Algebra 2 25.5.2007

Jméno: ....

Hodnocení						$\sum$	

Na každý příklad získáte nezáporný počet bodů.
Minimum (včetně semestrální písemky a DÚ) je 30 bodů.
Na práci máte 90 minut.

1. (10krát ± 1 bod — správně 1 bod, chybně -1, bez odpovědi 0)
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano — ne** Libovolná binomická kongruence $x^n \equiv -1 \pmod m$, kde n je liché, má vždy alespoň jedno řešení.

(b) **ano — ne** Lineární diofantická rovnice $ax = b$ má pro libovolná $a, b \in \mathbb{Z}$ splňující $a \mid b$ nekonečně mnoho řešení.

(c) **ano — ne** Pro všechna přirozená čísla $n > 1$ platí $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$ (μ zde označuje Möbiovu funkci).

(d) **ano — ne** Existuje jen konečně mnoho prvočísel tvaru $27k + 3$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

(e) **ano — ne** Víte-li, že číslo 2 má řád $r < p - 1$ modulo p, pak 4 není primitivní kořen modulo p.

(f) **ano — ne** Mezi čísly 1 až 60 existuje $\varphi(\varphi(60)) = 8$ primitivních kořenů modulo 60.

(g) **ano — ne** Libovolná redukovaná soustava zbytků modulo prvočíslo p obsahuje stejný počet kvadratických zbytků a nezbytků.

(h) **ano — ne** Je-li n prvočíslo, pak $(n-1)! \equiv -1 \pmod n$.

(i) **ano — ne** Libovolná polynomiální kongruence $f(x) \equiv 0 \pmod m$, kde $m \in \mathbb{N}$, má nejvýše $\mathrm{st}(f)$ řešení modulo m.

(j) **ano — ne** Je-li $m \in \mathbb{N}$, pak pro každé přirozené číslo d takové, že $d \mid \varphi(m)$ existuje $x \in \mathbb{Z}$ řádu d modulo m.

2. (6 bodů) Dokažte tvrzení: „Pro každé přirozené číslo n platí, že číslo

$$2^{2^{6n+2}} - 16$$

je dělitelné číslem 37.“

3. (8 bodů) Určete počet řešení kongruence $3x^2 + 491x + 112 \equiv 0 \pmod{503}$.

4. (6 bodů) Řešte diofantickou rovnici $x^4 = 369 + y^4$.

5. (6 bodů) Dokažte, že jsou-li a, b nesoudělná celá čísla, pak jsou také čísla $a^3 + b^3$, $a^2 + ab + b^2$ nesoudělná.

6. (4 bodů) Zformulujte Bezoutovu větu a aplikujte ji na čísla 2007 a 1561.