# ZPRACOVÁNÍ A ANALÝZA BIOSIGNÁLŮ

## POPIS SYSTÉMŮ

# CO JE TO SYSTÉM?

# CO JE TO SYSTÉM?

L. von Bertalanffy: Systém je komplex vzájemně na sebe působících elementů ...

R.L. Ackoff: Systém je soubor prvků a vazeb mezi nimi.

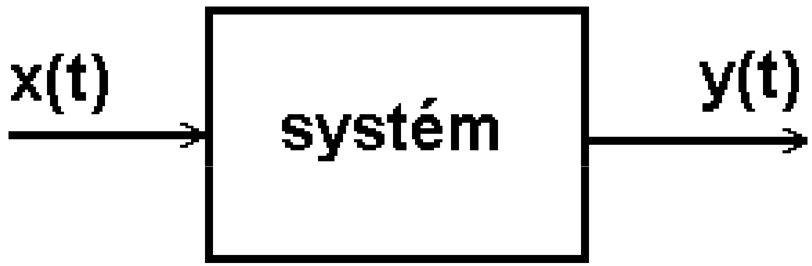
G.J. Klir: Systém je uspořádání určitých komponent, vzájemně propojených v celek.

# CO JE TO SYSTÉM?

Systém $\mathcal{S}$ je dvojice množin $\mathcal{S} = (A,R)$, kde $A = \{a_i\}$ je množina prvků a $R = \{r_{ij}\}$ je množina vztahů (relací) mezi prvky $a_i$ a $a_j$, která má jako celek určité vlastnosti.

**Vnitřní** (**stavový**) **popis**

**Vnější** (**vstupní/výstupní**) **popis**



# VNĚJŠÍ POPIS SPOJITÉHO SYSTÉMU

- **Vnější popis systému** – vyjádření vztahu mezi vstupními a výstupními veličinami
- na systém je nahlíženo jako na „**černou skříňku**"

$$a_n y^{(n)}(t) + \ldots + a_0 y(t) = b_m x^{(m)}(t) + \ldots + b_0 x(t)$$

- podmínka ryzosti systému: $n \geq m$ (rozumně realizovatelný systém)
- vlastnosti parametrů systému:

  pokud jsou konstantní, je systém lineární (co je to, když je lineární? tj. platí princip superpozice)

# VNĚJŠÍ POPIS SPOJITÉHO SYSTÉMU

$$a_n y^{(n)}(t) + \ldots + a_0 y(t) = b_m x^{(m)}(t) + \ldots + b_0 x(t)$$

- Laplacova transformace

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t).e^{-pt} dt$$

kde p je komplexní číslo, tedy $p = \sigma + j\omega$

- Fourierova transformace

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t).e^{-j\omega t} dt$$

# VNĚJŠÍ POPIS SPOJITÉHO SYSTÉMU

$$a_n y^{(n)}(t) + \ldots + a_0 y(t) = b_m x^{(m)}(t) + \ldots + b_0 x(t)$$

- Laplacův obraz derivace:

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\} = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-1} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

- součin Laplacových obrazů

$$F(p).G(p) \sim \int_{-\infty}^{t} f(\tau).g(t-\tau)d\tau$$

# VNĚJŠÍ POPIS SPOJITÉHO SYSTÉMU

$$a_n y^{(n)}(t) + \ldots + a_0 y(t) = b_m x^{(m)}(t) + \ldots + b_0 x(t)$$

☑ její Laplacův obraz za předpokladu linearity (**!**) a nulových počátečních podmínek (**!**)

$$a_n p^n Y(p) + \ldots + a_0 Y(p) = b_m p^m X(p) + \ldots + b_0 X(p)$$

$$(a_n p^n + \ldots + a_0) Y(p) = (b_m p^m + \ldots + b_0) X(p)$$

$$\frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{(b_m p^m + \ldots + b_0)}{(a_n p^n + \ldots + a_0)} = H(p)$$

**přenosová funkce systému**

# VNĚJŠÍ POPIS SPOJITÉHO SYSTÉMU

$$Y(p) = H(p).X(p) \sim \int_{-\infty}^{t} h(\tau).x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} h(t-\tau).x(\tau)d\tau$$

- $h(\tau)$ je funkce, která popisuje vlastnosti systému v časové oblasti – **impulzní charakteristika** – odezva na jednotkový impulz;
- **přechodová charakteristika** – odezva systému na jednotkový skok

# VNĚJŠÍ POPIS SPOJITÉHO SYSTÉMU

$$Y(p) = H(p).X(p) \sim \int_{-\infty}^{t} h(\tau).x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} h(t-\tau).x(\tau)d\tau$$

- h(τ) je funkce, která popisuje vlastnosti systému v časové oblasti – **impulzní charakteristika** – odezva na jednotkový impulz;
- Fourierův obraz jednotkového impulzu $\mathcal{F}\{\mathbf{1}(t)\}=1$

  podobně
- Laplacův obraz jednotkového impulzu $\mathcal{L}\{\mathbf{1}(t)\}=1$

$$Y(p) = H(p).1 = H(p)$$

# VNĚJŠÍ POPIS SPOJITÉHO SYSTÉMU

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{(b_m p^m + \ldots + b_0)}{(a_n p^n + \ldots + a_0)}$$

- předpokládejme, že p=jω, tj. σ=0

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{(b_m (j\omega)^m + \ldots + b_0)}{(a_n (j\omega)^n + \ldots + a_0)}$$

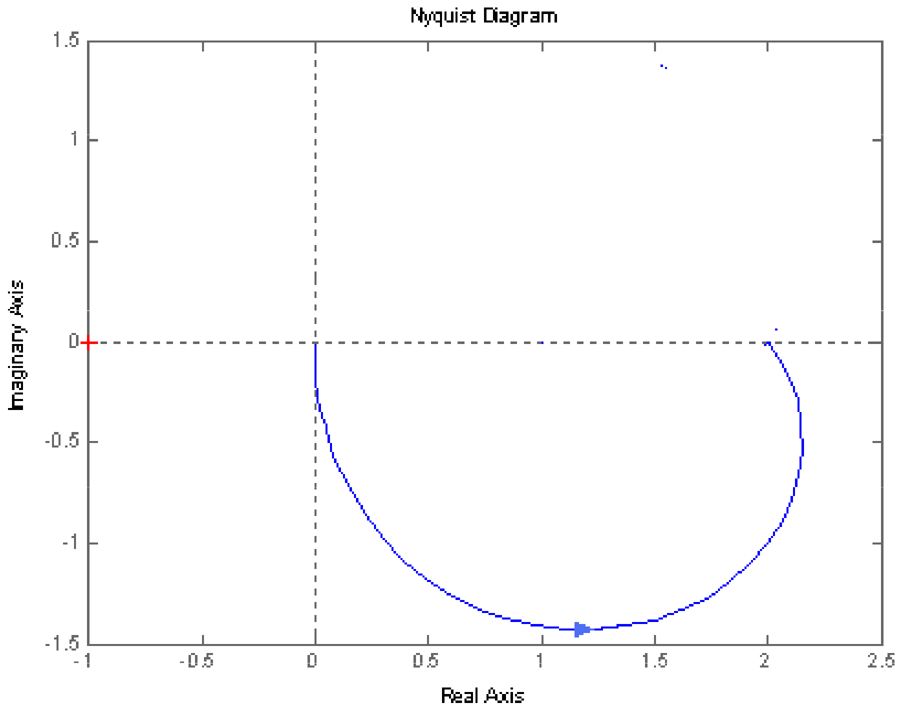
**frekvenční charakteristika systému**

H(jω) obecně nabývá komplexních hodnot, které mají modul a fázi ⇒ frekvenční charakteristika v komplexní rovině, resp. modulová (amplitudová) a fázová frekvenční charakteristika

# VNĚJŠÍ POPIS SPOJITÉHO SYSTÉMU

## ☑ Frekvenční charakteristika v komplexní rovině

určuje geometrické místo bodů vrcholů vektoru přenosové funkce pro různé hodnoty kmitočtu harmonického signálu



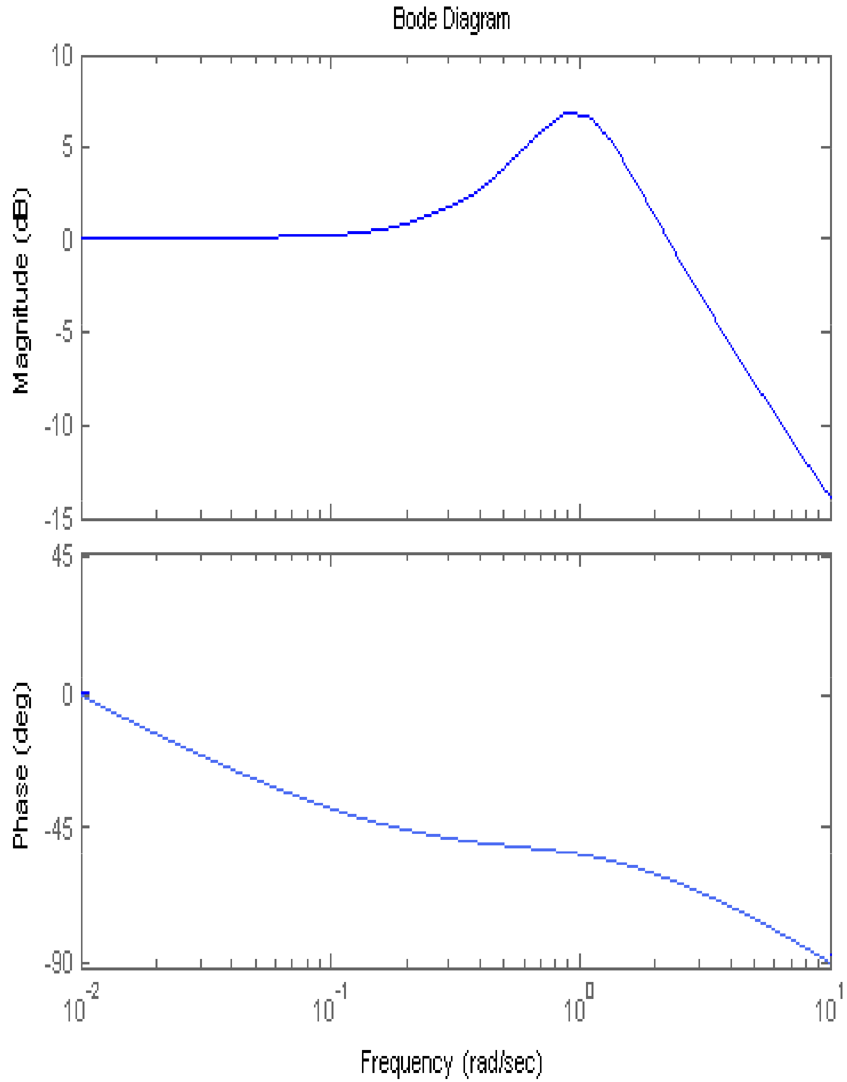
# VNĚJŠÍ POPIS SPOJITÉHO SYSTÉMU

- ☑ **Modulová frekvenční charakteristika**

  udává, jak se změní amplituda harmonického signálu dané frekvence průchodem soustavou

- ☑ **Fázová frekvenční charakteristika**

  udává, jak se změní počáteční fáze harmonického signálu dané frekvence průchodem soustavou



# VNĚJŠÍ POPIS SPOJITÉHO SYSTÉMU

Umíme již dvě funkce vyjadřující závislost modulu a počáteční fáze nějaké komplexní veličiny na frekvenci (! je potřeba je rozlišovat !):

- ☑ frekvenční charakteristika – popisuje frekvenční vlastnosti **lineárního systému**;
- ☑ frekvenční spektrum – popisuje frekvenční vlastnosti **signálu**;

# VNĚJŠÍ POPIS SPOJITÉHO SYSTÉMU

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{(b_m p^m + \ldots + b_0)}{(a_n p^n + \ldots + a_0)} = \frac{(p - p_{zm})(p - p_{zm-1})\ldots(p - p_{z0})}{(p - p_{pn})(p - p_{pn-1})\ldots(p - p_{p0})}$$

- přenosovou funkci charakterizuje i rozmístění **nulových bodů** a **pólů**

# VNĚJŠÍ POPIS SPOJITÉHO SYSTÉMU

- základní typy frekvenčních filtrů:
  - dolní propust
  - horní propust
  - pásmová propust
  - pásmová zádrž

# VNĚJŠÍ POPIS SPOJITÉHO SYSTÉMU

**způsoby vnějšího popisu spojitých lineárních systémů:**

- ☑ diferenciální rovnice;
- ☑ přenosová funkce;
- ☑ rozložení nul a pólů;
- ☑ frekvenční charakteristika
  - ➔ v komplexní rovině;
  - ➔ modulová (amplitudová) a fázová frekvenční charakteristika;
- ☑ časové charakteristiky
  - ➔ impulzní charakteristika;
  - ➔ přechodová charakteristika;

# VNĚJŠÍ POPIS SPOJITÉHO SYSTÉMU

**způsoby vnějšího popisu spojitých nelineárních systémů:**

- ☑ diferenciální rovnice;

- ☑ impulzní charakteristika;
- ☑ přechodová charakteristika;

# VNĚJŠÍ POPIS DISKRÉTNÍHO SYSTÉMU

$$a_n y(kT) + a_{n-1} y(kT - T) + \ldots + a_0 y(kT - (n-1)T) =$$
$$= b_m x(kT) + b_{m-1} x(kT - T) + \ldots + b_0 x(kT - (m-1)T)$$

Z transformace

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n).z^{-n}$$

kde *z* je komplexní proměnná. Množina hodnot *z*, pro něž sumace konverguje, se nazývá oblast konvergence. Lze ukázat, že jestliže sumace konverguje pro danou posloupnost v bodě $z_0$, pak konverguje v každém bodě *z*, pro který platí . Oblast konvergence Z-transformace je tedy , kde *R* je dáno chováním posloupnosti *s*(*k*) pro $k.\rightarrow\infty$

# VNĚJŠÍ POPIS DISKRÉTNÍHO SYSTÉMU

$$a_n y(kT) + a_{n-1} y(kT - T) + \ldots + a_0 y(kT - nT) =$$
$$= b_m x(kT) + b_{m-1} x(kT - T) + \ldots + b_0 x(kT - mT)$$

## Věty o posunutí v originále

Posunutí vpravo

$$Z\{x(kT-mT)\} = z^{-m} Y(z)$$

Posunutí vlevo

$$Z\{x(kT + mT)\} = z^m \left[ Y(z) - \sum_{i=0}^{m-1} y(iT) z^{-i} \right]$$

# VNĚJŠÍ POPIS DISKRÉTNÍHO SYSTÉMU

$$a_n y(kT) + a_{n-1} y(kT-T) + \ldots + a_0 y(kT-nT) =$$
$$= b_m x(kT) + b_{m-1} x(kT-T) + \ldots + b_0 x(kT-mT)$$

její Z obraz za předpokladu linearity (**!**) (a nulových počátečních podmínek (**!**))

$$a_n Y(z) + a_{n-1} z^{-1} Y(z) + \ldots + a_0 z^{-n} Y(z) =$$
$$= b_m X(z) + b_{m-1} z^{-1} X(z) + \ldots + b_0 z^{-m} X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{(b_m + \ldots + b_0 z^{-m})}{(a_n + \ldots + a_0 z^{-n})}$$

**přenosová funkce diskrétního systému**

# VNĚJŠÍ POPIS DISKRÉTNÍHO SYSTÉMU

$$Y(z) = H(z).X(z) \sim \sum_{k} h(kT).x(nT - kT) =$$

$$= \sum_{k} h(nT - kT).x(kT)$$

kde h(kT) je funkce, která popisuje vlastnosti systému v časové oblasti – **impulzní charakteristika** – odezva na jednotkový impulz

# VNĚJŠÍ POPIS DISKRÉTNÍHO SYSTÉMU

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{(b_m + \ldots + b_0 z^{-m})}{(a_n + \ldots + a_0 z^{-n})}$$

- ☑ předpokládejme, že $z=e^{j\omega T}$,

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{Y(e^{j\omega T})}{X(e^{j\omega T})} = \frac{(b_m + \ldots + b_0 e^{-j\omega mT})}{(a_n + \ldots + a_0 e^{-j\omega nT})}$$

**frekvenční charakteristika systému**

$H(e^{j\omega T})$ obecně nabývá komplexních hodnot, které mají modul a fázi $\Rightarrow$ frekvenční charakteristika v komplexní rovině, resp. modulová (amplitudová) a fázová frekvenční charakteristika

# VNĚJŠÍ POPIS DISKRÉTNÍHO SYSTÉMU

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{(b_m + \ldots + b_0 z^{-m})}{(a_n + \ldots + a_0 z^{-n})} = \left| je - li\ m > n \right| =$$

$$= \frac{b_m z^m + \ldots + b_0}{a_m z^m + \ldots + a_0 z^{m-n}} = \frac{(z - z_{z,m})\ldots(z - z_{z,0})}{z^{m-n}(z - z_{p,n})\ldots(z - z_{p,0})}$$

- ☑ přenosovou funkci charakterizuje i rozmístění **nulových bodů** a **pólů**

# VNĚJŠÍ POPIS DISKRÉTNÍHO SYSTÉMU

**způsoby vnějšího popisu diskrétních lineárních systémů:**

- ☑ diferenční rovnice;
- ☑ přenosová funkce;
- ☑ rozložení nul a pólů;
- ☑ frekvenční charakteristika
  - ➔ v komplexní rovině;
  - ➔ modulová (amplitudová) a fázová frekvenční charakteristika;
- ☑ časové charakteristiky
  - ➔ impulzní charakteristika;
  - ➔ přechodová charakteristika;

# VNĚJŠÍ POPIS DISKRÉTNÍHO SYSTÉMU

**způsoby vnějšího popisu diskrétních nelineárních systémů:**

- ☑ diferenční rovnice;
- ☑ impulzní charakteristika;
- ☑ přechodová charakteristika;