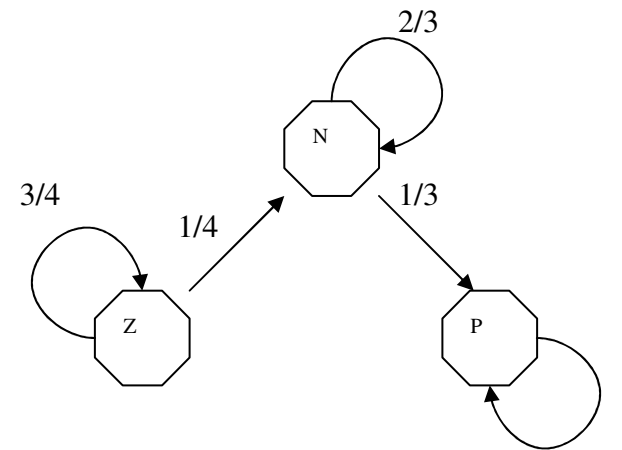


# Markovovy řetězce s diskrétním časem

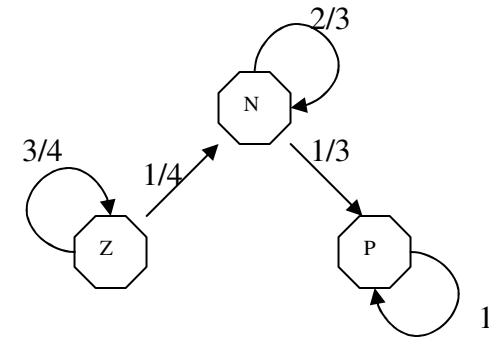
Základní informativní přehled

# Příklad: epidemie spalniček



- Model epidemie spalniček.
- Dítě může být buďto zdravé bez protilátek (Z), nemocné (N) nebo zdravé s protilátkami (P) po prodělaném onemocnění.
- Čísla nad šipkami udávají pravděpodobnosti a jakou během následujícího týdne dojde ke změně stavu dítěte.

# Příklad: epidemie spalniček



- Model epidemie spalniček.
- Dítě může být buďto zdravé bez protilátek (Z), nemocné (N) nebo zdravé s protilátkami (P) po prodělaném onemocnění.
- Čísla nad šipkami udávají pravděpodobnosti, že během následujícího týdne dojde ke změně stavu dítěte.
- Je-li dítě zdravé a má protilátky (je ve stavu P), již nemůže onemocnět
- Je-li dítě zdravé a zatím nemá protilátky (stav Z), pak s pravděpodobností  $\frac{3}{4}$  zůstane zdravé.
- Pravděpodobnost, že se dítě během následujícího týdne uzdraví je  $\frac{1}{3}$  (přejde ze stavu N do stavu P).
- Je-li dítě nemocné (stav N), nemůže se uzdravit a přesto nezískat žádné protilátky (stav Z).

- 
- Model popisující vývoj nějakého reálného stavového systému, který se mění v čase
  - Uvažujme výhradně diskrétní čas (existují modely i pro spojitý čas)
  - Známe všechny **stavy**
- 
- Terminologie pochází z fyziky
-

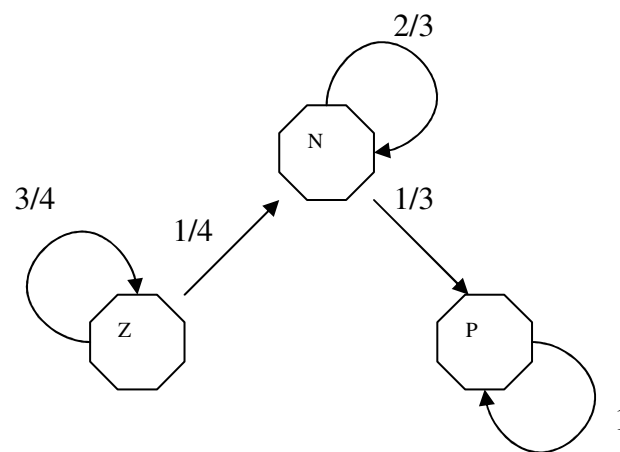
---

# Markovská vlastnost

- Stav v určitém čase závisí pouze na stavu v čase bezprostředně předcházejícím
  - Nezávislost na „historii“
  - Př.: myš v labyrintu, vybere si dveře (se stejnou pravděpodobností) a přesune se do další komůrky: kam se rozhodne jít nezávisí na tom, odkud přišla - má nulovou paměť – MŘ
  - Př.: nikdy se nevrátí zpět do komůrky, ze které přišla – **NE** MŘ
  - Pravděpodobnosti přechodu z jednoho stavu do druhého - zápis pomocí **matice pravděpodobností přechodu** (čtvercová).
  - Matice pravděpodobností přechodu je tzv. stochastická matice - součet v řádcích musí být 1 ! (Součet pravděpodobností přes všechny možnosti)
  - Markovův řetězec je určen počátečním rozdělením a maticí pravděpodobností přechodu.
-

# Příklad: epidemie spalniček – matice přechodu

Matice pravděpodobností přechodu		Příští týden		
		Z	N	P
Tento týden	Z	$3/4$	$1/4$	0
	N	0	$2/3$	$1/3$
	P	0	0	1



Počáteční rozdělení

Z: 1

N: 0

P: 0

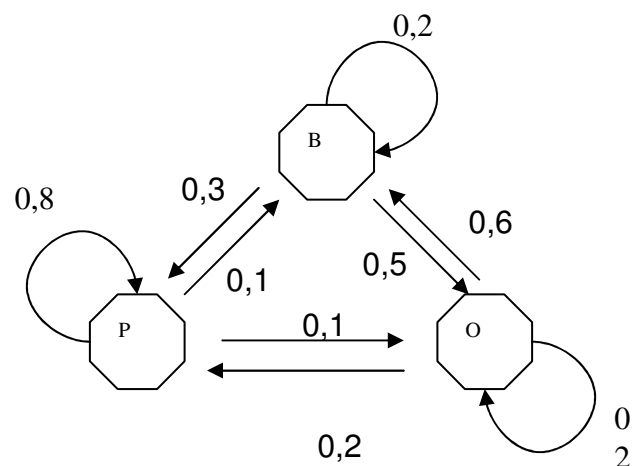
---

# Příklad: Půjčovna aut

- Pobočky autopůjčovny: Praha, Brno, Ostrava
  - Zákazník si v pobočce půjčí auto, které pak vrátí v libovolné pobočce
  - Např.: Praha - Brno, Ostrava - Brno, Brno - Brno
  - Auta se mezi pobočkami "přelévají".
  - Není firemní šofér, který by auta vozil zpět
  - Na začátku je v každé pobočce 30 aut.
  - ? Kolik aut bude v každé pobočce po obsloužení prvních 15 zákazníků?
  - ? Může se stát že v některé pobočce nezbyde žádné auto?
  - ? Kolik parkovacích míst v jednotlivých městech připravit ?
-

# Příklad: Půjčovna aut – matice přechodu (soubor: Auticka.xls)

Matice pravděpo- dobností přechodu		KAM		
		P	B	O
OD KU D	P	0,8	0,1	0,1
	B	0,3	0,2	0,5
	O	0,2	0,6	0,2



Počáteční rozdělení

P: pravděpodobnost, že lib.  
auto je v P je  $\frac{1}{3}$

B: pravděpodobnost, že lib.  
auto je v B je  $\frac{1}{3}$

O: pravděpodobnost, že lib.  
auto je v O je  $\frac{1}{3}$



- 
- Pst, že auto zapůjčené v Praze se vrátí do pražské pobočky je 0,8.
  - Pst, že auto zapůjčené v Brně se vrátí do pražské pobočky je 0,3.
  - Pst, že auto zapůjčené v Brně se vrátí do brněnské pobočky je 0,2.
  - Počáteční rozdělení je  $(1/3, 1/3, 1/3)$
  - soubor: krádeže auta (policie zloděje nikdy nevypátrá, auto se nikdy nevrátí zpět):  
krádež = **absorpční stav**
  - Stacionární – ustálený stav
-

---

# Formální zápis

- Posloupnost náhodných veličin, které nabývají pouze celočíselných hodnot

$$\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$$

- $S$  – množina stavů, prvky  $S$  nazýváme stavy

$$S = \{0, 1, \dots, N\}$$

$$P(X_n = i) > 0, i \in S$$

- Markovská vlastnost

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

---

- Pravděpodobnost přechodu ze stavu  $i$  do stavu  $j$ , v čase  $n$

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = p_{ij}(n, n+1)$$

- $p_{ij}$  tvoří prvky matice pravděpodobností přechodu (uvažujme, že pravděpodobnosti přechodu nezávisí na čase)

$$p_{ij} \geq 0, i, j \in S; \sum_{j \in S} p_{ij} = 1, i \in S$$

- Pravděpodobnostní rozdělení  $p$  se nazývá počáteční rozdělení Markovova řetězce

$$p = \{p_i, i \in S\}, p_i \geq 0, i \in S; \sum_{i \in S} p_i = 1$$

$$p_i = P(X_0 = i), i \in S$$

- 
- $P$  – Matice pravděpodobností přechodu
  - $p(0)$  – počáteční rozdělení (vektor sloupcový)
  - $p(n)$  – rozdělení v čase  $n$  (vektor sloupcový)

$$p(1)^T = p(0)^T P$$

$$p(n+1)^T = p(n)^T P$$

$$p(n+2)^T = p(n+1)^T P = p(n)^T P \cdot P = p(n)^T P^2$$

$$p(n)^T = p(0)^T P^n$$

- $P^n$  -  $n$ -tá mocnina matice pravděpodobností přechodu
-

# Příklad: Půjčovna aut – matice přechodu (soubor: Auticka.xls)

Matice pravděpo- dobností přechodu		KAM		
		P	B	O
OD KU D	P	0,8	0,1	0,1
	B	0,3	0,2	0,5
	O	0,2	0,6	0,2

$$\begin{pmatrix} p_P(n+1) \\ p_B(n+1) \\ p_O(n+1) \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} p_P(n) & p_B(n) & p_O(n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$p_P(n+1) = p_P(n) \cdot 0.8 + p_B(n) \cdot 0.3 + p_O(n) \cdot 0.2$$

$$p_B(n+1) = p_P(n) \cdot 0.1 + p_B(n) \cdot 0.2 + p_O(n) \cdot 0.6$$

$$p_O(n+1) = p_P(n) \cdot 0.1 + p_B(n) \cdot 0.5 + p_O(n) \cdot 0.2$$

---

# Další příklady MŘ s diskrétním časem

- Opilý námořník na molu
  - Náhodná procházka na přímce
  - Dostihy a sázky; Člověče, nezlob se
  - Modelování průchodu studentů studiem (stavy: odejde ze školy, postoupí do dalšího ročníku, opakuje ročník)
  - Otrava pracovníků v továrně (stavy: zasažený organismus - žádné projevy otravy, zasažený organismus - potíže, "zdravý organismus" před expozicí) –sledujeme po týdnech
  - Modelování epidemií (stavy jedince: zdravý, nemocný, uzdravený s protilátkami ) – sledujeme po týdnech
-

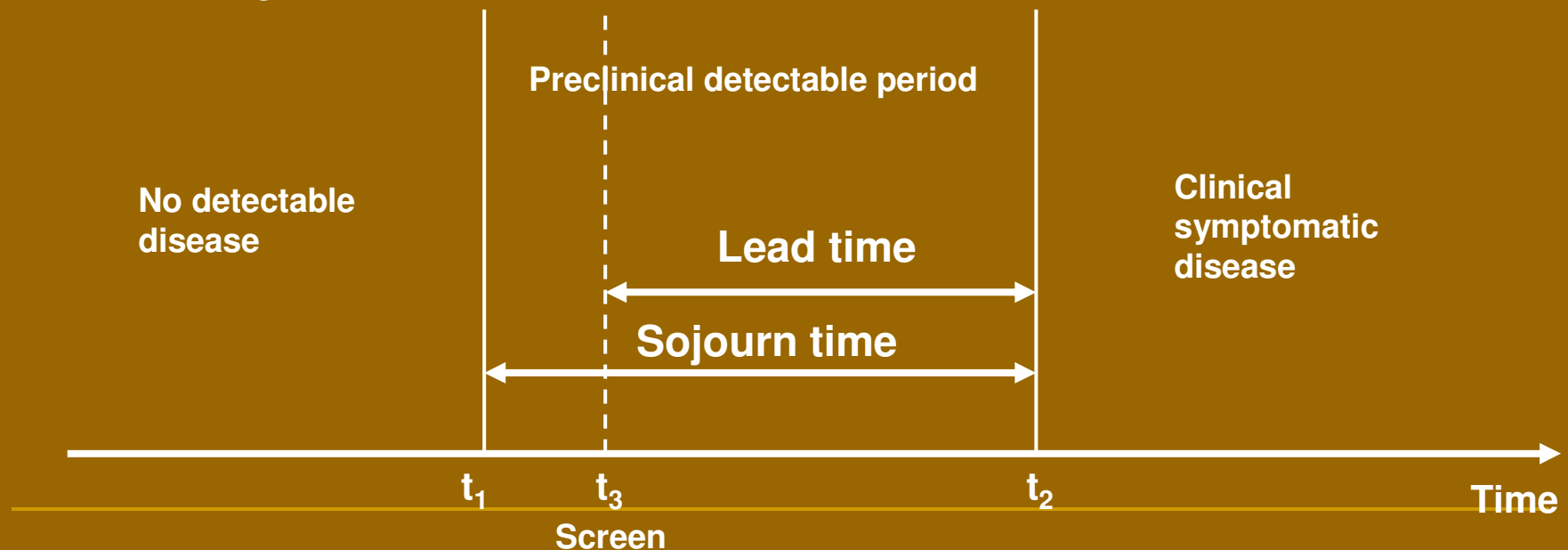
# Markovovy řetězce se spojitým časem

Příklady:

1. Rakovina prsu (stavy: žena zdravá, preklinické stadium, klinické stadium) – využití při modelování účinku screeningu
2. Mutace pozice DNA

# Tumor progression (breast cancer example)

- Zelen and Feinleib (1969) – model with an exponential distribution of time spent in the preclinical phase
- Every subject begins with **no detectable disease** at all. Some subjects will develop the disease of interest. Some will remain free of the disease all their lives.
- For subject who develops disease, at a certain time  $t_1$ , the person will pass to a state in which the disease is **asymptomatic** but can be detected by a screening test (PCDP). This phase is called the preclinical detectable period.
- For this subject, at a certain time  $t_2$  ( $t_2 > t_1$ ), the disease will become **clinically symptomatic**. In the absence of screening, this is defined as the time of diagnosis.



Zelen, M., and Feinleib, M. (1969), "On the Theory of Screening for Chronic Diseases," Biometrika, 56, 601-614.



# Conditions for Markov chain usage

- **Markov chain** – model of a physical process in which individuals move at random and independently between states
- Clinical state is an absorbing state (it is not possible to move to another state)
- **Markov assumption** – if an individual's state at time  $t$  is known, individual's history before time  $t$  does not add any information to prediction of the individual's state after time  $t$
- Assumed distribution of time spent in a given state is **exponential**
- Spontaneous regression is impossible
- Reach the clinical phase, a tumor must pass through the preclinical



# Three-state Markov model

States:

0 – no disease

1 – preclinical disease

2 – clinical disease

$\lambda_1$  - Transition rate from no disease to screen-detectable disease

$\lambda_2$  - Transition rate from preclinical to clinical disease

## Transition matrix

$$Q = \begin{matrix} & \text{State} \\ & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{State} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Transition rate is the probability of moving from one state of the Markov chain to another in an instantaneous period of time. For non-instantaneous periods, the corresponding quantity is known as a transition probability.  $\lambda_1$  = prob. Of a woman progressing from no disease to a preclinical disease in an infinitesimally small period of time.

$$MST = 1 / \lambda_2$$

## Transition probability matrix

$$P = \begin{matrix} & \text{State} \\ & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{State} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} P_{00}(t) & P_{01}(t) & P_{02}(t) \\ 0 & P_{11}(t) & P_{12}(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{pmatrix} e^{-\lambda_1 t} & \frac{\lambda_1 (e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t})}{(\lambda_1 - \lambda_2)} & 1 - \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \\ 0 & e^{-\lambda_2 t} & 1 - e^{-\lambda_2 t} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$