1. Spojité dynamické systémy

Hana Fitzová

Brno, 2007

Obsah

- Systém a jeho popis
- Převod systému na systém prvního řádu
- Ekonomické aplikace
  - Lotkův Volterrův model lovců a obětí
  - Walrasův model tržní rovnováhy
  - Model IS-LM
  - Neoklasický model růstu

Dynamický systém

- Určitý časově neměnný vztah mezi okamžitými a minulými nebo budoucími hodnotami daných veličin.
- Přesněji:

Dynamický systém

Nechť S je separabilní metrický prostor a $T \subseteq \mathbb{R}$. Dynamický systém je pak množina transformací $\Phi : T \times T \times S \to S$, které splňují:

a) Pro všechna $t_0, t_1, t_2 \in T, x \in S$ platí $\Phi(t_2, t_0, x) = \Phi(t_2, t_1, \Phi(t_1, t_0, x))$

b) Pro všechna $t, t_0 \in T$ a $x \in S$ a pro všechny posloupnosti $\{t_n\}, \{x_n\}$, pro které platí $t_n \to t$ a $x_n \to x$ platí $\Phi(t_n, t_0, x_n) \to \Phi(t, t_0, x)$.

Dynamický systém

- množinu S nazýváme stavový prostor
- libovolný bod $x \in S$ nazýváme stav systému
- obraz $\Phi(t, t_0, x)$ představuje stav systému v čase t, byl-li systém v čase t_0 ve stavu x

Systémy

- diskrétní $\times$ spojité
- deterministické $\times$ stochastické
- neřízené (uzavřené) $\times$ řízené (otevřené)
- časově neměnné $\times$ časově proměnlivé
- lineární $\times$ nelineární

Reprezentace systému

- Omezíme se na případ $S = \mathbb{R}^n$.
- Budeme uvažovat reprezentaci systému pomocí diferenciální rovnice.
- Dynamický systém je obecně popsán systémem obyčejných diferenciálních rovnic m-tého řádu ve tvaru

$$x^{(m)} = f(x^{(m-1)}, \ldots, \dot{x}, x) \tag{1}$$

kde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je hladká funkce.

Počáteční podmínky

Při splnění tzv. Cauchyho počáteční podmínky

$$\begin{aligned} x(0) &= \xi_0 \\ \dot{x}(0) &= \xi_1 \\ &\dots \\ x^{(m-1)}(0) &= \xi_{m-1} \end{aligned}$$

je řešením systému jednoznačně určená funkce $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

Věta

Existuje soustava ODR 1. řádu taková, že systém m-tého řádu (1) je s touto soustavou ekvivalentní, tj. existuje bijekce mezi množinami všech řešení obou soustav.

Důkaz (1)

Položme $y = (x, \dot{x}, \ldots, x^{(m-1)}) = (y_0, y_1, \ldots, y_{m-1})$.
Zřejmě platí $\dot{y} = (\dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(m)})$.
Přitom

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= y_1 \\
\ddot{x} &= y_2 \\
&\ldots \\
x^{(m-1)} &= y_{m-1} \\
x^{(m)} &= f(y_0, y_1, \ldots, y_{m-1})
\end{aligned}$$

Důkaz (2)

Počáteční podmínky můžeme přepsat jako

$$\begin{aligned} y_0(0) &= \xi_0 \\ y_1(0) &= \xi_1 \\ &\dots \\ y_{m-1}(0) &= \xi_{m-1} \end{aligned}$$

Tedy celkem zkráceně zapsáno:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= F(y) \\ y(0) &= \xi \end{aligned}$$

Důkaz (3)

což je systém diferenciálních rovnic prvního řádu
s Cauchyho počáteční podmínkou.

Vztah mezi x a y je bijekce, takže oba systémy jsou ekvivalentní.

Nadále se tedy budeme zabývat systémy prvního řádu

$$\dot{x} = f(x) \tag{2}$$

kde $\dot{x} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}\right)^T$ a f je funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Pojmy

- Existuje-li bod $x \in S: \ \Phi_t(x) = x$, nazývá se pevný bod systému.
- Řešení $x(t)$ soustavy $\dot{x} = f(x)$ vyhovující počáteční podmínce se říká trajektorie systému.
- Trajektorie systému může konvergovat (monotónně nebo periodicky; lokálně nebo globálně), pak hovoříme o systému stabilním.

1. Lotkův Volterrův model lovců a obětí

Populace kořistí $x(t)$ roste přirozeným tempem a (tj. $\dot{x} = ax$). Jejich počet je snižován o cxy díky přítomnosti dravců $y(t)$, kteří loví v hejnech kořisti.

Současně s tím přirozeně populace dravců klesá tempem b (tj.$\dot{y} = -by$), ale za přítomnosti obětí se tento pokles snižuje o dxy. Za předpokladu $a, b, c, d > 0$ máme tedy systém

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax - cxy \\ \dot{y} &= dxy - by \end{aligned}$$

Nalezněte řešení systému.

2. Walrasův model tržní rovnováhy

Nechť p je cena, $D(p)$ poptávka, $S(p)$ nabídka, $E(p)$ převis poptávky; $k, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ jsou konstanty (> 0), p_0 je počátek přizpůsobovacího procesu ceny v čase.

$$\begin{aligned} D(p) &= \alpha - \beta p \\ S(p) &= -\gamma + \delta p \\ \dot{p} &= kE(p) \\ p(0) &= p_0 \end{aligned}$$

Nalezněte řešení systému.

3. Model IS-LM

- produkce $\dot{Y} = h(D - S)$
- úroková míra $\dot{r} = m(L - \overline{M})$
- poptávka po penězích $L = kY$
- spotřeba $C = cY$
- investice $I = -ar$
- agregátní poptávka $D = C + I$
- agregátní nabídka $S = Y$
- $0 < h, m, a;\ 0 < c < 1$

Nalezněte řešení systému.

4. Neoklasický model růstu

- Pracovní síla roste konstantním tempem: $\dot{L}/L = n$
- Úspory $S = sY$, $s \in (0,1)$, jsou zcela investovány do kapitálu K
- Investice $I = \dot{K} + \delta K$, $\delta \in (0,1)$
- konstantní výnosy z rozsahu:
  $Y = F(K,L) = LF(K/L,1) \equiv Lf(k)$, kde $k = K/L$

Nalezněte řešení systému pro Cobb-Douglasovu produkční funkci tvaru $Y = K^\alpha L^{1-\alpha};\ \alpha \in (0,1)$.