \equiv b_1 \pmod{m}$ a $a_2 \equiv b_2 \pmod{m}$, existují podle lemmatu $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$ tak, že $a_1 = b_1 + mt_1$, $a_2 = b_2 + mt_2$. Pak ovšem $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 + m(t_1 + t_2)$ a opět podle lemmatu $a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 \pmod{m}$. Sečteme-li kongruenci $a + b \equiv c \pmod{m}$ s kongruencí $-b \equiv -b \pmod{m}$, která zřejmě platí, dostaneme $a \equiv c - b \pmod{m}$. Sečteme-li kongruenci $a \equiv b \pmod{m}$ s kongruencí $mk \equiv 0 \pmod{m}$, jejíž platnost je zřejmá, dostaneme $a + mk \equiv b \pmod{m}$. □

(2) ***Kongruence*** *podle téhož modulu* ***můžeme násobit****. Obě strany kongruence je možné* ***umocnit na totéž přirozené číslo****. Obě strany kongruence je možné* ***vynásobit stejným celým číslem****.*

Důkaz. Je-li $a_1 \equiv b_1 \pmod{m}$ a $a_2 \equiv b_2 \pmod{m}$, existují podle $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$ tak, že $a_1 = b_1 + mt_1$, $a_2 = b_2 + mt_2$. Pak ovšem

$$a_1a_2 = (b_1 + mt_1)(b_2 + mt_2) = b_1b_2 + m(t_1b_2 + b_1t_2 + mt_1t_2),$$

odkud podle dostáváme $a_1a_2 \equiv b_1b_2 \pmod{m}$.

Je-li $a \equiv b \pmod{m}$, dokážeme indukcí vzhledem k přirozenému číslu n, že platí $a^n \equiv b^n \pmod{m}$. Pro $n = 1$ není co dokazovat. Platí-li $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ pro nějaké pevně zvolené n, vynásobením této kongruence a kongruence $a \equiv b \pmod{m}$ dostáváme $a^n \cdot a \equiv b^n \cdot b \pmod{m}$, tedy $a^{n+1} \equiv b^{n+1} \pmod{m}$, což je tvrzení pro $n + 1$. Důkaz indukcí je hotov.

Jestliže vynásobíme kongruenci $a \equiv b \pmod{m}$ a kongruenci $c \equiv c \pmod{m}$, dostaneme $ac \equiv bc \pmod{m}$. □

(3) ***Obě strany*** *kongruence* ***můžeme vydělit jejich společným dělitelem****, jestliže je tento dělitel* ***nesoudělný s modulem.***

Důkaz. Předpokládejme, že $a \equiv b \pmod{m}$, $a = a_1 \cdot d$, $b = b_1 \cdot d$ a $(m, d) = 1$. Podle lemmatu je rozdíl $a - b = (a_1 - b_1) \cdot d$ dělitelný číslem m. Protože $(m, d) = 1$, je podle věty 5 číslo $a_1 - b_1$ také dělitelné číslem m, odtud podle lemmatu plyne $a_1 \equiv b_1 \pmod{m}$. □

(4) *Obě strany kongruence i její modul můžeme současně vynásobit tímtéž přirozeným číslem.*

Důkaz. Je-li $a \equiv b \pmod{m}$, existuje podle lemmatu celé číslo t tak, že $a = b + mt$, odkud pro $c \in \mathbb{N}$ platí $ac = bc + mc \cdot t$, odkud opět podle lemmatu plyne $ac \equiv bc \pmod{mc}$. □

(5) *Obě strany kongruence i její modul můžeme vydělit jejich společným kladným dělitelem.*

Důkaz. Předpokládejme, že $a \equiv b \pmod{m}$, $a = a_1 \cdot d$, $b = b_1 \cdot d$, $m = m_1 \cdot d$, kde $d \in \mathbb{N}$. Podle lemmatu existuje $t \in \mathbb{Z}$ tak, že $a = b + mt$, tj. $a_1 \cdot d = b_1 \cdot d + m_1dt$, odkud $a_1 = b_1 + m_1t$, což podle lemmatu znamená, že $a_1 \equiv b_1 \pmod{m_1}$. □

(6) ***Jestliže kongruence*** $a \equiv b$ ***platí podle různých modulů*** $m_1, \dots, m_k$, ***platí i podle modulu, kterým je nejmenší společný násobek*** $[\mathbf{m_1}, \dots, \mathbf{m_k}]$ ***těchto čísel.***

Důkaz. Jestliže $a \equiv b \pmod{m_1}, a \equiv b \pmod{m_2}, \dots, a \equiv b \pmod{m_k}$, podle lemmatu je rozdíl $a - b$ společný násobek čísel $m_1, m_2, \dots, m_k$ a tedy je dělitelný jejich nejmenším společným násobkem $[m_1, m_2, \dots, m_k]$, odkud plyne $a \equiv b \pmod{[m_1, \dots, m_k]}$. □

(7) *Jestliže kongruence platí podle modulu m, platí podle libovolného modulu d, který je dělitelem čísla m.*

Důkaz. Jestliže $a \equiv b \pmod{m}$, je $a - b$ dělitelné m, a proto také dělitelem d čísla m, odkud $a \equiv b \pmod{d}$. □

(8) *Jestliže je jedna strana kongruence a modul dělitelný nějakým celým číslem, musí být tímto číslem dělitelná i druhá strana kongruence.*

Důkaz. Předpokládejme, že $a \equiv b \pmod{m}$, $b = b_1 d$, $m = m_1 d$. Pak podle lemmatu existuje $t \in \mathbb{Z}$ tak, že $a = b + mt = b_1 d + m_1 dt = (b_1 + m_1 t)d$, a tedy $d \mid a$. □

Poznámka. Některé vlastnosti kongruencí jsme již používali, aniž bychom si toho povšimli – například příklad ze strany 7 lze přeformulovat do tvaru „jestliže $a \equiv 1 \pmod{m}$, $b \equiv 1 \pmod{m}$, pak také $ab \equiv 1 \pmod{m}$“, což je speciální případ tvrzení věty 12 (2). Nejde o náhodu. Libovolné tvrzení používající kongruence můžeme snadno přepsat pomocí dělitelnosti. Užitečnost kongruencí tedy netkví v tom, že bychom pomocí nich mohli řešit úlohy, které bez nich řešit nejsme schopni, ale v tom, že jde o velmi vhodný způsob zápisu. Osvojíme-li si ho, výrazně tím zjednodušíme jak vyjadřování, tak i některé úvahy. Je to typický jev: v matematice hraje vhodná symbolika velmi závažnou úlohu.

Příklad. Nalezněte zbytek po dělení čísla 5^{20} číslem 26.

Řešení. Protože $5^2 = 25 \equiv -1 \pmod{26}$, platí podle věty 12 (2)

$$5^{20} \equiv (-1)^{10} = 1 \pmod{26},$$

a tedy zbytek po dělení čísla 5^{20} číslem 26 je jedna. □

Příklad. Dokažte, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ je $37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n$ dělitelné sedmi.

Řešení. Platí $37 \equiv 16 \equiv 23 \equiv 2 \pmod{7}$, a tedy podle 12 (2) a (1) platí

$$37^{n+2}+16^{n+1}+23^n \equiv 2^{n+2}+2^{n+1}+2^n = 2^n(4+2+1) = 2^n \cdot 7 \equiv 0 \pmod{7},$$

což jsme chtěli dokázat. □

Příklad. Dokažte, že číslo $n = (835^5 + 6)^{18} - 1$ je dělitelné číslem 112.

Řešení. Rozložíme $112 = 7 \cdot 16$. Protože $(7, 16) = 1$, stačí ukázat, že $7 \mid n$ a $16 \mid n$. Platí $835 \equiv 2 \pmod 7$, a tedy podle 12

$$n \equiv (2^5+6)^{18}-1 = 38^{18}-1 \equiv 3^{18}-1 = 27^6-1 \equiv (-1)^6-1 = 0 \pmod 7,$$

proto $7 \mid n$. Podobně $835 \equiv 3 \pmod{16}$, a tedy

$$n \equiv (3^5 + 6)^{18} - 1 = (3 \cdot 81 + 6)^{18} - 1 \equiv (3 \cdot 1 + 6)^{18} - 1 = \\ = 9^{18} - 1 = 81^9 - 1 \equiv 1^9 - 1 = 0 \pmod{16},$$

proto $16 \mid n$. Celkem tedy $112 \mid n$, což jsme měli dokázat. □

Příklad. Dokažte, že pro libovolné prvočíslo p a libovolná $a, b \in \mathbb{Z}$ platí

$$a^p + b^p \equiv (a + b)^p \pmod p.$$

Řešení. Podle binomické věty platí

$$(a + b)^p = a^p + \binom{p}{1} a^{p-1}b + \binom{p}{2} a^{p-2}b^2 + \cdots + \binom{p}{p-1} ab^{p-1} + b^p.$$

Podle příkladu za větou 6 pro libovolné $k \in \{1, \dots, p-1\}$ platí $\binom{p}{k} \equiv 0 \pmod p$, odkud plyne tvrzení. □

Následující tvrzení je další užitečnou vlastností kongruencí:

Lemma. *Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo m a libovolná $a, b \in \mathbb{Z}$ taková, že $a \equiv b \pmod{m^n}$, kde $n \in \mathbb{N}$, platí, že $a^m = b^m \pmod{m^{n+1}}$.*

Důkaz. Platí

$$a^m - b^m = (a - b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + \cdots + ab^{m-2} + b^{m-1}) \tag{12}$$

a protože $m \mid m^n$, tak podle 12 (7) platí i $a \equiv b \pmod m$. Jsou tedy všechny sčítance ve druhé závorce v (12) kongruentní s a^{m-1} modulo m, a tedy

$$a^{m-1} + a^{m-2}b + \cdots + ab^{m-2} + b^{m-1} \equiv m \cdot a^{m-1} \equiv 0 \pmod m,$$

proto je $a^{m-1}+a^{m-2}+\cdots+ab^{m-2}+b^{m-1}$ dělitelné m. Z $a \equiv b \pmod{m^n}$ plyne, že m^n dělí $a - b$, a tedy m^{n+1} dělí jejich součin, což vzhledem k (12) vede k závěru, že $a^m \equiv b^m \pmod{m^{n+1}}$. □

3.2. Aritmetické funkce. Aritmetickou funkcí zde rozumíme funkci, jejímž definičním oborem je množina přirozených čísel.

Definice. Rozložme přirozené číslo n na prvočísla: $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$. Hodnotu *Möbiovy funkce* $\mu(n)$ definujeme rovnu 0, pokud pro některé i platí $\alpha_i > 1$ a rovnu $(-1)^k$ v opačném případě. Dále definujeme $\mu(1) = 1$.

Příklad. $\mu(4) = \mu(2^2) = 0, \mu(6) = \mu(2 \cdot 3) = (-1)^2, \mu(2) = \mu(3) = -1$.

Dokážeme nyní několik důležitých vlastností Möbiovy funkce, zejména tzv. *Möbiovu inverzní formuli.*

Lemma. *Pro* $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ *platí*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 0.$$

Důkaz. Zapíšeme-li n ve tvaru $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, pak všechny dělitele d čísla n jsou tvaru $d = p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k}$, kde $0 \le \beta_i \le \alpha_i$ pro všechna $i \in \{1, \dots, k\}$. Proto

$$\begin{aligned}\sum_{d|n} \mu(d) = & \sum_{\substack{(\beta_1,\dots,\beta_k)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^k \\ 0\le\beta_i\le\alpha_i}} \mu(p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k}) = \\ &= \sum_{(\beta_1,\dots,\beta_k)\in\{0,1\}^k} \mu(p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k}) \\ &= \binom{k}{0} + \binom{k}{1} \cdot (-1) + \binom{k}{2} \cdot (-1)^2 + \cdots + \binom{k}{k} \cdot (-1)^k \\ &= \big(1 + (-1)\big)^k = 0.\end{aligned}$$

□

S Möbiovou funkcí úzce souvisí pojem *Dirichletův součin*:

Definice. Buďte f, g aritmetické funkce. Jejich *Dirichletův součin* je definován předpisem

$$(f \circ g)(n) = \sum_{d|n} f(d) \cdot g\left(\tfrac{n}{d}\right) = \sum_{d_1 d_2 = n} f(d_1) \cdot g(d_2).$$

Lemma. *Dirichletův součin je asociativní.*

Důkaz.

$$((f \circ g) \circ h)(n) = \sum_{d_1 d_2 d_3 = n} f(d_1) \cdot g(d_2) \cdot h(d_3) = (f \circ (g \circ h))(n)$$

□

Příklad. Definujme dvě pomocné funkce $\mathbb{I}$ a I předpisem $\mathbb{I}(1) = 1$, $\mathbb{I}(n) = 0$ pro všechna $n > 1$, resp. $I(n) = 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak pro každou aritmetickou funkci f platí:

$$f \circ \mathbb{I} = \mathbb{I} \circ f = f$$

a

$$(I \circ f)(n) = (f \circ I)(n) = \sum_{d|n} f(d).$$

Dále platí $I \circ \mu = \mu \circ I = \mathbb{I}$, neboť

$$(I \circ \mu)(n) = \sum_{d|n} I(d)\mu(\tfrac{n}{d}) = \sum_{d|n} I(\tfrac{n}{d})\mu(d) =$$
$$= \sum_{d|n} \mu(d) = 0 \quad \text{pro všechna } n > 1$$

podle lemmatu za definicí Möbiovy funkce (pro $n = 1$ je tvrzení zřejmé).

Věta 13. *(Möbiova inverzní formule) Nechť je aritmetická funkce F definovaná pomocí aritmetické funkce f předpisem $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$. Pak lze funkci f vyjádřit ve tvaru*

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(\tfrac{n}{d}) \cdot F(d).$$

Důkaz. Vztah $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$ lze jiným způsobem zapsat jako $F = f \circ I$. Proto $F \circ \mu = (f \circ I) \circ \mu = f \circ (I \circ \mu) = f \circ \mathbb{I} = f$, což je tvrzení věty. □

Definice. Multiplikativní funkcí přirozených čísel rozumíme takovou aritmetickou funkci, která splňuje, že pro všechny dvojice nesoudělných čísel $a, b \in \mathbb{N}$ platí

$$f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b).$$

Příklad. Multiplikativními funkcemi jsou např. funkce $f(n) = \sigma(n)$, $f(n) = \tau(n)$, či $f(n) = \mu(n)$ nebo, jak brzy dokážeme i tzv. Eulerova funkce $f(n) = \varphi(n)$.

3.3. Eulerova funkce φ.

Definice. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Definujme Eulerovu funkci φ předpisem

$$\varphi(n) = |\{a \in \mathbb{N} \mid 0 < a \le n,\ (a, n) = 1\}|$$

Příklad. $\varphi(1) = 1, \varphi(5) = 4, \varphi(6) = 2$, je-li p prvočíslo, je zřejmě $\varphi(p) = p - 1$.

Nyní dokážeme několik důležitých tvrzení o funkci φ:

Lemma. *Nechť $n \in \mathbb{N}$. Pak $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.*

Důkaz. Uvažme n zlomků

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}.$$

Zkrátíme-li zlomky na základní tvar a seskupíme podle jmenovatelů, snadno dostaneme právě uvedené tvrzení. □

Věta 14. *Nechť $n \in \mathbb{N}$, jehož rozklad je tvaru $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$. Pak*

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Důkaz. S využitím předchozího lemmatu a Möbiovy inverzní formule dostáváme

$$\begin{aligned}\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\frac{n}{d} = n - \frac{n}{p_1} - \dots - \frac{n}{p_k} + \dots + (-1)^k \frac{n}{p_1 \cdots p_k} = \\ = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).\end{aligned} \tag{13}$$

□

Poznámka. Předchozí výsledek lze obdržet i bez použití Möbiovy inverzní formule pomocí principu inkluze a exkluze na základě zjištění poučtu čísel soudělných s n.

Důsledek. *Nechť $a, b \in \mathbb{N}$, $(a, b) = 1$. Pak*

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b).$$

Důkaz. Zřejmý. □

Poznámka. Rovněž toto tvrzení lze odvodit nezávisle na základě poznatku $(n, ab) = 1 \iff (n, a) = 1 \wedge (n, b) = 1$. Spolu se snadno odvoditelným výsledkem

$$\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = (p-1) \cdot p^{\alpha-1} \tag{14}$$

pak lze odvodit vztah (13) již třetím způsobem.

Příklad. Vypočtěte $\varphi(72)$.

Řešení. $72 = 2^3 \cdot 3^2 \implies \varphi(72) = 72 \cdot (1 - \frac{1}{2}) \cdot (1 - \frac{1}{3}) = 24$, alternativně $\varphi(72) = \varphi(8) \cdot \varphi(9) = 4 \cdot 6 = 24$. □

Příklad. Dokažte, že $\forall n \in \mathbb{N} : \varphi(4n + 2) = \varphi(2n + 1)$.

Řešení. $\varphi(4n + 2) = \varphi(2 \cdot (2n + 1)) = \varphi(2) \cdot \varphi(2n + 1) = \varphi(2n + 1)$. □

3.4. Malá Fermatova věta, Eulerova věta. Tvrzení v tomto odstavci patří mezi nejdůležitější výsledky teorie čísel.

Věta 15 (Fermatova, Malá Fermatova). *Nechť $a \in \mathbb{Z}$, p prvočíslo, $p \nmid a$. Pak*

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}. \tag{15}$$

Důkaz. Tvrzení vyplyne jako snadný důsledek Eulerovy věty 16. □

Důsledek. *Nechť $a \in \mathbb{Z}$, p prvočíslo. Pak*

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

Důkaz. Pokud $p \mid a$, pak jsou obě strany kongruentní s $0 \mod p$, jinak tvrzení snadno plyne vynásobením obou stran kongruence (15) číslem a. □

Definice. *Úplná soustava zbytků* modulo m je libovolná m-tice čísel po dvou nekongruentních modulo m (nejčastěji $0, 1, \ldots, m-1$). *Redukovaná soustava zbytků* modulo m je libovolná $\varphi(m)$-tice čísel nesoudělných s m a po dvou nekongruentních modulo m.

Poznámka. Snadno lze vidět, že jsou-li $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \equiv b \pmod m$, a $(a, m) = 1$, pak i $(b, m) = 1$.

Lemma. *Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_{\varphi(m)}$ tvoří redukovanou soustavu zbytků modulo m. Je-li $a \in \mathbb{Z}$, $(a, m) = 1$ pak i čísla $a \cdot x_1, \ldots, a \cdot x_{\varphi(m)}$ tvoří redukovanou soustavu zbytků modulo m.*

Důkaz. Protože $(a, m) = 1$ a $(x_i, m) = 1$, platí $(a \cdot x_i, m) = 1$. Kdyby pro nějaká i, j platilo $a \cdot x_i \equiv a \cdot x_j \pmod m$, po vydělení obou stran kongruence číslem a nesoudělným s m dostaneme $x_i \equiv x_j \pmod m$. □

Věta 16 (Eulerova). *Nechť $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $(a, m) = 1$. Pak*

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m. \tag{16}$$

Důkaz. Buď $x_1, x_2, \ldots, x_{\varphi(m)}$ libovolná redukovaná soustava zbytků modulo m. Podle předchozího lemmatu je i $a \cdot x_1, \ldots, a \cdot x_{\varphi(m)}$ redukovaná soustava zbytků modulo m. Platí tedy, že pro každé i existuje j (oba indexy jsou z množiny $\{1, 2, \ldots, \varphi(m)\}$) tak, že $a \cdot x_i \equiv x_j \pmod m$. Vynásobením čísel obou redukovaných soustav zbytků dostáváme

$$(a \cdot x_1) \cdot (a \cdot x_2) \cdots (a \cdot x_{\varphi(m)}) \equiv x_1 \cdot x_2 \cdots x_{\varphi(m)} \pmod m.$$

Po úpravě

$$a^{\varphi(m)} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdots x_{\varphi(m)} \equiv x_1 \cdot x_2 \cdots x_{\varphi(m)} \pmod m$$

a protože $(x_1 \cdot x_2 \cdots x_{\varphi(m)}, m) = 1$, můžeme obě strany kongruence vydělit číslem $x_1 \cdot x_2 \cdots x_{\varphi(m)}$ a dostaneme $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$. □

Poznámka. Eulerova věta je rovněž důsledkem Lagrangeovy věty uplatněným na grupu $(\mathbb{Z}_m^\times, \cdot)$.

Příklad. Nalezněte všechna prvočísla p, pro která $5^{p^2} + 1 \equiv 0 \pmod{p^2}$.

Řešení. Snadno se přesvědčíme, že $p = 5$ úloze nevyhovuje. Pro $p \neq 5$ platí $(p, 5) = 1$, a tedy podle Fermatovy věty $5^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. Umocněním na $p+1$ dostaneme $5^{p^2-1} \equiv 1 \pmod p$, odkud $5^{p^2} \equiv 5 \pmod p$. Z podmínky $5^{p^2} + 1 \equiv 0 \pmod p)^2$ plyne $5^{p^2} \equiv -1 \pmod p$, celkem tedy $5 \equiv -1 \pmod p$, a proto $p \mid 6$. Je tedy buď $p = 2$, nebo $p = 3$. Pro $p = 2$ však $5^4 + 1 \equiv 1^4 + 1 = 2 \not\equiv 0 \pmod 4$. Pro $p = 3$ dostáváme $5^9 + 1 = 5^6 \cdot 5^3 + 1 \equiv 5^3 + 1 = 126 \equiv 0 \pmod 9$, kde jsme užili důsledek Eulerovy věty $5^6 \equiv 1 \pmod 9$. Jediným prvočíslem, vyhovujícím úloze je tedy $p = 3$. □

Příklad. Pro liché číslo $m > 1$ nalezněte zbytek po dělení čísla $2^{\varphi(m)-1}$ číslem m.

Řešení. Z Eulerovy věty plyne $2^{\varphi(m)} \equiv 1 \equiv 1+m = 2r \pmod{m}$), kde $r = \frac{1+m}{2}$ je přirozené číslo, $0 < r < m$. Podle 12 (3) platí $2^{\varphi(m)-1} \equiv r \pmod{m}$, a tedy hledaný zbytek po dělení je $r = \frac{1+m}{2}$. $\square$

Tvrzení 3.1. *Je-li p prvočíslo, $p \equiv 3 \pmod{4}$, pak pro libovolná celá čísla a, b z kongruence $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{p}$ plyne $a \equiv b \equiv 0 \pmod{p}$.*

Důkaz. Předpokládejme, že pro $a, b \in \mathbb{Z}$ platí $a^2+b^2 \equiv 0 \pmod{p}$. Jestliže $p \mid a$, platí $a \equiv 0 \pmod{p}$, proto $b^2 \equiv 0 \pmod{p}$, tedy $p \mid b^2$, odkud vzhledem k tomu, že p je prvočíslo, dostáváme $p \mid b$, a proto $a \equiv b \equiv 0 \pmod{p}$, což jsme chtěli dokázat.

Zbývá prošetřit případ, kdy a není dělitelné prvočíslem p. Odtud dostáváme, že p nedělí ani b (kdyby $p \mid b$, dostali bychom $p \mid a^2$). Vynásobíme-li obě strany kongruence $a^2 \equiv -b^2 \pmod{p}$ číslem b^{p-3}, dostaneme podle Fermatovy věty

$$a^2 b^{p-3} \equiv -b^{p-1} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Protože $p \equiv 3 \pmod{4}$, je $p-3$ sudé číslo, a proto $\frac{p-3}{2} \in \mathbb{N}_0$. Označme

$$c = ab^{\frac{p-3}{2}}.$$

Pak c není dělitelné p a platí $c^2 = a^2 b^{p-3} \equiv -1 \pmod{p}$. Umocníme-li poslední kongruenci na $\frac{p-1}{2} \in \mathbb{N}$, dostaneme

$$c^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

Protože $p \equiv 3 \pmod{4}$, existuje celé číslo t tak, že $p = 3+4t$. Pak ovšem $\frac{p-1}{2} = 1 + 2t$, což je číslo liché a proto $(-1)^{(p-1)/2} = -1$. Podle Fermatovy věty naopak platí $c^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, odkud $1 \equiv -1 \pmod{p}$ a $p \mid 2$, spor. $\square$

S Eulerovou funkcí a Eulerovou větou úzce souvisí důležitý pojem *řád čísla modulo m* - jde přitom pouze o jinak nazvaný řád prvku v grupě invertibilních zbytkových tříd modulo m:

Definice. Nechť $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ $(a, m) = 1$. *Řádem čísla a modulo m* rozumíme nejmenší přirozené číslo n splňující

$$a^n \equiv 1 \pmod{m}.$$

Příklad. Pro libovolné $m \in \mathbb{N}$ má číslo 1 modulo m řád 1. Číslo -1 má řád

- 1 pro $m = 1$ nebo $m = 2$
- 2 pro $m > 2$

Příklad. Určete řád čísla 2 modulo 7.

Řešení.

$$\begin{aligned} 2^1 &= 2 \not\equiv 1 \pmod 7 \\ 2^2 &= 4 \not\equiv 1 \pmod 7 \\ 2^3 &= 8 \equiv 1 \pmod 7 \end{aligned}$$

Řád čísla 2 modulo 7 je tedy roven 3. □

Uveďme nyní několik zásadních tvrzení udávajících možné hodnoty řádu čísla modulo m:

Lemma. *Nechť $m \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $(a, m) = (b, m) = 1$. Jestliže $a \equiv b \pmod m$, pak obě čísla a, b mají stejný řád modulo m.*

Důkaz. Umocněním kongruence $a \equiv b \pmod m$ na n-tou dostaneme $a^n \equiv b^n \pmod m$, tedy $a^n \equiv 1 \pmod m \iff b^n \equiv 1 \pmod m$. □

Lemma. *Nechť $m \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$, $(a, m) = 1$. Je-li řád čísla a modulo m roven $r \cdot s$, (kde $r, s \in \mathbb{N}$), pak řád čísla a^r modulo m je roven s.*

Důkaz. Protože žádné z čísel $a, a^2, a^3, \dots, a^{rs-1}$ není kongruentní s 1 modulo m, není ani žádné z čísel $a^r, a^{2r}, a^{3r}, \dots, a^{(s-1)r}$ kongruentní s 1. Platí ale $(a^r)^s \equiv 1 \pmod m$, proto je řád a^r modulo m roven s. □

Poznámka. Opak obecně neplatí – z toho, že řád čísla a^r modulo m je roven s ještě neplyne, že řád čísla a modulo m je $r \cdot s$.
Př: $m = 13$
$a = 3$, $a^2 = 9 \pmod{13}$, $a^3 = 27 \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow 3$ má řád 3 mod 13.
$b = -4$, $b^2 = 16 \not\equiv 1 \pmod{13}$, $b^3 = -64 \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow -4$ má řád 3 modulo 13.
Přitom $(-4)^2 = 16 \equiv 3 \pmod{13}$ má stejný řád 3 jako číslo 3, ale číslo -4 nemá řád $2 \cdot 3$.
Přesný popis závislosti řádu na exponentu dávají následující 2 věty:

Věta 17. *Nechť $m \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$, $(a, m) = 1$. Označme r řád čísla a modulo m. Pak pro libovolná $t, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí*

$$a^t \equiv a^s \pmod m \iff t \equiv s \pmod r.$$

Důkaz. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $t \geq s$. Vydělíme-li číslo $t - s$ číslem r se zbytkem, dostaneme $t - s = q \cdot r + z$, kde $q, z \in \mathbb{N}_0, 0 \leq z < r$.

„$\Leftarrow$“ Protože $t \equiv s \pmod r$, máme $z = 0$, a tedy $a^{t-s} = a^{qr} = (a^r)^q \equiv 1^q \pmod m$. Vynásobením obou stran kongruence číslem a^s dostaneme tvrzení.

„$\Rightarrow$“ Z $a^t \equiv a^s \pmod m$ plyne $a^s \cdot a^{qr+z} \equiv a^s \pmod m$. Protože je $a^r \equiv 1 \pmod m$, je rovněž $a^{qr+z} \equiv a^z \pmod m$. Celkem po vydělení obou stran kongruence číslem a^s (které je nesoudělné s modulem), dostáváme $a^z \equiv 1 \pmod m$. Protože $z < r$, plyne z definice řádu, že $z = 0$, a tedy $r \mid t - s$. $\square$

Zřejmým důsledkem předchozí věty a Eulerovy věty je následující tvrzení (jehož druhá část je přeformulováním Lagrangeovy věty z Algebry pro naši situaci):

Důsledek. *Nechť $m \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$, $(a,m) = 1$. Označme r řád čísla a modulo m.*

(1) *Pro libovolné $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí*

$$a^n \equiv 1 \pmod m \iff r \mid n.$$

(2) $r \mid \varphi(m)$

Důkaz.

(1) stačí v předchozí větě volit $t = n$, $s = r$.
(2) zřejmé z (1) díky Eulerově větě volbou $n = \varphi(m)$.

$\square$

Následující věta je zobecněním předchozího Lemmatu.

Věta 18. *Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$, $(a,m) = 1$. Je-li řád čísla a modulo m roven $r \in \mathbb{N}$, je řád čísla a^n modulo m roven $\frac{r}{(n,r)}$.*

Důkaz. Protože $\frac{r \cdot n}{(r,n)} = [r,n]$, což je zřejmě násobek r, máme

$$(a^n)^{\frac{r}{(r,n)}} = a^{[r,n]} \equiv 1 \pmod m$$

(plyne z předchozího Důsledku neboť $r \mid [r,n]$). Na druhou stranu, je-li $k \in \mathbb{N}$ libovolné takové, že $(a^n)^k = a^{n \cdot k} \equiv 1 \pmod m$, dostáváme ($r$ je řád a), že $r \mid n \cdot k$ a dále z Věty 5 plyne, že $\frac{r}{(n,r)} \mid \frac{n}{(n,r)} \cdot k$ a díky nesoudělnosti čísel $\frac{r}{(n,r)}$ a $\frac{n}{(n,r)}$ dostáváme $\frac{r}{(n,r)} \mid k$. Proto je $\frac{r}{(n,r)}$ řádem čísla a^n modulo m. $\square$